Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

МОДЕЛИ СПЛОШНЫХ СРЕД С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ[1]

Л. И. Седов

(Москва)

Хорошо известно, что в современной физике и механике требуется построение, введение и использование новых моделей тел с усложненными свойствами.

Настало время фактического развития макроскопической теории, в которой требуется изучать не только движение газов, но также и движение твердых деформируемых тел в тесном взаимодействии с физико-химическими процессами, происходящими внутри данной частицы и в ее взаимодействии с соседними частицами тела и с внешними объектами.

В последние годы в мировой литературе появляется очень много теоретических работ, в которых вводятся новые виды обобщенных сил и уравнений состояния. Подавляющее число этих работ основано на формальных математических конструкциях.

Построение новых теорий связано существенно с введением в качестве определяющих и искомых характеристик новых понятий и соответствующих математически задаваемых величин для описания свойств пространства и времени, положения и состояния субстационального частиц тела и полей с выделением элементарных определяющих величин из общих законов движения и физико-химических процессов.

Для более конкретного освещения этого вопроса рассмотрим общую постановку проблем об установлении моделей для описания широких классов движений и процессов в механике сплошной среды.

Укажем сначала на примеры основных характерных величин.

При физическом изучении движения материальных континуумов необходимо пользоваться понятиями времени и метрического пространства трехмерного или четырехмерного и всегда двумя системами координат (фигура)[2]. Системой координат наблюдателя x^1, x^2, x^3, x^4 и соответствующей лагранжевой системой ξ^1, ξ^2, ξ^3 $\xi^4 = t$. В физике Ньютона можно всегда считать, что имеет место равенство $x^4 = \xi^4 = t$ и рассматривать абсолютное время как скалярную переменную. Координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3 фиксируют индивидуальные частицы. В общем случае обе системы координат по своему существу криволинейные системы координат.

---

[1] Текст доклада, сделанного на открытии III Всесоюзного съезда по механике 25 января 1968 г.

[2] Некоторые думают, что механику подвижных непрерывных материальных сред без существенного ограничения общности можно строить при помощи только одной и притом декартовой системы координат. Эта точка зрения, отраженная в некоторых книгах и искренне внедряемая в сознание учащихся, неверна и мешает пониманию сущности механики и постановок ее задач.

Путаница питается, с одной стороны, тем, что в механике деформируемых твердых тел обычно рассматриваются только линеаризованные задачи, когда в расчетах можно считать, что система отсчета наблюдателя и сопутствующая система совпадают. С другой стороны, тем, что метрика сопутствующей лагранжевой системы координат в теории жидкостей и газов проявляется только через плотность.

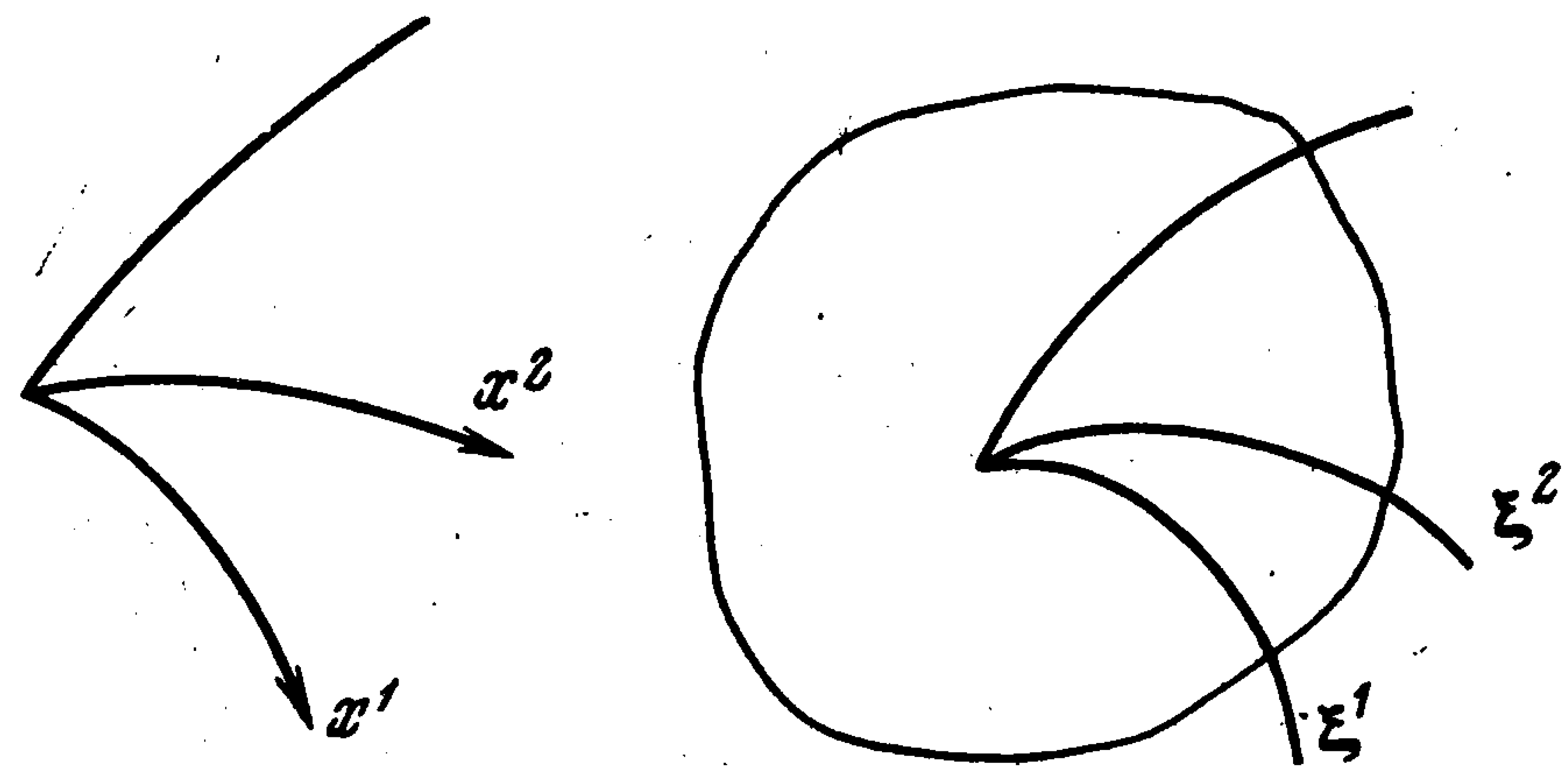
Вместе с этим часто забывают, что все субстанциональные характеристики, такие как скорость, ускорение, тензор скоростей деформаций и т. п., вводятся при помощи системы наблюдателя при существенном использовании понятия о сопутствующей системе координат.

В метрическом римановом пространстве для элемента длины имеем

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j = \hat{g}_{ij}\,d\xi^i d\xi^j \tag{1}$$

Компоненты тензора g_{ij} определяют метрику и являются основными характеристиками пространства и времени.

В механике Ньютона и в специальной теории относительности тензор g_{ij} евклидов и его компоненты доопределяются наблюдателем только выбором, по собственному усмотрению, системы координат x^1, x^2, x^3, x^4.



В общей теории относительности тензор g_{ij} определяется из уравнений, выражающих собой физические принципы. Инвариантные дифференциальные величины, задающие свойства метрического тензора g_{ij} риманового четырехмерного пространства, можно взять в качестве первой и очень важной иллюстрации, примера не классических искомых физических величин нового типа.

Основной искомой связью в системе наблюдателя, определяющей движение среды, является закон движения, представляемый четырьмя функциями

$$x^i = x^i(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ \xi^4) \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{2}$$

Наряду с функциями $x^i(\xi^k)$ удобно вводить и рассматривать в качестве определяющих аргументов для различных физических функций производные

$$x_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j},\quad \nabla_{k_1} x_j^i, \ldots \nabla_{k_1}\nabla_{k_2}\ldots\nabla_p x_j^i \ldots \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

Здесь через символ ∇_k обозначена ковариантная производная по x^k, причем первые производные x_j^i рассматриваются при фиксированных значениях индекса j как компоненты вектора по индексу i, эти векторы определяют собой компоненты вектора скорости, соответствующие повороты и при сравнении данного положения тела с некоторым мысленно вводимым, «начальным положением» компоненты тензора деформации:

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = {}^1/_2\,(\hat{g}_{ij} - g^\circ_{ij}) = {}^1/_2\,(g_{pq}\,x_i^p x_j^q - g^\circ_{ij})$$

Здесь через $g_{ij}{}^\circ\,(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ обозначены компоненты метрического тензора, отвечающего «начальному положению», которое вводится с помощью некоторого соглашения из физических соображений. В простейших частных случаях начальное положение вводится как «неизменяемое твердое тело», совпадающее в трехмерной пространственной части с данным деформируемым телом в некоторый «начальный» момент времени (см. [1]).

Вместе с законом движения (2) необходимо вводить переменные параметры μ^A и их градиенты (ковариантные производные) различных порядков (4)

$$\mu^A = \mu^A(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3,\ \xi^4),\quad \nabla_{k_1}\nabla_{k_2}\cdots\nabla_{k_q}\mu^A, \ldots \qquad (A = 1, 2, \ldots, N;\ q = 1, 2, 3, \ldots)$$

в качестве таких дополнительных параметров μ^A можно взять:

энтропию, концентрации различных компонент в смеси,

компоненты тензоров остаточных деформаций и плотности [1] дислокаций $\varepsilon_{ij}^{(p)}$, S_{ij},

[1] В настоящее время происходит усовершенствование и обобщение теории пластичности добавлением новых параметров и таким путем получается теория дислокаций (см., например, [2]).

компоненты вектора электромагнитного потенциала A_i для тензора электромагнитного поля

$$F_{ij}=\frac{\partial A_i}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

определенного в соответствующей инерциальной системе координат матрицей [см. например, [3]]

$$F_{ij}=\begin{Vmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & cE_1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & cE_2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & cE_3 \\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0 \end{Vmatrix}$$

где c — скорость света, E_1, E_2, E_3 — компоненты вектора электрической напряженности, а B^1, B^2, B^3 — компоненты вектора магнитной индукции;

компоненты тензора намагниченности и поляризации $\mathcal{P}_{ij}={}^1/_2\,(F_{ij}-H_{ij})$, причем H^{ij} определены матрицей:

$$H^{ij}=\begin{Vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -D_1/c \\ -H_3 & 0 & H_1 & -D_2/c \\ H_2 & -H_1 & 0 & -D_3/c \\ D_1/c & D_2/c & D_3/c & 0 \end{Vmatrix}$$

где H_1, H_2, H_3 — компоненты вектора магнитной напряженности, а D_1, D_2, D_3— компоненты вектора электрической индукции;

компоненты внутренних механических моментов количеств движения m_{ik} и т. п.

Переменные параметры μ^A могут иметь скалярную, тензорую или спинорную природу [4,5,6]. Наличие переменных параметров μ^A, которые согласно (4) необходимо определять при решении задач, означает, что изучаемая модель сплошной среды обладает внутренними степенями свободы.

Характерной и важной особенностью всех макроскопических моделей деформируемых сред и полей будет функциональная зависимость искомых величин для тел конечных размеров от определяющих параметров. Например, для деформируемого тела конечных размеров полная внутренняя энергия U всегда будет функционалом от функций $x^i(\xi^k)$ и $\mu^A(\xi^k)$.

Во многих случаях на практике можно принять обобщенное свойство аддитивности внутренней энергии и для полной энергии U пользоваться формулой вида

$$U=\int\limits_m u\,(g_{ij},\ x_j^i,\ \ldots\nabla_{k_1}\nabla_{k_2}\ldots\nabla_{k_r}x_j^i,\ \mu^A,\ \ldots\nabla_{k_1}\ldots\nabla_{k_s}\mu^A,\ S,\ K_B)\,dm+U_0 \tag{5}$$

где m — масса покоя, а dm — элемент массы покоя среды, u — локальная внутренняя энергия, рассчитанная на единицу массы и представляющая собой физически определенную функцию только от указанных аргументов, причем S — энтропия, а K_B ($B=1,2,\ldots$) — известные функции координат ξ^i (обобщение заданных физических постоянных). По основному физическому допущению в данной точке величина локальной удельной энергии u не зависит от градиентов высшего порядка [1], не указанных в числе аргументов u (r и s — фиксированные числа).

В классической теории упругости имеем простейший случай, когда

$$u\,(\overset{\circ}{g}_{ij},\ \varepsilon_{ij},\ S,\ K_B)$$

[1] Еще Коши при создании теории упругости предвидел и подразумевал возможность введения в аргументы задаваемых функций высших производных. Из статистических теорий при предельном переходе от дисконтинуума к континууму, получается, что в аргументах удельной внутренней энергии u могут присутствовать, вообще говоря, производные любого порядка из (3).

В более сложных новых моделях [1] сплошных сред в аргументах удельной внутренней энергии u появляются дополнительные физико-химические характеристики μ^A и градиенты различных порядков от величин x_j^i и μ^A.

Наличие таких градиентов в выражении для внутренней энергии приводит к необходимости пересмотреть имеющиеся концепции об уравнениях движения и процессов, о краевых и начальных значениях, о механизмах взаимодействий, об условиях на скачках и многих других вопросов.

Специально выделенная и отмеченная в формуле (5) постоянная U_0 в классической теории упругости совершенно несущественна и обычно полагается равной нулю.

В более общем случае постоянную U_0 необходимо учитывать и ее нельзя рассматривать как аддитивную величину для отдельных частей тела при фактическом разделении тела на различные части.

Это связано с тем, что всякое разделение тела на части, измельчение тела и т. п. связано с затратами внешней энергии.

В первом приближении неаддитивность полной внутренней энергии U можно учитывать через постоянную U_0. Учет изменения U_0 при изменении поверхности тела при образовании трещин, при образовании и развитии дислокаций и при разрушении тела имеет первостепенное значение.

Для упругих тел при наличии изолированных особенностей изменение постоянной U_0 для равновесных процессов можно найти через глобальное изменение упругой энергии. Если внутри тела под действием внутренних процессов или под действием известных внешних воздействий возникают или устраняются некоторые дефекты, то это связано с затратами энергии, источником которой могут быть полная упругая энергия тела и известные внешние притоки энергии. В некоторых случаях изменения U_0 аналогичны скрытой теплоте плавления или вообще энергии фазовых превращений.

Необходимо подчеркнуть, что дальнейшее разрешение на физической основе проблемы прочности материалов будет тесно связано с изучением изменения U_0. Отсутствие законченных теорий и заметных успехов в разрешении основных задач о критериях прочности материалов можно объяснять игнорированием величины U_0. С другой стороны, успехи в теории трещин в хрупких телах, в первую очередь, связаны с учетом изменения величины U_0.

Для решений некоторых задач в рамках теории упругости расчетные напряжения в отдельных малых областях могут возрастать неограниченно и это не связано с заметным общим или даже местным разрушением. В связи с этим иногда неприемлемы критерии разрушения, основанные на появлении в упругом поле расчетных напряжений, превосходящих некоторые предельные значения.

Разрушения конструкций различных сооружений или испытываемых образцов в общем случае представляют собой глобальные явления того же характера, как явление неустойчивости движения и явление невозможности равновесия или непрерывного движения.

В общем случае критерии разрушения не имеют локальной природы. Тем не менее, очень часто глобальная неустойчивость определяется вполне локальными условиями, однако нельзя не учитывать, что во многих случаях соответствующие локальные условия могут быть только необходимыми, но недостаточными для нарушения устойчивости равновесия и для разрушения данной конструкции.

Проблема конструирования моделей сплошных сред состоит в установлении характеристических величин и системы функциональных или дифференциальных уравнений и различного рода добавочных условий, которые позволяют в конкретных случаях формулировать математические задачи об определении законов движения $x^i(\xi^k)$ и физико-химических процессов, определяемых функциями $\mu^A(\xi^k)$.

Задача о построении моделей сплошных сред применительно к известным классам реальных объектов и реальных явлений представляет собой одну из основных задач физического исследования. Разрешение этой задачи связано с опорой на исходные,

[1] В частности, можно вспомнить модель жидкости с пузырьками [7].

универсальные и частные базисные допущения, на данные опытов и на согласовании наблюдений и эмпирических измерений с теоретическими выводами и расчетами в пределах точности, нужной практически или задаваемой по смыслу поставленных проблем.

Предлагаемая работа посвящена описанию, анализу и развитию общего метода, позволяющего на основании минимального числа допущений физического характера, устанавливать для моделей сред с внутренними степенями свободы усложненные замкнутые системы уравнений и усложненные добавочные краевые и другие условия, конкретизирующие отдельные модели и частные постановки задач.

Исследуемое и положенное в основу базисное вариационное уравнение представляет собой простое и естественное обобщение вариационного принципа Лагранжа и во многих важнейших случаях полностью совпадает с хорошо известными примерами приложения и формулировки этого принципа [8,4,6,9,1,10].

Как хорошо и давно уже известно, все основные уравнения в теории относительности, в электродинамике, в аналитической механике, в термодинамике равновесных процессов, в теории упругости, в гидродинамике и во многих других случаях получаются при помощи вариационного уравнения Лагранжа.

Во многих современных физических теориях этот вариационный принцип представляет собой рабочий и по существу единственный исходный рациональный аппарат исследования.

Проведенный анализ показывает, что вариационное уравнение Лагранжа для материальных континуумов и для физических полей может быть положено в основу для любых физических моделей не только для обратимых явлений, но и в случаях необратимых явлений.

При помощи вариационного уравнения оказалось возможным объединить и синтезировать на общей основе различные феноменологические и статистические методы теории необратимых процессов в термодинамике и механике. В частности, появилась возможность истолковать и оценить в рамках уже развитой термодинамики необратимых процессов ассоциированный закон для остаточных пластических деформаций в механической теории пластичности.

Известным новым моментом в развиваемой теории будет применение уравнения в вариациях:

1) для описания действительно осуществимых в сплошных средах необратимых явлений;

2) для установления уравнения состояния;

3) для установления кинетических уравнений;

4) для получения начальных и краевых условий и

5) для получения условий на сильных разрывах — скачках внутри среды.

При развитии современной теории усложненных макроскопических моделей сред и полей важно иметь ясное представление о том, что даже в рамках ньютонианской механики описание явлений с существенным проявлением внутренних степеней свободы невозможно только на базе главного уравнения механики Ньютона

$$ma = \mathbf{F} \tag{6}$$

Уравнение (6) достаточно в качестве базы для развития аналитической механики, системы материальных точек, в теории абсолютно твердого тела, адиабатической теории упругости, теории движения идеальной несжимаемой жидкости и в некоторых других случаях, но уже недостаточно для учета макроскопических тепловых и электромагнитных эффектов.

В частности, уравнение (6) не может служить базисом для получения макроскопических законов, регулирующих рост пластических деформаций, для учета эффектов, связанных с изменением непрерывно распределенных дислокаций, для учета различных процессов и эффектов, связанных с макроскопическими теориями электрической поляризации и намагничивания сред и во многих других случаях.

В частности, известное уравнение моментов количеств движения для малых частиц или для конечных тел не будет следствием уравнения (6), а будет независимым фундаментальным уравнением, связанным с симметрией законов природы относительно группы вращений, тогда как уравнение (6) связано с симметрией законов природы относительно группы трансляций.

Для абсолютно твердого тела и для многих классических моделей сплошных сред дифференциальное уравнение моментов количеств движения сводится к условию о симметрии тензора внутренних напряжений или удовлетворяется автоматически, когда тензор внутренних напряжений вводится как определяемая характеристика из общих допущений, фиксирующих свойства среды.

Отметим, что развитие статистических теорий для вывода макроскопических закономерностей, базирующееся на уравнение (6) на микроскопическом уровне, всегда связано с некоторыми существенными добавочными универсальными и частными допущениями, не вытекающими непосредственно из уравнения (6).

Обратимся теперь к разъяснению смысла основного вариационного уравнения, которое можно взять как исходное базисное уравнение для макроскопических сред с внутренними степенями свободы.

Для простоты и большей общности рассмотрим дальнейшую теорию в рамках специальной теории относительности в предположении, что пространство — время псевдоевклидово.

Опыт и ближайшее рассмотрение показывают, что развитие теории с использованием четырехмерного геометрически определенного физического пространства — времени и четырехмерных векторов и тензоров очень удобно, естественно и в важных случаях с физической точки зрения совершенно необходимо.

В фиксированной системе координат наблюдателя наряду с действительными движениями и процессами, описываемыми точно или приближенно при помощи кусочно-гладких функций

$$x^i(\xi^k), \qquad \mu^A(\xi^k), \qquad S(\xi^k) \tag{7}$$

введем мысленно некоторый достаточно широкий класс кусочно-гладких допустимых функций, содержащий по условию систему функций (7)

$$\widetilde{x}^i(\xi^k) = x^i(\xi^k) + \delta x^i, \qquad \widetilde{\mu}^A(\xi^k) = \mu^A(\xi^k) + \delta\mu^A, \qquad \widetilde{S}(\xi^k) = S(\xi^k) + \delta S \tag{8}$$

и по смыслу величин $K_B(\xi^k)$ полагаем, что

$$\delta K_B(\xi^k) = 0$$

Функции $\widetilde{x}_i$, $\widetilde{\mu}^A$ $\widetilde{S}$ рассматриваются в точках некоторой области системы событий четырехмерного объема V_0 пространства — времени, ограниченного трехмерной поверхностью Σ_0. Дальнейшее построение связано с предположением, что в классе допустимых функций вариации δx^i, $\delta\mu^A$ и δS в объеме V_0 непрерывны вместе со всеми производными, входящими в вариационные уравнения и обладают достаточным произволом, а вариации δx_j^i, $\delta\nabla_k x^i{}_j,\ldots$, $\delta\nabla_k\mu^A,\ldots$ и т. д. выражаются через функции $x^i(\xi^k)$ и $\mu^A(\xi^k)$ для действительных явлений, через вариации δx^i и $\delta\mu^A$ и через их производные по координатам x^i.

Существенной новой особенностью дальнейшей теории будут следующие обстоятельства:

1) вариации δx^i определены как компоненты четырехмерного контравариантного вектора, а вариации $\delta\mu^A$ как компоненты тензоров той же породы, что и μ^A;

2) на границах Σ_3 произвольных объемов $V_4 < V_0$ вариации δx^i и $\delta\mu^A$ и их производные могут быть отличны от нуля и в известной степени произвольны.

Основное базисное уравнение напишем в виде

$$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda d\tau + \delta W^* + \delta W = 0 \tag{9}$$

где Λ — плотность функции Лагранжа.

Для материальной среды Λ можно задавать формулой [1]

$$\Lambda = -\rho u\,(g_{ij},\ x_j^i,\ \nabla_k x_j^i \ldots \mu^A,\ \nabla_k \mu^A, \ldots,\ S,\ K_B) \tag{10}$$

где ρ — скалярная плотность (отношение массы покоя к трехмерному объему в сопутствующей системе координат), u — внутренняя энергия, рассчитанная на единицу массы покоя в сопутствующей системе координат. В специальной теории относительности величину u можно рассматривать как четырехмерный скаляр. Первый закон термодинамики гласит, что функцию $u\rho d\tau$ можно ввести для любой физической бесконечно малой частицы.

Установление аргументов и вида функции u, это основная физическая задача, возникающая при конкретизации модели сплошной среды. Фиксирование внутренней энергии как функции своих аргументов всегда связано с некоторыми допущениями, часть из которых иногда может показаться очень естественной и само собой разумеющейся.

На практике часто значения переменных параметров можно рассматривать как характеристики малых возмущений, в связи с этим во многих случаях функцию u можно рассматривать просто как положительно дефинитную квадратичную форму определяющих малых переменных параметров. В этих случаях проблема определения функции u сводится к проблеме определения постоянных коэффициентов соответствующей квадратичной формы. При определении этих коэффициентов полезны условия симметрии [11, 12] и можно опереться на опытные данные, а в некоторых случаях значение этих коэффициентов можно связать с молекулярными постоянными на основе статистических теорий (развиваемой с помощью своих универсальных и специфических для данной модели допущений). Такие коэффициенты подобны модулю Юнга и коэффициенту Пуассона, которые на практике всегда можно легко найти из опытов. Их можно вычислить статистическим путем (на основе некоторых далеко идущих допущений). Однако в ряде случаев расчетные значения из статистики, вообще говоря, не соответствуют опыту для твердых тел. Для газов соответствие между расчетами и опытом лучше, но и в этом случае требуется опытная проверка результатов расчетов. Все же статистические теории позволяют наметить некоторые соотношения между подобными коэффициентами, не очевидные в феноменологических теориях, например, связи между коэффициентами теплопроводности, вязкости и диффузии.

В ньютонианской механике в инерциальной системе координат обычно вместо формулы (10) можно пользоваться формулой

$$\Lambda = \rho\,(^1/_2 v^2 - u)$$

где v — скорость точек сплошной среды, а u — трехмерный скаляр, равный внутренней энергии.

В уже развитых теориях функцию Λ можно считать известной как для уже определенных моделей материальных сред, так и для электромагнитного поля. В общей теории относительности слагаемая часть величины Λ, связанная с тяготением, известна и служит основой для определения метрического тензора g_{ij}, представляющего гравитационное поле. Различные обобщения общей теории относительности, вообще говоря, всегда связаны с изменением или иным заданием плотности лагранжиана Λ.

Важно отметить, что, с физической точки зрения, можно говорить о том, что физическая система задана или известна, только в том случае, когда внутренняя энергия или, соответственно, лагранжиан Λ заданы или определены [1,10,13–15].

---

[1] К варьируемому интегралу по V_4 можно прибавить члены, учитывающие наличие величины U_0 в формуле (5), которая может вообще меняться за счет развития границы Σ_0 и поверхностей разрыва внутри V_4. В излагаемом ниже, основном варианте теории такой добавочный член не вводится. В аргументах формулы для Λ среди параметров μ^A выделена энтропия S, причем среди аргументов Λ не значатся градиенты энтропии S. Дальнейшую теорию можно распространить непосредственно на случай, когда энтропия не выделяется специально, а отождествляется с одним из параметров μ^A, входящим в Λ вместе со своими градиентами любого порядка.

Таким образом, с общей физической точки зрения, требование о задании лагранжиана Λ в функции макроскопических переменных в уравнении (9) будет естественным. Выполнение этого требования связано с использованием громадного опыта, накопленного в различных физических теориях и в разнообразных экспериментах. Допущения, выставляемые при фиксировании функции Λ, всегда необходимы и могут быть оправданы различными интуитивными и другими, вообще говоря, наиболее простыми предположениями.

Самые непосредственные контакты макроскопических теорий с универсальными физическими принципами с опытом и со статистическими теориями могут и должны осуществляться при обсуждении проблемы фиксирования функции Λ.

Обращаемся теперь к разъяснению выражения для задаваемого функционала δW^*, характеризующего внешние объемные в V_4 и поверхностные на Σ_3 взаимодействия данной части среды в V_4 с внешними полями и телами и некоторых необратимых действий соседних частей среды, примыкающих к выделенному объему V_4 вдоль поверхности Σ_3.

При адиабатических обратимых процессах и при отсутствии внешних притоков энергии внутри V_4 и на поверхности Σ_3 часто можно принять просто, что:

$$\delta W^* = 0$$

В консервативных системах небесной механики всегда можно считать, что $\delta W^* = 0$.

В общем случае феноменологических теорий при наличии внешних к рассматриваемой среде объемных и поверхностных притоков энергии и необратимых процессов, когда в аргументы Λ входят производные по ξ^k или x^i различных порядков от x^i (ξ^k) и μ^A (ξ^k), общий вид выражения для δW^* напишем в виде

$$\delta W^* = \int\limits_{V_4} (\rho\theta\delta S - Q_i \delta x^i - M_A \delta\mu^A)\, d\tau - \tag{11}$$

$$- \int\limits_{\Sigma_3 + S_\pm} \left(\sum_{p=0} Q_i^{\,kj_1 \ldots j_p} \nabla_{j_1} \ldots \nabla_{j_p} \delta x^i + \sum_{q=0} M_A^{\,kj_1 \ldots j_q} \nabla_{j_1} \ldots \nabla_{j_q} \delta\mu^A \right) n_k d\sigma$$

Здесь через $S_\pm$ обозначены две стороны трехмерной поверхности S внутри V_4, на которой характеристики движения могут терпеть сильные разрывы, n_k — компоненты единичного вектора внешней нормали на Σ_3 и S_+ или S_-. Компоненты

$$Q\,(Q_i,\ Q_i^{\,kj_1 \ldots j_p}),\ M\,(M_A,\ M_A^{\,kj_1 \ldots j_q})$$

— некоторые задаваемые внешние обобщенные «силы». Величина θ играет роль абсолютной температуры, и ее можно рассматривать в разных случаях как определяемую или как задаваемую величину. В формуле (11) вариация энтропии δS введена как величина не зависимая от вариаций δx^i и $\delta\mu^A$.

Задание функционала δW^* связано с проблемой разделения взаимодействий на внутренние и внешние. Например, если электромагнитное поле или гравитационное поле рассматривается как внешние объекты, то соответствующие потоки энергии для электромагнитных пондеромоторных сил и для гравитационных сил присутствуют в выражении для δW^*, если же эти поля включаются в модель среды, то соответствующие полные дифференциалы можно выделять из δW^* и их нужно включать в выражение для Λ. При перенесении полных дифференциалов из δW^* в $\int \Lambda d\tau$ меняется смысл Λ, формула (10) может быть заменена другой аналогичной формулой, в которой вместо внутренней энергии взята свободная энергия или энтальпия и могут быть другие термодинамические функции состояния. Для необратимых процессов перенесение члена δW^* целиком в Λ невозможно, так как вариация δW^*, вообще говоря, неголономна.

Определение компонент обобщенных массовых и поверхностных сил Q и M представляет собой проблему, тесно связанную с теорией диссипативных механизмов, при решении этой задачи неизбежны различные допущения и контакты с уже развитой термодинамикой необратимых явлений. Определение Q и M аналогично основной физической задаче в механике Ньютона об установлении законов для сил определенных уравнением Ньютона, а в данном случае вариационным уравнением (9). Особенное физическое значение может иметь учет свойств величин в подынтегральном выражении для δW^* на поверхности разрыва $S_\pm$. Определение δW^* связано с выбором определяющих параметров x^i и μ^A с определением их вариаций и, в частности, со свойством непрерывности вариации на скачках.

Важно отметить, что при определении или при задании величин Λ и δW^* выявляются общие основы для самых разнообразных моделей. Это позволяет использовать и синтезировать опыт в различных областях и установить непосредственные связи между различными теориями. Кроме этого, возникают дополнительные средства для использования статистических соображений.

Учет диссипативных процессов можно и удобно производить при помощи уравнения для продукции энтропии, в законах для действительных движений и процессов. Уравнение, определяющее изменение энтропии частиц, получено ниже из уравнений Эйлера в общей вариационной задаче (9). Положительность роста энтропии за счет внутренних необратимых процессов должна обеспечиваться законами, задающими Λ и обобщенные силы Q и M для действительных явлений.

По основному смыслу уравнения (9) принимается, что величина δW представляется поверхностным интегралом по $\Sigma_3 + S_\pm$. При вариациях δx^i, $\delta\mu^A$ и их производных, отличных от нуля на $\Sigma + S_\pm$, вариация δW определяется из уравнения (9) через $\delta \int \Lambda d\tau$ и δW^*.

Если, кроме уравнения (9), величина δW на $\Sigma_0 + S_\pm$ (при произвольных δx^i, $\delta\mu^A$ и соответственно их производных) задается еще внешними условиями, то, как будет показано ниже, это приведет к начальным условиям, краевым условиям и условиям на скачке.

Уравнение (9) при вариациях δx^i и $\delta\mu^A$ равных нулю вместе со своими производными нужного порядка на $\Sigma_3 + S_\pm$, но произвольных (линейно — независимых) внутри V_4, приводит к уравнениям Эйлера[1]

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q{}^p}\nabla_i x_q{}^p + \nabla_s\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q{}^i}x_q{}^s\right) + \frac{\partial\Lambda}{\partial k_B}\nabla_i K_B + Q_i + M_A\nabla_i\mu^A = \rho\theta\nabla_i S \qquad (12)$$

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta S} = \frac{\partial\Lambda}{\partial S} = -\rho\theta, \qquad \frac{\delta\Lambda}{\partial\mu^A} = M_A \qquad (13)$$

Здесь через $\delta\Lambda/\delta x_q{}^p$, $\delta\Lambda/\delta\mu^A$ и $\delta\Lambda/\delta S$ обозначены вариационные производные, например

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q{}^p} = \frac{\partial\Lambda}{\partial x_q{}^p} - \nabla_k\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_k x_q{}^p} + \nabla_k\nabla_s\frac{\partial\Lambda}{\nabla_s\nabla_k x_q{}^p} - \ldots \qquad (14)$$

Умножая уравнения (12) на $x_4{}^i$, после суммирования по индексу i получим

$$\rho\theta\frac{dS}{d\xi^4} = Q_i\frac{\partial x^i}{\partial\xi^4} + M_A\frac{d\mu^A}{d\xi^4} + \frac{\partial\Lambda}{\partial K_B}\frac{dK_B}{d\xi^4} + \nabla_s F^s \qquad (15)$$

где

$$F^s = x_4{}^i x_p{}^s\frac{\delta\Lambda}{\delta x_p{}^i}, \qquad \frac{d}{d\xi^4} = \frac{\partial x^i}{\partial\xi^4}\nabla_i$$

Так как

$$x_4{}^s\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q{}^p}\nabla_s x_q{}^p + x_4{}^p\nabla_s\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q{}^p}x_q{}^s\right) = \nabla_s\left(x_4{}^i x_q{}^s\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q{}^i}\right)$$

в силу равенства

$$0 = \frac{\partial\Lambda}{\partial x_q{}^p}(x_4{}^s\nabla_s x_q{}^p - x_q{}^s\nabla_s x_4{}^p) = \frac{\partial\Lambda}{\partial x_q{}^p}\left(\frac{\partial^2 x^p}{\partial\xi^q\partial\xi^4} - \frac{\partial^2 x^p}{\partial\xi^4\partial\xi^q}\right)$$

---

[1] Эти уравнения получены приравниванием нулю в объемном интеграле коэффициентов при $\partial x^i = \delta x^i$, $\partial\mu^A$ и δS с учетом равенств

$$\delta\Lambda = \partial\Lambda + \delta x^i\nabla_i\Lambda, \qquad \delta\mu^A = \partial\mu^A + \delta x^i\nabla_i\mu^A, \qquad \delta d\tau = \nabla_i\delta x^i d\tau$$

Уравнение (15) представляет собой уравнение для продукции энтропии в частице, так как по принятому условию координата ξ^4 играет роль времени. Для получения производных по собственному времени $d\tau = (g_{\hat{4}\hat{4}})^{1/2} d\xi^4$ достаточно умножить обе части соотношения (15) на $(g_{\hat{4}\hat{4}})^{-1/2}$.

Уравнения Эйлера содержат в себе уравнения импульсов и энергии и в зависимости от смысла параметров μ^A уравнения Эйлера могут содержать в себе уравнения Максвелла, уравнения химической кинетики, различные другие виды уравнений для искомых параметров μ^A — характеристик внутренних степеней свободы. Можно показать [2], что все существующие макроскопические модели сплошных сред, в том числе и модели пластических сред, можно получить из базисного уравнения (9).

Уравнения Эйлера представляют собой, вообще говоря, уравнения с частными производными, порядок которых связан с порядком производных, входящих в аргументы функции Лагранжа Λ, в общем случае этот порядок может быть довольно высоким.

Если $\Lambda d\tau$ и δW^* —четырехмерные скаляры, определенные формулами (10) и (11), то после варьирования первого интеграла и соответствующего интегрирования по частям из основного уравнения (9) следует формула:

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma_3+S_\pm} \Big[\sum_{p=0} (\mathrm{P}_i^{kj_1\ldots j_p} + Q_i^{kj_1\ldots j_p}) \nabla_{j_1}\ldots\nabla_{j_p}\delta x^i + \tag{16}$$

$$+ \sum_{q=0} (N_A^{kj_1\ldots j_q} + M_A^{kj_1\ldots j_q}) \nabla_{j_1}\ldots\nabla_{j_q}\delta\mu^A\Big] n_k d\sigma + \int\limits_{\Sigma_3+S_\pm} \nabla_s \Omega^{sk} n_k d\sigma$$

Здесь $\mathrm{P}_i^{kj_1\ldots j_p}$ и $N_A^{kj_1\ldots j_q}$ — некоторые величины (компоненты тензоров), выражающиеся через Λ и через производные от x^i и μ^A эти величины получаются при преобразовании вариации

$$\delta\int\limits_{V_4} \Lambda d\tau$$

путем интегрирования по частям. Техника этих преобразований вообще не дает однозначного определения компонент $P_i^{kj_1\ldots j_p}$ и $N_A^{kj_1\ldots j_q}$, это связано с возможностью приписать слева в (16) последний интеграл, который тождественно равен нулю, когда Ω^{sk} будет произвольным антисимметричным тензором с непрерывными компонентами, имеющими непрерывные производные первого и второго порядков в точках объема ограниченного поверхностью $\Sigma_3 + S_\pm$.

Это утверждение очевидно на основании теоремы Гаусса — Остроградского, так как из равенства $\Omega^{sk} = -\Omega^{sk}$ следует, что $\nabla_s\nabla_k\Omega^{sk} = 0$.

В качестве компонент Ω^{sk} можно взять любые линейные формы того же вида, что и в первых членах подынтегральных выражений в формуле (16). Очевидно, что формулы, дающие выражение компонент тензоров

$$\mathrm{P}_i^{kj_1\ldots j_p} + Q_i^{kj_1\ldots j_p}, \qquad N_A^{kj_1\ldots j_q} + M_A^{kj_1\ldots j_q}$$

через параметры, характеризующие движение и состояние частиц, неопределены однозначно ввиду произвола в выборе Ω^{sk}.

В связи с этим возникает проблема о неоднозначности понятия тензора — энергии импульса и проблема о произволе для заданных уравнений Эйлера, уравнений состояния вообще, и, в частности, фундаментального понятия о внутренних напряжениях.

Зависимость указанных компонент тензоров в формуле (16) от определяющих параметров можно рассматривать и истолковывать как уравнения состояния физической среды. Это — уравнения, обобщающие закон Гука.

Таким образом, для фиксированной системы уравнений Эйлера появляется произвол в определении уравнений состояния. Более детальный анализ показывает, что дополнительные краевые и начальные условия на сильных разрывах, выражающие собой физические взаимодействия на границе тела или внутри тела на скачках, не могут служить основой для исключения указанной неоднозначности в уравнениях состояния.

При фиксированной системе уравнений Эйлера можно изменять плотность лагранжиана Λ добавлением дивергентного члена, нетрудно видеть, что это также повлечет за собой изменение уравнений состояния. Однако полное фиксирование лагранжиана можно включать в физическое определение модели сплошной среды. Фиксирование системы уравнений Эйлера не дает полной и нужной информации о конкретной модели среды.

Естественно, что напряжения определяются однозначно, когда уравнения состояния установлены. Но весь смысл обсуждаемой неоднозначности связан с тем, что все законы движения и законы процессов изменения параметров μ^A в конкретных задачах сохраняются при некоторых различных видах уравнений состояния.

Необходимо отметить и подчеркнуть, что вскрытая выше неоднозначность не связана со спецификой метода установления уравнений состояния с помощью вариационного принципа (9). Такое же положение дел возникает при использовании общего термодинамического уравнения притока тепла в дифференциальной форме [14].

Смысл этой неоднозначности можно понять и разъяснить при помощи следующих общих физических соображений.

Хорошо известно, что при движении абсолютно твердых тел решение задачи о внутренних напряжениях в твердом теле не имеет определенного ответа. В твердом теле всегда можно представить себе приложенную любую систему внутренних сил, эквивалентную нулю, наличие или отсутствие которой нельзя обнаружить. Присутствие такой системы сил не имеет никакого значения.

Легко убедиться, что и для любых деформируемых тел, аналогично тому как и для абсолютно твердых тел, можно указать много различных систем напряжений, которые не влияют на законы движения и поэтому наличие или отсутствие таких напряжений нельзя обнаружить. Для различных систем внутренних напряжений уравнения движения и добавочные условия одинаковы, но уравнения состояния различны.

Очевидно, что вопрос о такой многозначности не возникает, когда заранее приняты уравнения состояния. Однако в проблемах конструирования новых моделей, когда устанавливается система уравнений состояний, вопрос о возможности разного выбора уравнений состояний возникает по существу решаемой задачи. Этот вопрос может приобретать существенное значение, когда плотность лагранжиана зависит от последовательности градиентов, определяющих характеристик.

Для того чтобы продемонстрировать на примере справедливость указанного предложения, рассмотрим уравнения теории упругости, для которых уравнения состояния представлены формулами

$$p^{ij} = \rho(\partial u/\partial \varepsilon_{ij}) \tag{17}$$

Вместо уравнения состояния (17) возьмем другие уравнения состояния в виде

$$p^{*ij} = p^{ij} + \tilde{p}^{ij}, \qquad \tilde{p}^{ij} = \nabla_s \nabla_k N^{iksj} \quad (N^{iksj} = -N^{ikjs}) \tag{18}$$

причем величины N^{iksj} антисимметричны, как указано, по s, j, т. е. представляют собой компоненты тензора, зависящего для всех задач одинаково, но произвольно заданным образом от любых параметров состояния и любых их производных [1].

---

[1] В теории упругости в задачах о равновесии при отсутствии внешних массовых сил решение задач для напряжений также можно представить в виде (18), но при наличии закона Гука, или другого конкретного уравнения состояния, величины N^{iksj} будут функциями координат и не будут универсальными функциями (одинаковыми для всех задач) от характеристик деформаций.

Легко убедиться, что все законы движения и деформаций будут определяться независимо от $\widetilde{p}^{ij}$, так как добавочные напряжения $\widetilde{p}^{ij}$ удовлетворяют тождественно уравнениям равновесия

$$\nabla_j \widetilde{p}^{ij} = 0$$

и, кроме этого, для любого объема V, ограниченного замкнутой поверхностью Σ, имеем

$$\int_V \nabla_i \widetilde{p}^{ij} \delta x_i d\tau = \int_\Sigma (\widetilde{p}^{ij} \delta x_i + \nabla_k N^{iksj} \nabla_s \delta x_i) n_j d\sigma = \int_\Sigma \nabla_s (\nabla_k N^{iksj} \delta x_i) n_j d\sigma = 0$$

причем входящие в граничные условия нормальные составляющие градиента ∇_s, от подынтегральной функции в поверхностном интеграле обращаются в нуль в каждой точке поверхности Σ тождественно. Отсюда следует, что добавочные напряжения $\widetilde{p}^{ij}$ не дают вклада в потоки энергии взаимодействий (при произвольных возможных перемещениях δx_i) между соседними частицами на любой поверхности Σ и, следовательно, с внешними телами на границе тела Σ_0.

Вариационное уравнение (9) позволяет глубже уяснить существо понятий об уравнениях состояния, о граничных и начальных условиях и об условиях на сильных разрывах, которые не следуют из дифференциальных уравнений без дополнительных допущений. Оказывается, что все только что перечисленные условия и уравнения тесно связаны между собой и должны рассматриваться в едином комплексе.

Последующие выводы связаны с таким преобразованием формулы (16) для δW, чтобы подынтегральное выражение содержало только вариации δx^i и $\delta\mu^A$ и независимые на $\Sigma + S_\pm$ ковариантные производные по нормали $\nabla_n^{(\alpha)}\delta x^i$ и $\nabla_n^{(\beta)}\delta\mu^A$; $\alpha, \beta = 1,2,\ldots$ Дело в том, что вариации δx^i и $\nabla_j \delta x^i$, а также не все высшие градиенты $\nabla_{j_1},\ldots,\nabla_{j_p}\delta x^i$ на $\Sigma + S_\pm$ можно рассматривать как независимые.

В простейших частных случаях соответствующие преобразования формулы (16) для получения граничных условий были произведены Миндлиным [1] [17]. Соответствующие частные преобразования для получения условий на скачках были сделаны М. В. Лурье [18].

Предположим, что поверхность $\Sigma_3 + S_\pm$ гладкая, для этого достаточно гладкости поверхности S (так как объем V_4 и выбираемая поверхность Σ_3 произвольны). Указанные преобразования приводят к формуле

$$\delta W = \int_{\Sigma + S_\pm} (\mathscr{P}_{i0}\delta x^i + \mathscr{P}_{i1}\nabla_n \delta x^i + \ldots + \mathscr{P}_{i(r-1)}\nabla_n^{(r-1)}\delta x^i +$$
$$+ \mathscr{M}_{A0}\delta\mu^A + \mathscr{M}_{A1}\nabla_n\delta\mu^A + \ldots + \mathscr{M}_{A(s-1)}\nabla_n^{(s-1)}\delta\mu^A)\, d\sigma \qquad (19)$$

В формуле (19) компоненты векторов $\mathscr{P}_{i0}, \mathscr{P}_{i1},\ldots, \mathscr{P}_{i(r-1)}$ и компоненты тензоров $\mathscr{M}_{A0},\ldots,\mathscr{M}_{A(s-1)}$ определены однозначно и выражаются через $P_i^{kj_1,\ldots,j_\nu} + Q_i^{kj_1,\ldots,j_\nu}$ и $N_A^{kj_1,\ldots,j_\nu} + \mathrm{M}_A^{kj_1,\ldots,j_\nu}$, которые не определяются однозначно.

Существенной особенностью векторов $\mathscr{P}_\alpha$ и тензоров $\mathscr{M}_{A\beta}$, определенных в точках элементов $d\sigma$ на граничной поверхности $\Sigma_3 + S_\pm$, будет их зависимость не только от ориентации этих элементов, как это имеет место для обычных напряжений, но и от кривизны этих элементов и от других более тонких дифференциальных геометрических свойств рассматриваемых элементов [2].

Истинными характеристиками сплошной среды будут именно векторы $\mathscr{P}_\alpha$ и тензоры $\mathscr{M}_\beta$, они зависят от геометрических особенностей площадок, по которым происходит взаимодействие и от определяющих параметров через функцию Лагранжа Λ и через $Q_i^{kj_1,\ldots,j_\nu}$ и $\mathrm{M}_A^{kj_1,\ldots,j_\nu}$, входящих в выражение для δW^*. Очевидно, что в формуле

[1] Общее преобразование в четырехмерном пространстве — времени при любом конечном порядке градиентов вариаций было произведено В. Желноровичем.

[2] Переход от формулы (16) к формуле (19) легко получить при отсутствии ребер или конических точек на $\Sigma + S_\pm$; при наличии таких особенностей формула (19) также верна, но в этом случае значение интеграла (19) необходимо рассматривать как предел вдоль гладкой поверхности $\Sigma + S_\pm$, стремящийся к поверхности с ребрами. Из-за

(11) для δW^* существенны только комбинации, составленные из $Q_i^{kj_1,\ldots,j_\nu}$ и $M_A^{kj_1,\ldots,j_\nu}$, входящие в определение $\mathscr{P}_{i\alpha}$ и $\mathscr{M}_{A\beta}$.

Если на части границы Σ_0 величина δW задана, то на основании формулы (19), произвола δx^i, $\delta\mu^A$ и их нормальных градиентов на Σ_0, получим следующие условия в точках A на рассматриваемой части Σ_0

$$\mathscr{P}_{i\alpha} = f_{i\alpha}(A), \qquad \mathscr{M}_{A\beta} = g_{A\beta}(A) \tag{20}$$

$$(i = 1,2,3,4;\ A = 1,2,\ldots,N;\ \alpha = 0,1,2,\ldots,r-1;\ \beta = 0,1,2,\ldots,s-1)$$

где $f_{i\alpha}(A)$ и $g_{A\beta}(A)$, вообще говоря, заданные функции в точках A.

На пространственной трехмерной части границы Σ_0, соответствующей $t_0 = \mathrm{const}$, равенства (20) представляют собой начальные условия в трехмерном объеме, занятом телом.

Условия (20) на трехмерной части Σ, образованной двумерной границей тела Σ_2 и одновременно изменяющимся временем t, можно рассматривать как краевые условия на границах переменного трехмерного объема, занятого данным телом. Равенства (20) на текущей границе $t = \mathrm{const} > t_0$ можно рассматривать, вообще говоря, просто как соотношения, определяющие правые части на основании законов движения, которые выделяются начальными и краевыми условиями.

Напишем теперь условия на трехмерной поверхности сильного разрыва S, расположенной внутри четырехмерного объема V_4 сплошной среды. Примем, что на основании предварительных исследований и соответствующих гипотез все внешние воздействия на среду, распределенные по S, включены в δW^* (например, изменение «аддитивной» постоянной u_0, и в частности тепловыделение при химических реакциях на фронте горения или детонации, или поглощение энергии на различного рода разрывах сплошности вдоль S, иногда можно рассматривать как внешние воздействия. Эти же эффекты можно трактовать как внутренние процессы за счет усложнения и изменения плотности лагранжиана Λ, и в частности, путем выделения вариации соответствующего добавочного поверхностного интеграла по поверхности разрыва S).

Полагая, что вариации δx^i и $\delta\mu^A$ и все их производные, входящие в δW, равны нулю на Σ, на поверхности скачка S, получим

$$\begin{aligned} 0 = \delta W = \int\limits_S [(\mathscr{P}_{i0}\delta x^i)_+ + (\mathscr{P}_{i0}\delta x^i)_- + \ldots + (\mathscr{P}_{i(r-1)}\nabla_n^{(r-1)}\delta x^i)_+ + \\ + (\mathscr{P}_{i(r-1)}\nabla_n^{(r-1)}\delta x^i)_- + (\mathscr{M}_{A0}\delta\mu^A)_+ + (\mathscr{M}_{A0}\delta\mu^A)_- + \ldots + (\mathscr{M}_{A(s-1)}\nabla_n^{(s-1)}\delta\mu^A)_+ + \\ + (\mathscr{M}_{A(s-1)}\nabla_n^{(s-1)}\delta\mu^A)]_- d\sigma \end{aligned} \tag{21}$$

В формуле (21) у всех величин, зависящих от направления нормали на S, дальше будем применять одно и то же направление нормали.

На основании определений $\mathscr{P}_{i\alpha}$ и $\mathscr{M}_{A\beta}$ и оператора $\nabla_n{}^k$ имеем

$$\mathscr{P}_{i\alpha}(n) = \mp\mathscr{P}_{i\alpha}(-n), \qquad \mathscr{M}_{A\beta}(n) = \mp\mathscr{M}_{A\beta}(-n), \qquad \nabla_n^{k-1} = \mp\nabla_{(-n)}^{k-1} \tag{22}$$

причем знак минус соответствует четным α, β и k, а знак плюс — нечетным.

наличия особенностей и разрывов у подынтегральной функции в (19), зависящей от вектора $\mathbf{n}$ и его касательных производных, при переходе к пределу к трехмерной поверхности $\Sigma + S_\pm$ с двумерными ребрами возникают добавочные интегралы, взятые по двумерной поверхности ребер. Эти интегралы можно выписать, применяя интеграл (16), не имеющий особенностей на ребрах сразу к поверхности с ребрами, затем надо произвести преобразование к формуле (19); при этом преобразовании второй интеграл от дивергентного члена, обращающийся в нуль для гладкой поверхности $\Sigma + S_\pm$, для поверхности с ребрами даст легко вычисляемый интеграл по ребрам, отличный от нуля.

Как было указано, основное условие о классе допустимых функций состоит в предположении, что искомое решение и сравниваемые функции в объеме V_4 кусочно непрерывны вместе со всеми своими частными производными, присутствующими в основном вариационном уравнении (9). Основной смысл введения поверхности сильного разрыва S внутри объема V_4 состоит в том, что при мысленном пересечении поверхности S искомые решения и соответственно варьированные допустимые функции терпят разрывы [1]. Эти разрывы могут иметь различный характер, который в частности, может быть связан с порядком и видом производных или самих функций, терпящих разрыв на S. Например, можно рассматривать сильные разрывы типа трещин, в которых сами искомые функции вместе с любыми частными производными разрывны, или разрывы типа дислокаций, в которых малые перемещения, нормальные к поверхности S, непрерывны, но перемещения в касательной плоскости к S при переходе с одной стороны S_+ на другую S_- разрывны, или разрывы типа ударных волн в классической газовой динамике, когда все координаты x^i (перемещения) на S непрерывны, но могут терпеть разрыв производные $\partial x^i/d\xi^j$.

При наличии в числе аргументов функции Λ производных высшего порядка

$$\frac{\partial^k x^i}{\partial\xi^{j_1}\ldots\partial\xi^{j_k}}$$

возникает большее число различных видов возможных сильных разрывов.

В газовой динамике и в простейших теориях механики твердых тел при постановке и решении конкретных задач возможны различные случаи: когда тип поверхностного разрыва задается или когда тип разрыва определяется в процессе решения.

В соответствии с этим при применении вариационных уравнений также необходимо вводить или находить классы функций, среди которых должно существовать искомое решение [2]. В частности, если принять, что класс допустимых функций определяется следующими условиями в точках поверхности S:

$$(\nabla_n{}^\alpha\delta x^i)_+ = (\nabla_n{}^\alpha\delta x^i)_- \qquad (i=1,2,3,4;\ \alpha=0,1,\ldots,r_1-1;\ \ r_1\leqslant r) \tag{23}$$

причем $(\nabla^\alpha{}_n\delta x^i)_+$, $(\nabla^\alpha{}_n\delta x^i)_-$ произвольны и независимы при $\alpha = r_1,\ r_1+1,\ldots r-1$

$$(\nabla_n{}^\beta\delta\mu^A)_+ = (\nabla_n{}^\beta\delta\mu^A)_- \qquad (A=1,2,\ldots,N,\quad \beta=0,1,\ldots,s_1-1,\ s_1\leqslant s)$$

а $(\nabla_n{}^\beta\,\delta\mu^A)_+$, $(\nabla_n^\beta\delta\mu^A)_-$ произвольны и независимы при $\beta = s_1,\ \ldots s-1$, то это определит при переходе через поверхность S класс допустимых функций $x^j(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ непрерывных вместе со своими $r_1 - 1$ частными производными и функции $\mu^A(x^1, x^2, x^3, x^4)$ непрерывные вместе со своими s_1-1 частными производными, причем нормальные к S производные от этих функций более высокого порядка могут иметь произвольный разрыв. В добавление к условиям (23) здесь предполагается, что все величины, входящие в уравнение (9), на каждой стороне поверхности S непрерывны при движении вдоль поверхности S. Из произвольности и независимости величин $\nabla_n{}^\alpha\delta x^j$ и $\nabla^\beta{}_n\,\delta\mu^A$ на основании (22) и (23) из (21) получим следующие условия на поверхности скачка

$$(\mathscr{P}_{i\alpha})_+ = (\mathscr{P}_{i\alpha})_-, \qquad (\mathscr{M}_{A\beta})_+ = (\mathscr{M}_{A\beta})_-$$

при $\alpha = 0,1,\ldots r_1 - 1,\qquad \beta = 0,1\ \ldots s_1 - 1$

$$(\mathscr{P}_{i\alpha})_+ = (\mathscr{P}_{i\alpha})_- = 0, \qquad (\mathscr{M}_{A\beta})_+ = (\mathscr{M}_{A\beta})_- = 0 \tag{24}$$

при $\alpha = r_1,\ r_1+1,\ldots r-1,\qquad \beta = s_1,\ s_1+1,\ldots s-1$

---

[1] В общем случае величины разрывов искомых функции также являются искомыми. Однако, можно рассматривать задачи, в которых некоторые разрывы искомых величин фиксированы в дополнительных условиях задачи.

[2] Такого рода допущения аналогичны весьма общим допущениям о непрерывности и дифференцируемости различных функций в механике сплошной среды.

Условия (24) можно рассматривать как условия о непрерывности (сохраняемости при пересечении скачка S мировыми линиями частиц) величин $\mathcal{P}_{i\alpha}$ и $\mathcal{M}_{A\beta}$ на скачке S. Это свойство величин $\mathcal{P}_{i\alpha}$ и $\mathcal{M}_{A\beta}$ представляет собой их важную физическую характеристику.

При более подробном изучении задач с разрывными решениями и в частности задач, связанных с изменяющимися границами поверхности скачка S (например, при распространении по частицам внутри среды изолированных дислокаций, при росте трещин и в других случаях) можно обобщить основное вариационное уравнение (9) и ввести еще добавочное варьирование поверхности S или ее краев по лагранжевым координатам ξ^i.

В связи с этим для получения дополнительных соотношений, отвечающих такого рода усложненным разрывным явлениям в действительных телах, необходимо, вообще говоря, усложнять варьируемые функционалы, в основном вариационном уравнении (9) за счет введения добавочных членов в δW^* или $\delta\int \Lambda d\tau$, содержащих соответствующие вариации лагранжевых координат. Это обуславливается необходимостью учитывать особые энергетические эффекты, связанные с образованием или возможным распространением по частицам среды разрывов различной природы. Эти вопросы будут рассмотрены подробно в другой работе.

Поступила 6 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Усп. матем. н., 1965, т. 20, вып. 5.
2. Бердичевский В. Л., Седов Л. И. Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
3. Седов Л. И. О пондермоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1, стр. 4—17.
4. Голубятников А. Н. Сплошная среда со спинорными и векторными характеристиками. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 2.
5. Желнорович В. А. Спинор как инвариантный объект. ПММ, 1966, № 6.
6. Желнорович В. А. Модели сред с внутренними механическими и электромагнитными моментами. Сб. статей, посвященный юбилею Л. И. Седова. М., «Наука», 1968.
7. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6, стр. 1331—1333.
8. Бердичевский В. Л. Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
9. Седов Л. И. О тензоре энергии — импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и в материальных средах. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 3.
10. Sedov L. I. Variational methods of constructing models of continuous media. Symposia, Vienna, June 22—28, 1966. Irreversible aspects of continuum mechanics, Springer — Verlag, 1968.
11. Голубятников А. Н. Нелинейные спинорные функции. Докл. АН СССР, 1965, т. 165, № 2.
12. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, стр. 393—417.
13. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
14. Sedov L. I. Some problems of designing new models of continuum media. Proc. 11-th Internat. congr. of appl. mech., Munich, 1964, Springer — Verlag, 1966, p. 9—19.
15. Седов Л. И. Механика сплошной среды, части I, II, III и IV. Ротаторное издание МГУ. 1966—1968.
16. Седов Л. И., Эглит М. Э. Построение неголономных моделей сплошных сред с учетом конечности деформаций и некоторых физико-химических эффектов. Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 1, стр. 54—57.
17. Mindlin R. D. Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. Internat. J. Solids Structures, 1965, vol. 1, No 4, p. 417—438.
18. Лурье М. В. Применение вариационного принципа для исследования разрывов в сплошной среде. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.