ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., 1944, т. 8, № 4.
2. Biot M. A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic Solid. J. Appl. Phys., 1955, vol. 26, No. 2, p. 182—185. (Русск. перев.: Механика. Сб. перев. и обзор. иностр. период. лит-ры, 1956, № 1.)
3. Biot M. A. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. 1. Low-frequency range. J. Acoust. Soc. Am., 1956, vol. 28, No. 2.
4. Косачевский Л. Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах. ПММ, 1959, вып. 6.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ЭВОЛЮЦИОННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

А. Г. Куликовский, С. А. Регирер

(Москва)

На примере уравнений электродинамики с проводимостью, зависящей от плотности тока, показано, что изменение типа пространственного оператора в системе уравнений в частных производных может приводить к неэволюционности этой системы. Обсуждаются не учтенные уравнениями физические факторы, сдерживающие скорость нарастания возмущений, соответствующие изменения в системе уравнений, описывающих распределение тока, и возможность получения стационарных решений.

В недавно появившейся статье Ю. П. Емца [1] была рассмотрена плоская стационарная задача о распределении электрического потенциала в среде, проводимость которой σ зависит от квадрата плотности тока. Для неподвижной среды эта задача может быть сведена к решению квазилинейного уравнения второго порядка относительно z-компоненты магнитного поля B

$$(1 - \Phi B,_x^2) \; B,_{xx} + 2\Phi B,_x B,_y B,_{xy} + (1 - \Phi B^2,_y) \, B,_{yy} = 0 \tag{1}$$

$$\Phi = \frac{\sigma' c^2}{8\pi^2 \sigma}, \qquad \sigma' = \frac{d\sigma}{dj^2}, \qquad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{e}_z B$$

Как было показано в [1], уравнение (1) становится гиперболическим, если

$$1 - 2(\sigma'/\sigma) j^2 < 0 \tag{2}$$

т. е., при достаточно быстром росте проводимости с увеличением тока. Аналогичное явление для анизотропно проводящей среды отмечено в работе [2], где содержится также утверждение о неустойчивости режимов, соответствующих области гиперболичности уравнений (1).

Рассмотрим уравнения соответствующих нестационарных процессов. Ограничимся случаем, когда возмущенный ток лежит в той же плоскости (x,y), причем j, B по-прежнему не зависят от z. Пренебрегая токами смещения, для B можно получить уравнение

$$B,_t = (c^2 / 4\pi\sigma) \left[(1 - \Phi B,_x^2) \, B,_{xx} + 2\Phi B,_x B,_y B,_{xy} + (1 - \Phi B,_y^2) B,_{yy}\right] \tag{3}$$

Для исследования устойчивости и эволюционности некоторого решения этого уравнения нужно линеаризовать уравнение (3) и рассмотреть поведение малых возмущений. Очевидно, что коэффициенты при старших производных возмущения магнитного поля будут такими же точно, как в стационарном решении, относительно которого произведена линеаризация.

Так как при выполнении условия (2) оператор, стоящий в правой части уравнения (3), гиперболический, то можно выбрать систему координат таким образом, что коэффициенты при вторых производных по x и y будут иметь противоположные знаки. В данном случае для этого достаточно направить ось y вдоль невозмущенного тока. При этом возмущения, зависящие только от x и t, описываются уравнением, главные члены которого представляют уравнение теплопроводности с измененным знаком времени.

Очевидно, такое уравнение неэволюционно [3] и сколь угодно малые возмущения магнитного поля могут вырасти до конечных размеров за сколь угодно малое время.

Поэтому стационарный режим, описываемый уравнением (1) при $1 - 2j^2\sigma' / \sigma < 0$, не может реализоваться.

Ввиду быстрого роста возмущений неэволюционные уравнения не могут правильно описывать также изменение каких-либо физических величин во времени. Получение неэволюционных решений нелинейных уравнений в ряде случаев можно рассматривать как результат переупрощений при выводе этих уравнений, как результат отбрасывания членов, которые малы для эволюционных решений, но могут становиться существенными для возмущений, обнаруживающих быстрый рост. Так как быстрее всего растут коротковолновые возмущения, то это могут быть члены, содержащие пространственные производные более высокого порядка или смешанные производные по пространству и времени.

В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим уравнения, описывающие распределение тока в случае, когда σ есть функция некоторой величины θ, которая в свою очередь подчиняется уравнению вида

$$\varepsilon\theta_{,t} = \varkappa\Delta\theta + b(\theta_0 - \theta) + j^2/\sigma \qquad (4)$$

где $\varkappa$, b — неотрицательные функции от θ и j^2. Роль величины θ может играть, например, температура «горячих» носителей тока в плазме или твердом теле. Если процесс стационарен и $\varkappa = 0$, то зависимость $\sigma(\theta)$ может быть эквивалентным образом заменена зависимостью $\sigma(j^2)$.

Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда невозмущенное решение задается равенствами $B = Ix$, $\theta = \text{const}$, а возмущения зависят только от x и t. Разыскивая решение в виде $e^{ikx-\omega t}$ при действительных k, можно показать, что корни дисперсионного уравнения λ_1 и λ_2 действительны, причем больший из них λ_1 обращается в нуль при $k = 0$ вместе с первой производной $d\lambda_1 / dk$, а $d^2\lambda_1/dk^2$ только знаком отличается от коэффициента при $B_{,xx}$ в уравнении (3). Таким образом, уравнение (3) хорошо описывает поведение длинноволновых возмущений. В случае, когда $1 - \Phi I^2 < 0$, распределение тока неустойчиво. Скорость роста возмущений λ_1 сначала увеличивается при возрастании k^2, а затем при $\varkappa \neq 0$ начинает уменьшаться, так что $\lambda_1 \to -\infty$ при $k^2 \to \infty$. Таким образом, теплопроводность приводит к затуханию коротковолновых возмущений. Если $\varkappa = 0$, то с ростом k^2 величина λ_1 растет, но при $k^2 \to \infty$ стремится к конечному пределу. Скорость роста возмущений оказывается и в этом случае ограниченной, так как очень быстрому росту возмущений препятствует конечная теплоемкость материала ε. Интересно отметить, что учет токов смещения в уравнениях электродинамики также приводит к ограничению скорости роста возмущений и при $\sigma = \sigma(j^2)$, хотя в этом случае λ при больших k^2 остается очень большой величиной.

При учете теплопроводности в уравнении (4) можно надеяться получить стационарные решения для распределения тока, каждое из которых при малых значениях $\varkappa$ близко к некоторому решению уравнения (1) там, где оно эллиптическое и существенным образом отличается от него в областях, где условие эллиптичности нарушено. Внутри этих областей величина $\Delta\theta$ должна иметь порядок $1/\varkappa$, так чтобы произведение $\varkappa\Delta\theta$ было сравнимо по величине с остальными членами уравнения.

Поступила 4 IV 1968

НИИ механики Московского университета
Математический институт АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Емец Ю. П. Метод годографа в электродинамике сплошных нелинейно проводящих сред. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
2. Oliver D. A., Mitchner M. Nonuniform electrical conduction in MHD channels. AIAA J., 1967, vol. 5, N 8.
3. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Усп. матем. наук, 1959, т. 14, вып. 2.