О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

В. Н. Рубановский (Москва)

Рассматривается задача о движении тяжелого твердого тела с внутренними циклическими движениями в простирающейся беспредельно тяжелой идеальной жидкости при условиях, что вес тела и выталкивающая архимедова сила образуют пару, а импульсивная сила вертикальна (условия Чаплыгина [1]).

Указаны три новых частных случая интегрируемости уравнений движения рассматриваемой механической системы [1-5], для которых эти уравнения допускают систему трех линейных частных интегралов. Показано, что все эти частные решения выражаются в эллиптических функциях времени, а вращательная часть движений твердого тела в жидкости, описываемых этими частными решениями, аналогична движению уравновешенного гиростата [6].

Для второго и третьего общих случаев Клебша интегрируемости уравнений Кирхгофа — Клебша [2,3] классической задачи о движении по инерции в беспредельной по всем направлениям идеальной жидкости твердого тела, ограниченного односвязной поверхностью, указаны такие алгебраические интегралы, содержащие две произвольные постоянные, из которых сразу следует весь «комплект» четырех первых интегралов, необходимых для сведения задачи к квадратурам.

Ляпунов отметил [7], что третий интегрируемый случай Клебша можно рассматривать как некоторый предельный его второго случая. Для этих случаев Клебша четвертые первые интегралы представлены в одной форме.

Для классических случаев Стеклова и Ляпунова приведение четвертых интегралов к одной форме было проведено Г. В. Колосовым [8] и П. В. Харламовым [9, 10].

1. Рассматривается задача о движении в беспредельной идеальной однородной несжимаемой тяжелой жидкости тяжелого твердого тела, ограниченного односвязной поверхностью и имеющего многосвязные полости, целиком заполненные совершающей безвихревое движение идеальной жидкостью, при условиях Чаплыгина [1], т. е. когда вес тела вместе с жидкостью в его полостях и выталкивающая архимедова сила образуют пару. Предполагается, что движение беспредельной жидкости, порожденное движением в ней тела, будет безвихревым и что эта жидкость покоится на бесконечности.

Кинетическая энергия T такой динамической системы с точностью до постоянной, определяемой циклическим движением жидкости в полостях тела, записывается в виде [3]

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(a_{ij}P_iP_j+b_{ij}R_iR_j+2c_{ij}P_iR_j),\qquad a_{ij}=a_{ji},\qquad b_{ij}=b_{ji}$$

где a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} — определенные для данной системы постоянные, а R_1, R_2, R_3 и P_1, P_2, P_3 — проекции на оси неизменно связанной с телом прямоугольной системы осей координат $ox_1x_2x_3$ импульсивной силы $\mathbf{R}$ и импульсивной пары $\mathbf{P}$ системы без учета циклического движения жидкости в полостях тела.

Обозначив через U_1, U_2, U_3 и ω_1, ω_2, ω_3 проекции на подвижные оси поступательной и мгновенной угловой скорости тела, будем иметь для них выражения [3]

$$U_i=\frac{\partial T}{\partial R_i},\qquad \omega_i=\frac{\partial T}{\partial P_i}\qquad (i=1,2,3)$$

Предположив, что импульсивная сила направлена по линии действия силы тяжести, будем иметь следующие уравнения движения тяжелого твердого тела в жидкости при условиях Чаплыгина [1-5]

$$\frac{dR_1}{dt}+\omega_2R_3-\omega_3R_2=0 \qquad (123)$$

$$\frac{dP_1}{dt}+\omega_2(P_3+g_3)-\omega_3(P_2+g_2)+U_2R_3-U_3R_2=r_2R_3-r_3R_2 \qquad (123) \qquad (1.1)$$

Здесь $g = (g_1, g_2, g_3)$ — вектор кинетического момента относительно начала подвижных осей циклического движения жидкости в полостях тела, а $r = (r_1, r_2, r_3)$ — вектор, пропорциональный радиусу-вектору, проведенному из центра тяжести объема, ограниченного поверхностью тела, соприкасающейся с беспредельной жидкостью, в центр тяжести тела и находящейся в его полостях жидкости.

Не изменяя уравнений движения рассматриваемой системы, можно, как установил Жуковский [6], вместо циркулирующей в полостях тела жидкости поместить в теле вращающиеся маховики с установившимися относительными движениями. Уравнениями такого же типа описывается также движение по инерции в беспредельной жидкости твердого тела, ограниченного многосвязной поверхностью (П. В. Харламов [5]).

Уравнения (1.1) допускают три первых интеграла [2-5]

$$T - r_1R_1 - r_2R_2 - r_3R_3 = \mathrm{const}, \quad R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = \mathrm{const} \tag{1.2}$$
$$(P_1 + g_1)R_1 + (P_2 + g_2)R_2 + (P_3 + g_3)R_3 = \mathrm{const}$$

2. Рассмотрим частные случаи интегрируемости уравнений (1.1), для которых эти уравнения допускают систему трех линейных частных интегралов

$$\sum_{j=1}^{3} (\alpha_{ij}P_j + \beta_{ij}R_j) = s_i \quad (i = 1, 2, 3), \qquad \alpha_{ij}, \ \beta_{ij}, \ s_i = \mathrm{const} \tag{2.1}$$

Система интегралов (2.1) при соответствующем выборе осей координат может быть представлена в виде [11]

$$P_i + k_iR_i = s_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

постоянные k_i, s_i подлежат определению.

П. В. Харламовым [10] получены следующие условия существования системы интегралов (2.2) уравнений (1.1):

$$b_{12} - c_{12}k_1 \pm (c_{21} - a_{21}k_1)(k_3 - k_1) = 0, \qquad b_{12} - c_{21}k_2 \pm (c_{12} - a_{12}k_2)(k_2 - k_3) = 0 \quad (123) \tag{2.3}$$

$$b_{11} - b_{22} + (c_{33} - c_{11})k_1 + (c_{22} - c_{33})k_2 + a_3k_3(k_2 - k_1) = 0 \quad (123) \tag{2.4}$$

$$a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3 = \varkappa(s_1 + g_1) \quad (123) \tag{2.5}$$

$$(c_{23} - a_{23}k_3)(s_1 + g_1) - (c_{13} - a_{13}k_3)(s_2 + g_2) = 0 \quad (123) \tag{2.6}$$

$$r_1 + \varkappa(k_2 - k_3)(s_1 + g_1) + (c_{22} - a_{22}k_2)(s_1 + g_1) - (c_{12} - a_{12}k_2)(s_2 + g_2) = c_{11}s_1 + $$
$$+ c_{21}s_2 + c_{31}s_3 \quad (123) \tag{2.7}$$

$$r_1 - \varkappa(k_2 - k_3)(s_1 + g_1) + (c_{33} - a_{33}k_3)(s_1 + g_1) - (c_{13} - a_{13}k_3)(s_3 + g_3) = c_{11}s_1 + $$
$$+ c_{21}s_2 + c_{31}s_3 \quad (123)$$

Здесь $\varkappa$ — некоторый параметр.

Соотношения (2.3)—(2.7) представляют собой условия механической осуществимости рассматриваемого рода движений твердого тела в жидкости. Если этим условиям можно удовлетворить некоторыми вещественными значениями постоянных k_i, s_i ($i = 1,2,3$), указанные движения возможны; в противном случае таких движений быть не может.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда

$$(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)(k_3 - k_1) \neq 0 \tag{2.8}$$

Тогда условия (2.3) приведут к соотношениям

$$c_{12} = a_{12}k_2, \quad c_{21} = a_{21}k_1, \quad b_{12} = a_{12}k_1k_2 \quad (123) \tag{2.9}$$

При этом условия (2.6) будут удовлетворены, а выражение для удвоенной кинетической энергии системы примет вид

$$2T = \sum_{(123)} [a_{11}P_1^2 + 2a_{12}P_1P_2 + 2c_{11}P_1R_1 + 2a_{12}(k_1R_1P_2 + k_2R_2P_1) + b_{11}R_1^2 + 2a_{12}k_1k_2R_1R_2] \tag{2.10}$$

Здесь и далее символ суммирования с индексом (123) означает, что невыписанные члены получаются из указанных при помощи циклической перестановки индексов, отмеченных под знаком суммы.

Далее, разрешая уравнения (2.5) относительно s_1, s_2, s_3, найдем

$$s_1 = \varkappa\Delta^{-1} \{[(a_{22} - \varkappa)(a_{33} - \varkappa) - a_{23}^2] g_1 + [a_{23}a_{31} - a_{12}(a_{33} - \varkappa)] g_2 + \\ + [a_{12}a_{23} - a_{31}(a_{22} - \varkappa)] g_3\} \quad (123) \qquad (2.11)$$

$$\Delta = (a_{11} - \varkappa)(a_{22} - \varkappa)(a_{33} - \varkappa) - a_{23}^2(a_{11} - \varkappa) - a_{31}^2(a_{22} - \varkappa) - a_{12}^2(a_{33} - \varkappa)$$

3. Пусть выполняется условие

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = c \qquad (3.1)$$

Тогда из уравнений (2.4) получим условия

$$\frac{b_{22} - b_{33}}{a_{11}} + \frac{b_{33} - b_{11}}{a_{22}} + \frac{b_{11} - b_{22}}{a_{33}} = 0$$

$$(a_{22} - a_{33}) k_2k_3 + (a_{33} - a_{11}) k_3k_1 + (a_{11} - a_{22}) k_1k_2 = 0$$

из которых следует:

$$b_{11} = b + \tau a_{22}a_{33}, \qquad k_2k_3 = \sigma + \tau a_{11} \quad (123) \qquad (3.2)$$

где b, τ и σ суть произвольные параметры. Вторая группа соотношений (3.2) приводит к равенствам

$$k_1 = \varepsilon \frac{\sqrt{(\sigma + \tau a_{22})(\sigma + \tau a_{33})}}{\sqrt{\sigma + \tau a_{11}}} \qquad (\varepsilon = \pm 1) \quad (123) \qquad (3.3)$$

Почленно вычитая и складывая уравнения (2.7) и учитывая при этом соотношения (2.8), (2.9), (3.1) и (3.2), найдем

$$\varkappa = -\sigma / 2\tau$$

$$r_1 = \frac{1}{2\tau}[2k_1k_2k_3 - \sigma(k_1 + k_2 + k_3)](s_1 + g_1) - \frac{1}{\tau}k_1k_2k_3s_1 + \frac{\sigma}{\tau}k_1s_1 - cg_1 \quad (123) \qquad (3.4)$$

Итак, если удвоенная кинетическая энергия системы выражается по формуле (2.10), причем имеют место равенства (3.1)—(3.3), а величины r_1, r_2, r_3 — по формулам (3.4), то уравнения (1.1) движения такого тела в жидкости допускают систему линейных частных интегралов (2.2), в которых постоянные s_1, s_2, s_3 определяются по формулам (2.11) при $\varkappa = -\sigma / 2\tau$; при этом задача приводится к эллиптическим функциям времени (см. п. 6).

В частности, при $a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0$, $g_1 = g_2 = g_3 = 0$, $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ имеет место случай Стеклова [12].

4. Если наряду с условиями (3.1) имеем еще

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a \qquad (4.1)$$

то из уравнений (2.4) получим условие

$$(b_{22} - b_{33}) k_2k_3 + (b_{33} - b_{11}) k_3k_1 + (b_{11} - b_{22}) k_1k_2 = 0$$

и, следовательно,

$$k_2k_3 = \tau b_{11} + \sigma / a \quad (123)$$

Подставляя эти равенства в (2.4), придем к условию $a\tau = -1$, и тогда

$$ak_2k_3 = \sigma - b_{11} \quad (123) \qquad (4.2)$$

Отсюда легко находим

$$k_1 = \varepsilon \frac{\sqrt{(\sigma - b_{22})(\sigma - b_{33})}}{\sqrt{a(\sigma - b_{11})}} \qquad (\varepsilon = \pm 1) \quad (123) \qquad (4.3)$$

Уравнения (2.7) с учетом (2.8), (2.9), (3.1), (4.1) и (4.2) приводят к равенству $\varkappa = {}^1/_2a$ и следующим выражениям для величин r_1, r_2, r_3:

$$2r_1 = a(k_2 + k_3 - k_1)(s_1 + g_1) + (c - ak_1) g_1 \quad (123) \qquad (4.4)$$

Таким образом, если удвоенная кинетическая энергия системы выражается по формуле (2.10), причем имеют место равенства (3.1), (4.1) и (4.3), а величины r_1, r_2, r_3 — по формулам (4.4), то уравнение (1.1) движения такого тела в жидкости допускают систему линейных частных интегралов (2.2), в которых постоянные s_1, s_2, s_3 определяются по формулам (2.11) при $\varkappa = {}^1/_2 a$; при этом задача приводится к эллиптическим функциям времени.

5. Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения. Если удвоенная кинетическая энергия системы имеет вид (2.10) и

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a, \qquad b_{11} = b_{22} = b_{33} = b, \qquad k_1 = \frac{2}{3a}(c_{22} + c_{33} - 2c_{11}) \qquad (123)$$

а для величин r_1, r_2, r_3 имеют место выражения

$$3r_1 = (c_{22} + c_{33} - 2c_{11})\, s_1 - (c_{11} + c_{22} + c_{33})\, g_1 \qquad (123)$$

в которых постоянные s_1, s_2, s_3 определяются по формулам (2.11) при $\varkappa = a \,/\, 4$, то уравнения (1.1) движения такого тела в жидкости допускают систему линейных частных интегралов (2.2) и задача приводится к эллиптическим функциям времени.

В частности, при $a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0$, $g_1 = g_2 = g_3 = 0$ и $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ имеет место случай интегрируемости, установленный Стекловым [12].

6. Покажем, что указанные в пп. 3—5 частные случаи интегрируемости уравнений (1.1) приводятся к эллиптическим функциям времени и что вращательная часть движений тяжелого твердого тела в жидкости, описываемых этими частными решениями, аналогична движению уравновешенного гиростата.

Действительно, для всех этих частных решений удвоенная кинетическая энергия системы имеет вид (2.10), причем постоянные k_1, k_2, k_3 связаны с a_{ii}, b_{ii}, c_{ii} соотношениями (2.4). Вычисляя составляющие мгновенной угловой скорости тела и используя при этом интегралы (2.2) и соотношения (2.5), получим

$$\omega_1 = (c_{11} - a_{11}k_1) R_1 + \varkappa (s_1 + g_1) \quad (123)$$

Отсюда находим

$$R_1 = \frac{\omega_1}{c_{11} - a_{11}k_1} - \frac{\varkappa (s_1 + g_1)}{c_{11} - a_{11}k_1} \qquad (123) \qquad (6.1)$$

Подставляя эти выражения для R_1, R_2, R_3 в первую группу уравнений (1.1), для определения вращения тела получим уравнения

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (J_2 - J_3)\,\omega_2\omega_3 + m_2\omega_3 - m_3\omega_2 \qquad (123) \qquad (6.2)$$

$$J_1 = \frac{1}{c_{11} - a_{11}k_1} \quad (123), \qquad m_1 = -\frac{\varkappa (s_1 + g_1)}{c_{11} - a_{11}k_1} \quad (123)$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям движения уравновешенного гиростата [6] Различие между данными и только что упомянутыми уравнениями состоит в том, что для последних величины J_1, J_2, J_3 положительны, а в рассматриваемых некоторые из этих постоянных могут быть отрицательными.

Общий интеграл уравнений (6.2), как показал Вольтерра [13], выражается при помощи эллиптических функций времени. Следовательно, указанные в пп. 3—5 частные решения уравнений (1.1), в силу соотношений (2.2) и (6.1), выражаются при помощи эллиптических функций времени.

Жуковский [6] дал геометрическую интерпретацию движения уравновешенного гиростата. Стеклов [4] показал, что аналогичную картину движения имеют тела, вращательная часть движения которых описывается уравнениями вида (6.2), в которых некоторые из величин J_1, J_2, J_3 могут быть отрицательными.

7. Рассмотрим случай, когда внутренние циклические движения в теле отсутствуют, а тело движется в жидкости по инерции; тогда $g_1 = g_2 = g_3 = 0$, $r_1 = r_2 = r_3 = 0$. Ограничимся следующим выражением для удвоенной кинетической энергии системы:

$$2T = \sum_{(123)} (a_1 P_1^2 + b_1 R_1^2 + 2c_1 P_1 R_1)$$

Введем выражения

$$J_1 = P_1 + k_1 R_1 \quad (123)$$

в которых постоянные k_1, k_2, k_3 связаны с a_i, b_i, c_i ($i = 1,2,3$) соотношениями (2.4).

Нетрудно показать, что эти выражения удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dJ_1}{dt} = (a_3 - a_2) J_2 J_3 + [c_3 - c_2 + a_2 (k_3 - k_1) - a_3 k_3] R_3 J_2 + \\ + [c_3 - c_2 + a_3 (k_1 - k_2) + a_2 k_2] R_2 J_3 \quad (123)$$

Умножая эти уравнения соответственно на $k_2 k_3 J_1$, $k_3 k_1 J_2$, $k_1 k_2 J_3$ и почленно их складывая, получим уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (k_2 k_3 J_1^2 + k_3 k_1 J_2^2 + k_1 k_2 J_3^2) = \\ = [(a_3 - a_2) k_2 k_3 + (a_1 - a_3) k_3 k_1 + (a_2 - a_1) k_1 k_2] J_1 J_2 J_3 + \\ + \sum_{(123)} k_3 \{k_2 [c_3 - c_2 + a_2 (k_3 - k_1) - a_3 k_3] + k_1 [c_1 - c_3 + a_1 (k_2 - k_3) + a_3 k_3]\} R_3 J_1 J_2$$

из которого при выполнении условий

$$(a_3 - a_2) k_2 k_3 + (a_1 - a_3) k_3 k_1 + (a_2 - a_1) k_1 k_2 = 0 \tag{7.1}$$

$$k_3 \{k_2 [c_3 - c_2 + a_2 (k_3 - k_1) - a_3 k_3] + k_1 [c_1 - c_3 + a_1 (k_2 - k_3) + a_3 k_3]\} = 0 \quad (123) \tag{7.2}$$

следует интеграл

$$k_2 k_3 J_1^2 + k_3 k_1 J_2^2 + k_1 k_2 J_3^2 = \mathrm{const} \tag{7.3}$$

Используя соотношения (2.4), условия (7.2) можно представить в форме

$$(c_1 - c_2)(k_1 + k_2 - k_3) k_3 = 0 \quad (123) \tag{7.4}$$

8. Условиям (7.4) удовлетворим, положив

$$c_1 = c_2 = c_3 = c \tag{8.1}$$

Тогда (2.4) и (7.1) приведут к соотношениям (3.2) и (3.3). Интеграл (7.3) примет вид

$$\sum_{(123)} (\sigma + \tau a_1) \left[P_1 + \varepsilon \frac{\sqrt{(\sigma + \tau a_2)(\sigma + \tau a_3)}}{\sqrt{\sigma + \tau a_1}} R_1 \right]^2 = \mathrm{const} \tag{8.2}$$

или

$$\tau (a_1 P_1^2 + a_2 P_2^2 + a_3 P_3^2 + \tau a_2 a_3 R_1^2 + \tau a_3 a_1 R_2^2 + \tau a_1 a_2 R_3^2) + \sigma^2 (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) + \\ + \sigma [P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \tau (a_2 + a_3) R_1^2 + \tau (a_3 + a_1) R_2^2 + \tau (a_1 + a_2) R_3^2] + \\ + 2\varepsilon \sqrt{(\sigma + \tau a_1)(\sigma + \tau a_2)(\sigma + \tau a_3)} (P_1 R_1 + P_2 R_2 + P_3 R_3) = \mathrm{const} \tag{8.3}$$

Так как σ произвольно и не входит в уравнения (1.1), то из (8.3) следует, что

$$a_1 P_1^2 + a_2 P_2^2 + a_3 P_3^2 + \tau a_2 a_3 R_1^2 + \tau a_3 a_1 R_2^2 + \tau a_1 a_2 R_3^2 = \mathrm{const} \\ P_1 R_1 + P_2 R_2 + P_3 R_3 = \mathrm{const}, \qquad R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = \mathrm{const} \tag{8.4}$$

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \tau (a_2 + a_3) R_1^2 + \tau (a_3 + a_1) R_2^2 + \tau (a_1 + a_2) R_3^2 = \mathrm{const} \tag{8.5}$$

Интегралы (8.4) представляют собой известные интегралы Кирхгофа (1.2), а (8.5) есть четвертый алгебраический первый интеграл для второго интегрируемого случая Клебша [3].

Итак, если удвоенная кинетическая энергия системы имеет вид

$$2T = \sum_{(123)} [a_1 P_1^2 + 2c P_1 R_1 + (b + \tau a_2 a_3) R_1^2]$$

и, кроме того,

$$g_1 = g_2 = g_3 = 0, \qquad r_1 = r_2 = r_3 = 0$$

то уравнения (1.1) допускают интеграл (8.2), из которого сразу следует весь «комплект» четырех первых интегралов (8.4), (8.5), необходимых для сведения задачи к квадратурам. Получен второй интегрируемый случай Клебша [3].

9. Пусть теперь наряду с условиями (8.1) имеем еще

$$a_1 = a_2 = a_3 = a$$

Тогда уравнения (2.4) приведут к соотношениям (4.2) и (4.3). Интеграл (7.3) запишется в виде

$$\sum_{(123)} (\sigma - b_1)\left[P_1 + \varepsilon \frac{\sqrt{(\sigma - b_2)(\sigma - b_3)}}{\sqrt{a(\sigma - b_1)}} R_1\right]^2 = \mathrm{const} \qquad (9.1)$$

Так как σ произвольно и не входит в уравнения (1.1), то из (9.1) следует, что

$$a(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) - (b_2 + b_3) R_1^2 - (b_3 + b_1) R_2^2 - (b_1 + b_2) R_3^2 = \mathrm{const} \qquad (9.2)$$

$$P_1R_1 + P_2R_2 + P_3R_3 = \mathrm{const}, \qquad R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = \mathrm{const}$$

$$a(b_1P_1^2 + b_2P_2^2 + b_3P_3^2) - b_2b_3R_1^2 - b_3b_1R_2^2 - b_1b_2R_3^2 = \mathrm{const} \qquad (9.3)$$

Интегралы (9.2) суть интегралы Кирхгофа (1.2), а (9.3) представляет собой четвертый алгебраический первый интеграл для третьего интегрируемого случая Клебша [3]. Таким образом, если

$$2T = \sum_{(123)} (aP_1^2 + 2cP_1R_1 + b_1R_1^2), \qquad \begin{matrix} g_1 = g_2 = g_3 = 0 \\ r_1 = r_2 = r_3 = 0 \end{matrix}$$

то уравнения (1.1) допускают первый интеграл (9.1), из которого сразу следует весь комплект четырех первых интегралов (9.2), (9.3), необходимых для сведения задачи к квадратурам. Получен третий интегрируемый случай Клебша [3].

Итак, в п.п. 7—9 показано, что для второго и третьего интегрируемых случаев Клебша четвертые алгебраические первые интегралы можно представить в одной и той же форме (7.3).

В заключение отметим, что из формы интегралов (8.2) и (9.1) «естественно» следуют два частных случая интегрируемости, характеризующиеся наличием систем трех линейных частных интегралов и соответствующих предположению, что произвольные постоянные в правых частях интегралов (8.2) и (9.1) равны нулю. Первый из этих случаев интегрируемости указан Стекловым [12].

Поступила 26 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1, Л., Изд-во АН СССР, 1933, стр. 151—159.
2. Kirchhoff G. R. Über die Bewegung eines Rotationskörpers in eines Flüssigkeit. J. reine und angew. Math., 1870, Bd. 71, S. 237—262.
3. Clebsch A. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Mathem. Annalen, 1870, Bd. 3, S. 238—262.
4. Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893.
5. Харламов П. В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью. ПМТФ, 1963, № 4, стр. 17—30.
6. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Полн. собр. соч., т. 3, М.— Л., ОНТИ, 1936.
7. Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1, М., Изд-во АН СССР, 1954, стр. 320—327.
8. Kolosoff G. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. Compt. rend. Sèan. l'Acad. des Scie., 1919, vol. 169, p. 685—687.
9. Харламов П. В. Один общий случай интегрируемости уравнений Кирхгофа. Тр. Донецк. индустр. ин-та, 1957, т. 20, сер. механ.- математ., вып. 1.
10. Харламов П. В. О решениях уравнений динамики твердого тела. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, стр. 567—572.
11. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая. Собр. соч., т. 1. Л., Изд-во АН СССР, 1933, стр. 43—133.
12. Стеклов В. А. О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости. Тр. Отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1895, т. 7.
13. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes. Acta mathematica, 1899, vol. 22.