МАГНИТОЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

Л. Я. Косачевский (Донецк)

Рассматриваются плоские волны в проводящей двухкомпонентной среде, находящейся во внешнем магнитном поле. Среда состоит из упругой и жидкой компонент. (Пористая среда с упругим скелетом и порами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью.) Размеры пор и твердых частиц предполагаются малыми по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики движения так, что обе компоненты среды можно считать сплошными. Динамика такой среды (при отсутствии магнитного поля) рассматривалась в работах [1-3]. В статье [4] было показано, что в случае гармонических волн уравнения Био [2] можно считать наиболее общими.

Ниже на основе модели Био и уравнений электромагнитного поля исследуется волновое движение указанной среды при постоянном однородном магнитном поле **H**. Отмечено существование шести типов волн, четыре из которых поляризованы в плоскости, содержащей волновой вектор **k** и вектор **H**, а две поляризованы перпендикулярно этой плоскости. Найдены выражения для их фазовых скоростей и коэффициентов поглощения в предельном случае слабого магнитного поля.

1. Линеаризованные уравнения движения двухкомпонентных проводящих сред имеют вид

$$\rho_{11}\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t}+\rho_{12}\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t}+\beta(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U}_1+ \tag{1.1}$$

$$+\mu\Delta\mathbf{U}_1+Q\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U}_2-\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{h}_1$$

$$\rho_{12}\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t}+\rho_{22}\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t}-\beta(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=Q\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U}_1+R\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U}_2-\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{h}_2$$

$$\rho_{11}=\rho_1-\rho_{12},\qquad \rho_{22}=\rho_2-\rho_{12},\qquad \beta=\mu_f m^2/\varkappa$$

Здесь $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ — векторы скорости и смещения упругой и жидкой компонент ($\mathbf{U}_\nu=(i/\omega)\,\mathbf{v}_\nu$, $\nu=1,2$); ρ_1, ρ_2 — массы этих компонент в единице объема среды, ρ_{12} — коэффициент динамической связи ($\rho_{12}<0$); λ, μ, Q и R — упругие постоянные; $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ — малые изменения напряженности магнитного поля в волне в соответствующих компонентах среды; μ_f — вязкость жидкости; m и $\varkappa$ — пористость и проницаемость упругого скелета. При $\mathbf{H}=0$ уравнения (1.1) совпадают с уравнениями Био.

Ток, возникающий в каждой из компонент среды при ее движении в магнитном поле, складывается из индукционного тока и тока, перетекающего из другой компоненты. Таким образом, имеем

$$\mathbf{j}_1=\eta_1(\mathbf{E}_1+(1/c)\mathbf{v}_1\times\mathbf{H})+\mathbf{j}_{12},\qquad \mathbf{j}_2=\eta_2(\mathbf{E}_2+(1/c)\mathbf{v}_1\times\mathbf{H})-\mathbf{j}_{12} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$ — токи в первой и второй компонентах, отнесенные к единичному поперечному сечению среды; η_1 и η_2 — коэффициенты электропроводности; $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ — напряженности индуцированных электрических полей в соответствующих компонентах; c — скорость света; $\mathbf{j}_{12}$ — ток, перетекающий из второй компоненты в первую.

Плотность энергии, расходуемой на джоулево тепло в единицу времени, равна

$$W=\frac{j_1^2}{\eta_1}+\frac{j_2^2}{\eta_2}$$

Из условия минимума этой энергии при фиксированных E_ν и $\mathbf{v}_\nu$ находим

$$\mathbf{j}_{12}=\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\left[\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1+\frac{1}{c}(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)\times\mathbf{H}\right] \tag{1.3}$$

Соотношения (1.2) при этом принимают вид

$$\mathbf{j}_\nu=\eta_\nu\mathbf{E},\qquad \mathbf{E}=\frac{1}{\eta_1+\eta_2}\left[\eta_1\left(\mathbf{E}_1+\frac{1}{c}\mathbf{v}_1\times\mathbf{H}\right)+\eta_2\left(\mathbf{E}_2+\frac{1}{c}\mathbf{v}_2\times\mathbf{H}\right)\right] \tag{1.4}$$

Вектор E можно рассматривать как «эффективную» напряженность электрического поля в двухкомпонентной среде.

Из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_\nu = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_\nu}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{h}_\nu = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\nu, \qquad \operatorname{div} \mathbf{h}_\nu = 0$$

с учетом (1.4) получаем (1.5)

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial t} = \frac{\eta_1}{\eta_1^2+\eta_2^2}\left[\eta_1 \operatorname{rot}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}) + \eta_2 \operatorname{rot}(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{H}) + \frac{c^2}{4\pi}\left(1+\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\Delta \mathbf{h}_1\right], \qquad \eta_2 \mathbf{h}_1 = \eta_1 \mathbf{h}_2$$

Уравнения (1.1) и (1.5) образуют замкнутую систему. Будем искать ее решение в виде $\exp\{i[(\mathbf{kr}) - \omega t]\}$, т.е. описывающее распространение плоских волн с волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой ω. При этом (1.1) и (1.5) сводятся к системе алгебраических уравнений (1.6)

$$\omega^2\left[\left(\rho_{11}+i\frac{\beta}{\omega}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\rho_{12}-i\frac{\beta}{\omega}\right)\mathbf{v}_2\right] = (\lambda+\mu)\,\mathbf{k}(\mathbf{kv}_1) + \mu k^2 \mathbf{v}_1 + Q\mathbf{k}(\mathbf{kv}_2) + (\omega/4\pi)\,\mathbf{H}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{h}_1)$$

$$\omega^2\left[\left(\rho_{12}-i\frac{\beta}{\omega}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\rho_{22}+i\frac{\beta}{\omega}\right)\mathbf{v}_2\right] = Q\mathbf{k}(\mathbf{kv}_1) + R\mathbf{k}(\mathbf{kv}_2) + \frac{\omega}{4\pi}\mathbf{H}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{h}_2)$$

$$\left[\omega + i\frac{k^2c^2(\eta_1+\eta_2)}{4\pi(\eta_1^2+\eta_2^2)}\right]\mathbf{h}_1 + \frac{\eta_1}{\eta_1^2+\eta_2^2}\left[\eta_1\mathbf{k}\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{H}) + \eta_2\mathbf{k}\times(\mathbf{v}_2\times\mathbf{H})\right] = 0$$

Выберем координатные оси так, чтобы ось x была направлена по волновому вектору $\mathbf{k}$, а вектор $\mathbf{H}$ лежал в плоскости xy. В проекциях на эти координатные оси уравнения (1.6) принимают вид

$$[(\gamma_{11}+i\gamma)u - \sigma_{11}]v_{1x} + [(\gamma_{12}-i\gamma)u - \sigma_{12}]v_{2x} - \alpha H_y\sqrt{u}\,h_{1y} = 0$$

$$[(\gamma_{12}-i\gamma)u - \sigma_{12}]v_{1x} + [(\gamma_{22}+i\gamma)u - \sigma_{22}]v_{2x} - \alpha H_y\sqrt{u}\,h_{2y} = 0$$

$$[(\gamma_{11}+i\gamma)u - \xi]v_{1y} + (\gamma_{12}-i\gamma)uv_{2y} + \alpha H_x\sqrt{u}\,h_{1y} = 0$$

$$(\gamma_{12}-i\gamma)uv_{1y} + (\gamma_{22}+i\gamma)uv_{2y} + \alpha H_x\sqrt{u}\,h_{2y} = 0, \qquad \eta_2 h_{1y} - \eta_1 h_{2y} = 0 \tag{1.7}$$

$$(u+i\omega\eta)h_{1y} + \vartheta\eta_1\sqrt{u}\,[\eta_1(H_x v_{1y} - H_y v_{1x}) + \eta_2(H_x v_{2y} - H_y v_{2x})] = 0$$

$$[(\gamma_{11}+i\gamma)u - \xi]v_{1z} + (\gamma_{12}-i\gamma)u\,v_{2z} + \alpha H_x\sqrt{u}\,h_{1z} = 0$$

$$(\gamma_{12}-i\gamma)uv_{1z} + (\gamma_{22}+i\gamma)uv_{2z} + \alpha H_x\sqrt{u}\,h_{2z} = 0$$

$$(u+i\omega\eta)h_{1z} + \vartheta\eta_1 H_x\sqrt{u}\,(\eta_1 v_{1z} + \eta_2 v_{2z}) = 0, \qquad \eta_2 h_{1z} - \eta_1 h_{2z} = 0 \tag{1.8}$$

Здесь

$$\gamma_{11} = \frac{\rho_{11}}{\rho}, \quad \gamma_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho}, \quad \gamma_{22} = \frac{\rho_{22}}{\rho}, \quad \rho = \rho_{11}+\rho_{22}+2\rho_{12}, \quad \rho a^2 = \lambda + 2\mu + R + 2Q$$

$$\sigma_{11} = \frac{\lambda+2\mu}{\rho a^2}, \quad \sigma_{12} = \frac{Q}{\rho a^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{R}{\rho a^2}, \quad \xi = \frac{\mu}{\rho a^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\rho a}, \quad \gamma = \frac{\beta}{\rho\omega}, \quad \eta = \alpha\vartheta\rho c^2(\eta_1+\eta_2), \quad \vartheta = \frac{1}{a(\eta_1^2+\eta_2^2)}$$

Величина $u = (\omega / ka)^2$ представляет собой квадрат безразмерной фазовой скорости.

Полученные уравнения распадаются на две независимые группы (1.7) и (1.8). Отсюда следует, что имеются два независимых класса магнитозвуковых волн. Волны первого класса, описываемые уравнениями (1.7), поляризованы в плоскости xy. Волны второго класса, описываемые уравнениями (1.8), поляризованы перпендикулярно этой плоскости.

2. Рассмотрим волны первого класса. Приравнивая нулю определитель системы (1.7), получаем дисперсионное уравнение

$$(\eta_1^2+\eta_2^2)\Delta(u)\delta(u)(u+i\omega\eta) = \psi_x\Delta(u)(\Gamma u - \xi\eta_2^2) + \psi_y\, u\,\delta(u)(\Gamma u - \Sigma) \tag{2.1}$$

Здесь

$$\Delta(u) = (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 + i\gamma)u^2 - (\gamma_{11}\sigma_{22} + \gamma_{22}\sigma_{11} - 2\gamma_{12}\sigma_{12} + i\gamma)\,u + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$$

$$\delta(u) = (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 + i\gamma)\,u - \xi(\gamma_{22} + i\gamma)$$

$$\psi_x = \alpha H_x^2 / a, \qquad \Gamma = \eta_1^2(\gamma_{22} + i\gamma) + \eta_2^2(\gamma_{11} + i\gamma) - 2\eta_1\eta_2(\gamma_{12} - i\gamma)$$

$$\psi_y = \alpha H_y^2 / a, \qquad \Sigma = \eta_1^2\sigma_{22} + \eta_2^2\sigma_{11} - 2\eta_1\eta_2\sigma_{12}$$

Уравнение (2.1) четвертой степени относительно u, т. е. существуют четыре типа волн, поляризованных в плоскости xy. Из (1.7) находим (2.2)

$$v_{1x} = \frac{a\psi_y\sqrt{u}}{\eta_1\Delta(u)}(\Gamma_2 u - \Sigma_2)\frac{h_{1y}}{H_y}, \qquad v_{2x} = \frac{\Gamma_1 u - \Sigma_1}{\Gamma_2 u - \Sigma_2}v_{1x}, \qquad v_{1y} = -\frac{a\psi_x\sqrt{u}\,\Gamma_2}{\eta_1\delta(u)}\frac{h_{1y}}{H_x}$$

$$v_{2y} = \frac{\Gamma_1 u - \xi\eta_2}{\Gamma_2 u}v_{1y}, \qquad \begin{matrix}\Gamma_1 = \eta_2(\gamma_{11} + i\gamma) - \eta_1(\gamma_{12} - i\gamma), & \Sigma_1 = \eta_2\sigma_{11} - \eta_1\sigma_{12} \\ \Gamma_2 = \eta_1(\gamma_{22} + i\gamma) - \eta_2(\gamma_{12} - i\gamma), & \Sigma_2 = \eta_1\sigma_{22} - \eta_2\sigma_{12}\end{matrix}$$

В случае слабого магнитного поля, когда $\psi = \psi_x + \psi_y \ll 1$, корни уравнения (2.1) имеют вид

$$u^{(1)} = u_0^{(1)} + \frac{\psi_y u_0^{(1)}(\Gamma u_0^{(1)} - \Sigma)}{N(u_0^{(1)} - u_0^{(2)})(u_0^{(1)} - u_0^{(4)})}, \qquad u^{(2)} = u_0^{(2)} + \frac{\psi_y u_0^{(2)}(\Gamma u_0^{(2)} - \Sigma)}{N(u_0^{(2)} - u_0^{(1)})(u_0^{(2)} - u_0^{(4)})}$$

$$u^{(3)} = u_0^{(3)} + \frac{\psi_x(\Gamma u_0^{(3)} - \xi\eta_2^2)}{N(u_0^{(3)} - u_0^{(4)})}, \qquad N = (\eta_1^2 + \eta_2^2)(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 + i\gamma)$$

$$u^{(4)} = u_0^{(4)} + \frac{1}{N}\left[\frac{\psi_x(\Gamma u_0^{(4)} - \xi\eta_2^2)}{u_0^{(4)} - u_0^{(3)}} + \frac{\psi_y u_0^{(4)}(\Gamma u_0^{(4)} - \Sigma)}{(u_0^{(4)} - u_0^{(1)})(u_0^{(4)} - u_0^{(2)})}\right] \tag{2.3}$$

Здесь $u_0^{(1)}$, $u_0^{(2)}$ и $u_0^{(3)}$ — квадраты безразмерных фазовых скоростей двух продольных и поперечной волн, существующих в двухкомпонентной среде при отсутствии магнитного поля. Величины $u_0^{(1)}$ и $u_0^{(2)}$ будут корнями квадратного уравнения $\Delta(u) = 0$, значения $u_0^{(3)}$ и $u_0^{(4)}$ определяются формулами

$$u_0^{(3)} = \frac{\xi(\gamma_{22} + i\gamma)}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 + i\gamma}, \qquad u_0^{(3)} = -i\omega\eta$$

Для хорошо проводящих сред $\omega\eta \ll 1$, и формулы (2.3) несколько упрощаются

$$u^{(1)} = u_0^{(1)} + \frac{\psi_y(\Gamma u_0^{(1)} - \Sigma)}{N(u_0^{(1)} - u_0^{(2)})}, \qquad u^{(3)} = u_0^{(3)} + \frac{\psi_x(\Gamma u_0^{(3)} - \xi\eta_2^2)}{Nu_0^{(3)}} \tag{2.4}$$

$$u^{(2)} = u_0^{(2)} + \frac{\psi_y(\Gamma u_0^{(2)} - \Sigma)}{N(u_0^{(2)} - u_0^{(1)})}, \qquad u^{(4)} = -i\omega\eta + \frac{\psi_x\eta_2^2}{(\eta_1^2 + \eta_2^2)(\gamma_{22} + i\gamma)}$$

При этом из соотношений (2.2) с точностью до членов порядка ψ получаем

$$v_{1x}^{(1)} = \frac{a(\eta_1^2 + \eta_2^2)\sqrt{u_0^{(1)}}(\Gamma_2 u_0^{(1)} - \Sigma_2)}{\eta_1(\Gamma u_0^{(1)} - \Sigma)}\frac{h_{1y}^{(1)}}{H_y}, \qquad v_{1y}^{(1)} = 0$$

$$v_{1x}^{(2)} = \frac{a(\eta_1^2 + \eta_2^2)\sqrt{u_0^{(2)}}(\Gamma_1 u_0^{(2)} - \Sigma_1)}{\eta_1(\Gamma u_0^{(2)} - \Sigma)}\frac{h_{1y}^{(2)}}{H_y}, \qquad v_{1y}^{(2)} = 0 \tag{2.5}$$

$$v_{1x}^{(3)} = 0, \qquad v_{1y}^{(3)} = -\frac{a(\eta_1^2 + \eta_2^2)(u_0^{(3)})^{3/2}\,\Gamma_2}{\eta_1(\Gamma u_0^{(3)} - \xi\eta_2^2)}\frac{h_{1y}^{(3)}}{H_x}$$

$$v_{1x}^{(4)} = 0, \qquad v_{1y}^{(4)} = 0, \qquad v_{2x}^{(4)} = 0, \qquad v_{2y}^{(4)} = -\frac{a\psi_x}{(\gamma_{22} + i\gamma)\sqrt{u_0^{(4)}}}\frac{h_{2y}^{(4)}}{H_x}$$

В рассматриваемом приближении первые три волны представляют собой соответственно две продольные и поперечную волны, несколько модифицированные магнитным полем. Четвертая волна, в случае, когда проводимость жидкой компоненты значительно меньше проводимости упругой компоненты среды, быстро затухает и связана с процессом диффузии магнитного поля в упругой компоненте. В противоположном предельном случае бесконечной проводимости жидкости эта волна является волной Альвена, для которой имеют место равенства

$$u^{(4)}=\frac{\psi_x}{\gamma_{22}+i\gamma}, \qquad v_{2y}^{(4)}=-\frac{h_{2y}^{(4)}}{\sqrt{4\pi\rho}\,(\gamma_{22}+i\gamma)} \tag{2.6}$$

Если пренебречь вязкостью ($\gamma=0$), получим соотношения для волн Альвена [5].

3. Рассмотрим теперь волны второго класса. Условие совместности системы (1.8) приводит к следующему дисперсионному уравнению второй степени относительно u:

$$(\eta_1^2+\eta_2^2)\,\delta(u)\,(u+i\omega\eta)=\psi_x\,(\Gamma u-\xi\eta_2^2) \tag{3.1}$$

Таким образом, существуют два типа волн, поляризованных перпендикулярно плоскости xy. Из (1.8) получаем для этих волн

$$v_{1z}=-\frac{a\psi_x\sqrt{u}\,\Gamma_2}{\eta_1\delta(u)}\,\frac{h_{1z}}{H_x}, \qquad v_{2z}=\frac{\Gamma_1 u-\xi\eta_2}{\Gamma_2 u}\,v_{1z} \tag{3.2}$$

При $\psi\ll 1$ корни уравнения (3.1) имеют вид

$$u^{(5)}=u^{(3)}, \qquad u^{(6)}=u_0^{(4)}+\frac{\psi_x\,(\Gamma u_0^{(4)}-\xi\eta_2^2)}{N\,(u_0^{(4)}-u_0^{(3)})} \tag{3.3}$$

Корень $u^{(5)}$ соответствует поперечной волне, а $u^{(6)}$ — волне Альвена.

В случае хорошо проводящей среды $u^{(6)}$ совпадает с $u^{(4)}$, и с учетом (2.5) получаем для волн Альвена векторное соотношение

$$\mathbf{v}_2=-\frac{a\psi_x}{(\gamma_{22}+i\gamma)\sqrt{u^{(4)}}}\,\frac{\mathbf{h}_2}{H_x} \tag{3.4}$$

4. В заключение определим коэффициенты поглощения рассмотренных выше волн. Коэффициент поглощения χ определяется как мнимая часть волнового числа

$$\chi=\operatorname{Im}\frac{\omega}{a\sqrt{u}} \tag{4.1}$$

При условии $\gamma=\beta/\rho\omega\ll 1$ из (2.4) находим с точностью до главных членов

$$\chi^{(1)}=\frac{\beta\,(u_0^{(1)}-1)}{2\rho a\,(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2)\,(u_0^{(1)}-u_0^{(2)})\sqrt{u_0^{(1)}}} \tag{4.2}$$

$$\chi^{(2)}=\frac{\beta\,(u_0^{(2)}-1)}{2\rho a\,(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2)\,(u_0^{(2)}-u_0^{(1)})\sqrt{u_0^{(2)}}}, \qquad \chi^{(3)}=\frac{\beta\,(u_0^{(3)}-\xi)}{2\rho a\xi\gamma_{22}\sqrt{u_0^{(3)}}}$$

$$\chi^{(4)}=\frac{\omega}{a}\left\{\frac{\gamma_{22}\,(\eta_1^2+\eta_2^2)}{2}\left[\frac{\sqrt{\psi_x^2\eta_2^4+(\omega\eta\gamma_{22})^2\,(\eta_1^2+\eta_2^2)^2}-\psi_x\eta_2^2}{\psi_x^2\eta_2^4+(\omega\eta\gamma_{22})^2\,(\eta_1^2+\eta_2^2)^2}\right]\right\}^{1/2}$$

где значения $u_0^{(\nu)}$ берутся при $\gamma=0$. В другом предельном случае $\gamma\gg 1$ имеем

$$\chi^{(1)}=\frac{\rho\omega^2}{2a\beta}\,(\gamma_{11}\sigma_{22}+\gamma_{22}\sigma_{11}-2\gamma_{12}\sigma_{12}-\gamma_{11}\gamma_{22}+\gamma_{12}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{12}^2)$$

$$\chi^{(2)}=\frac{1}{a}\left(\frac{\beta\omega}{2\rho\,(\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{12}^2)}\right)^{1/2}, \qquad \chi^{(3)}=\frac{\rho\omega^2}{2a\beta\sqrt{\xi}}\,(\gamma_{22}-\gamma_{11}\gamma_{22}+\gamma_{12}^2) \tag{4.3}$$

$$\chi^{(4)}=\frac{1}{a}\left(\frac{\beta\,(\eta_1^2+\eta_2^2)\,\omega}{2\,[\beta\eta\,(\eta_1^2+\eta_2^2)+\rho\eta_2^2\psi_x}\right)^{1/2}$$

Таким образом, в указанных предельных случаях магнитное поле на коэффициенты поглощения первых трех волн не влияет. Эти волны затухают, главным образом, за счет вязкой диссипации. Поглощение четвертой волны зависит от магнитного поля, проводимостей компонент среды и вязкости жидкости. Коэффициенты поглощения волн, поляризованных перпендикулярно плоскости xy, совпадают соответственно с $\chi^{(3)}$ и $\chi^{(4)}$.

Автор признателен А. Г. Куликовскому за очень полезное замечание в рецензии редакции по статье.

Поступила 30 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., 1944, т. 8, № 4.
2. Biot M. A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic Solid. J. Appl. Phys., 1955, vol. 26, No. 2, p. 182—185.
(Русск. перев.: Механика. Сб. перев. и обзор. иностр. период. лит-ры, 1956, № 1.)
3. Biot M. A. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. 1. Low-frequency range. J. Acoust. Soc. Am., 1956, vol. 28, No. 2.
4. Косачевский Л. Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах. ПММ, 1959, вып. 6.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ЭВОЛЮЦИОННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

А. Г. Куликовский, С. А. Регирер

(Москва)

На примере уравнений электродинамики с проводимостью, зависящей от плотности тока, показано, что изменение типа пространственного оператора в системе уравнений в частных производных может приводить к неэволюционности этой системы. Обсуждаются не учтенные уравнениями физические факторы, сдерживающие скорость нарастания возмущений, соответствующие изменения в системе уравнений, описывающих распределение тока, и возможность получения стационарных решений.

В недавно появившейся статье Ю. П. Емца [1] была рассмотрена плоская стационарная задача о распределении электрического потенциала в среде, проводимость которой σ зависит от квадрата плотности тока. Для неподвижной среды эта задача может быть сведена к решению квазилинейного уравнения второго порядка относительно z-компоненты магнитного поля B

$$(1 - \Phi B,_x{}^2)\ B,_{xx} + 2\Phi B,_x B,_y B,_{xy} + (1 - \Phi B^2,_y)\, B,_{yy} = 0 \qquad (1)$$

$$\Phi = \frac{\sigma' c^2}{8\pi^2\sigma}, \qquad \sigma' = \frac{d\sigma}{dj^2}, \qquad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{e}_z B$$

Как было показано в [1], уравнение (1) становится гиперболическим, если

$$1 - 2(\sigma'/\sigma) j^2 < 0 \qquad (2)$$

т. е., при достаточно быстром росте проводимости с увеличением тока. Аналогичное явление для анизотропно проводящей среды отмечено в работе [2], где содержится также утверждение о неустойчивости режимов, соответствующих области гиперболичности уравнений (1).

Рассмотрим уравнения соответствующих нестационарных процессов. Ограничимся случаем, когда возмущенный ток лежит в той же плоскости (x,y), причем j, B по-прежнему не зависят от z. Пренебрегая токами смещения, для B можно получить уравнение

$$B,_t = (c^2 / 4\pi\sigma)\,[(1 - \Phi B,_x{}^2)\, B,_{xx} + 2\Phi B,_x B,_y B,_{xy} + (1 - \Phi B,_y{}^2) B,_{yy}] \qquad (3)$$

Для исследования устойчивости и эволюционности некоторого решения этого уравнения нужно линеаризовать уравнение (3) и рассмотреть поведение малых возмущений. Очевидно, что коэффициенты при старших производных возмущения магнитного поля будут такими же точно, как в стационарном решении, относительно которого произведена линеаризация.

Так как при выполнении условия (2) оператор, стоящий в правой части уравнения (3), гиперболический, то можно выбрать систему координат таким образом, что коэффициенты при вторых производных по x и y будут иметь противоположные знаки. В данном случае для этого достаточно направить ось y вдоль невозмущенного