

РАВНОВЕСНЫЕ ФИГУРЫ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЖИДКОГО ЦИЛИНДРА

Ю. К. Братухин, Л. Н. Маурин

(Пермь, Иваново)

Рассмотрены фигуры равновесия однородного прямого цилиндра, удерживаемого как целое силами поверхностного натяжения. Как известно, в отсутствие вращения единственной равновесной цилиндрической фигурой является прямой круговой цилиндр (эта форма отвечает минимуму поверхностной энергии). При вращении вокруг оси симметрии нормального сечения такой цилиндр по-прежнему остается равновесной фигурой. Однако, как показано ниже, начиная с определенных значений угловой скорости, появляются еще и новые фигуры равновесия, имеющие вид прямых цилиндров с осями симметрии n -го порядка ($n = 2, 3, \dots$)

1. Уравнение поверхности равновесной фигуры. Как известно [1], вращающаяся жидкая фигура удерживается силами поверхностного натяжения в равновесии, если на ее поверхности выполняется равенство

$$\frac{\rho\Omega^2 r^2}{2} + p_0 = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + p_1 \quad (1.1)$$

где ρ — плотность жидкости, Ω — угловая скорость вращения жидкой массы, p_0 — гидродинамическое давление на оси вращения, p_1 — внешнее давление, r — расстояние точки поверхности от оси вращения, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности, α — коэффициент поверхностного натяжения.

Для равновесных цилиндрических фигур с прямолинейной образующей уравнение поверхности (1.1) может быть записано в виде

$$4\omega^2 r^2 = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} + \frac{D}{R} \quad \left(\omega^2 = \frac{\rho\Omega^2}{8\alpha}, \quad \frac{D}{R} = \frac{p_1 - p_0}{\alpha} \right) \quad (1.2)$$

Здесь $r = r(\varphi)$ — уравнение нормального сечения цилиндрической фигуры в полярной системе координат, штрих-производная по φ .

К уравнению (1.2) необходимо присоединить:

условие несжимаемости жидкости

$$\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = 2\pi R^2 = \text{const} \quad (1.3)$$

условие того, что центры масс нормальных сечений жидкой фигуры лежат на оси вращения

$$\int_0^{2\pi} r^3 \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} r^3 \sin \varphi d\varphi = 0 \quad (1.4)$$

условие однозначности

$$r(\varphi + 2\pi) = r(\varphi) \quad (1.5)$$

2. Решение уравнения (1.2). Точки бифуркации. Решением уравнения (1.2), удовлетворяющим требованиям (1.3)–(1.5), будет прямой цилиндр с круговым сечением радиуса $r = R$. В отсутствие вращения ($\Omega = 0$) такая фигура является единственно возможной, что непосредственно следует из (1.1).

Будем искать другие равновесные фигуры в виде непрерывно отклоняющихся от кругового цилиндра $r = R(1 + \xi)$, где $\xi \ll 1$. Разложим (1.2) по степеням ξ , ограничиваясь членами порядка ξ^3

$$\xi'' + (4\omega^2 R^3 - 1 - D) + \xi(16\omega^2 R^3 - 1 - 2D) + \xi^2(24\omega^2 R^3 - D) + \xi^3 16\omega^2 R^3 + \xi'^2(6\omega^2 R^3 - 2 - \frac{3}{2}D) + \xi\xi'^2(12\omega^2 R^3 + 2) = 0 \quad (2.1)$$

Ищем решение (2.1), применяя обычную методику [2] разложения по степеням малой амплитуды отклонения ξ

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \dots$$

$$D = D_* + \delta_1 + \delta_2 + \dots, \quad 8\omega^2 R^3 = 8\omega_*^2 R^3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получим уравнения для последовательных приближений. При этом в нулевом приближении с учетом условия (1.3) находим

$$\xi_0 = 0, \quad 4\omega_*^2 R^3 - 1 - D_* = 0 \quad (2.3)$$

Уравнение для первого приближения имеет вид

$$\xi_1'' + (1/2 \varepsilon_1 - \delta_1) + \xi_1(2D_* + 3) = 0$$

В этом уравнении $(1/2 \varepsilon_1 - \delta_1) = 0$ в силу (1.3). Условие однозначности (1.5) приводит к требованию, чтобы $(2D_* + 3)$ равнялось квадрату целого числа n , что вместе с (2.3) приводит к уравнениям

$$(1/2 \varepsilon_1 - \delta_1) = 0, \quad (2D_* + 3) = n^2, \quad \omega_*^2 R^3 = 1/8 (n^2 - 1), \quad \xi_1 = s \cos n\varphi \quad (2.4)$$

Начальную фазу в ξ_1 полагаем равной нулю, воспользовавшись произволом выбора начала отсчета φ . Наконец, удовлетворяя условиям (1.4), получим $n \neq 1, n = 2, 3, \dots$, т. е. решение типа $\cos \varphi$ не имеет места, так как нарушает требование совмещения линии центров масс и оси вращения.

Выражение $8\omega_*^2 R^3 = n^2 - 1$ в (2.4) определяет точки бифуркации, т. е. точки, в которых от цилиндров с круговым сечением ответвляются равновесные цилиндрические фигуры с нормальными сечениями, имеющие ось симметрии n -порядка ($n = 2, 3, \dots$).

Уравнение для второго приближения

$$\xi_2'' + n^2 \xi_2 = -\xi_1(2\varepsilon_1 - 2\delta_1) + (\delta_2 - 1/2 \varepsilon_2) + \xi_1^2(6 + 5D) + 1/2 \xi_1'^2 \quad (2.5)$$

Из условия (1.5) и (2.4) получим $\varepsilon_1 = \delta_1 = 0$. Решение уравнения (2.5) есть

$$\xi_2 = \frac{1}{n^2} (\delta_2 - 1/2 \varepsilon_2) + \frac{s^2}{4n^2} (3 - 4n^2) + \frac{s^2}{4n^2} (2n^2 - 1) \cos 2n\varphi$$

Условия (1.4) удовлетворяются автоматически, а условие (1.3) устанавливает связь между δ_2, ε_2 и s^2

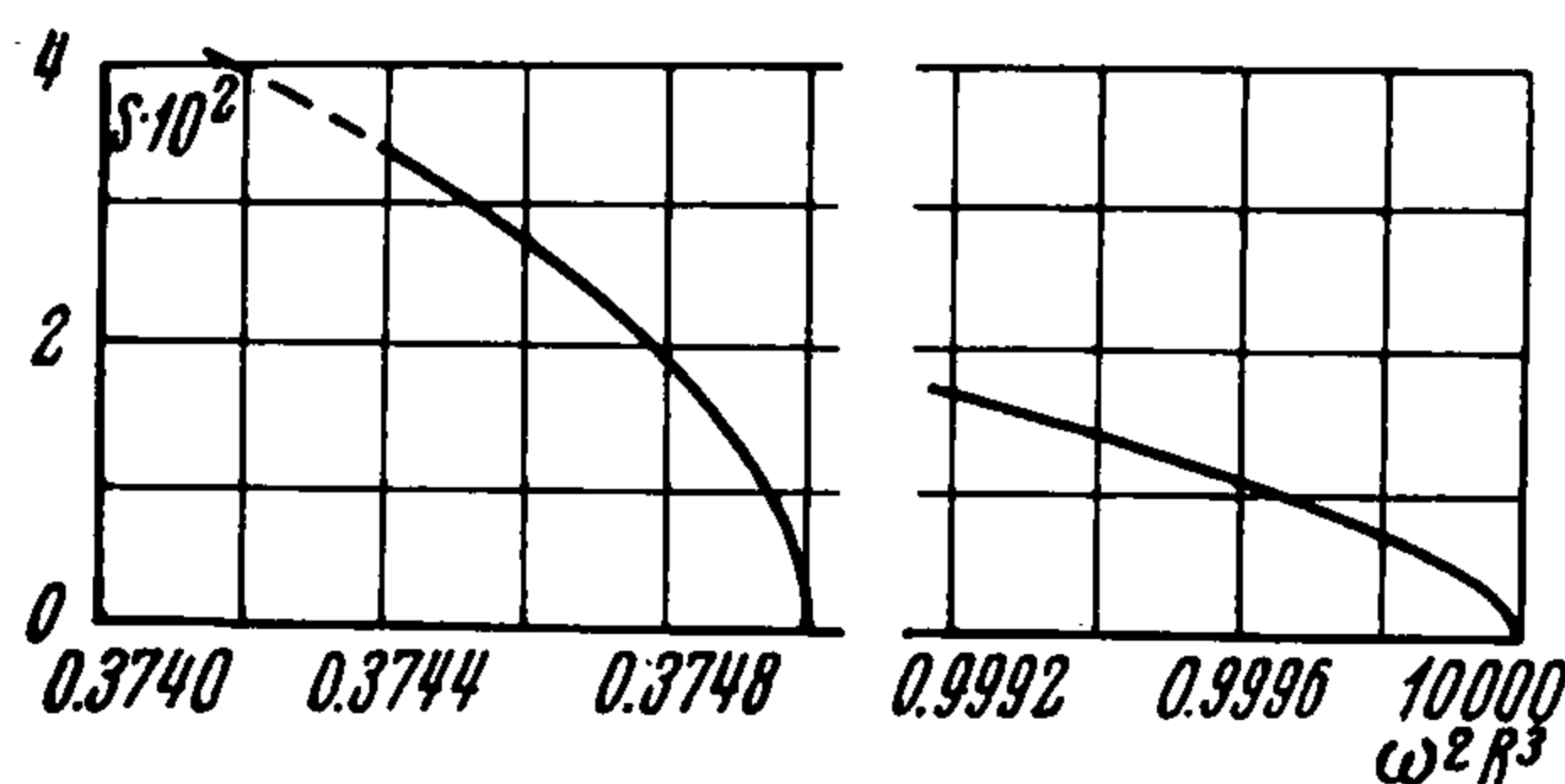
$$\delta_2 - 1/2 \varepsilon_2 + 3/4 (1 - n^2) s^2 = 0 \quad (2.6)$$

Еще одно уравнение для этих величин получается в третьем приближении при удовлетворении условию периодичности (1.5)

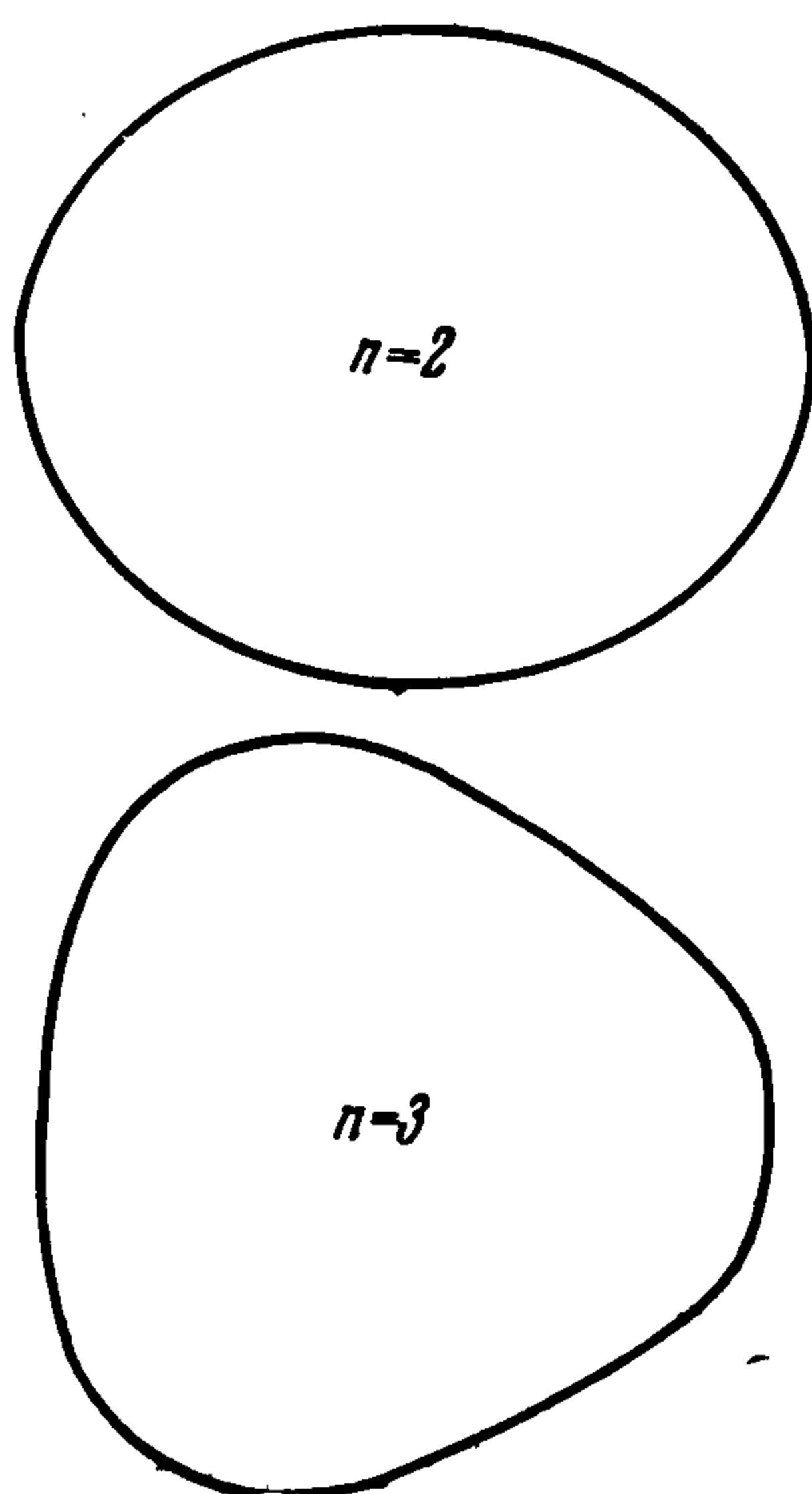
$$1/2 \varepsilon_2 (3 - n^2) + 3\delta_2 (n^2 - 1) + 1/8 s^2 (-15 + 33n^2 - 21n^4 + 3n^6) = 0 \quad (2.7)$$

Уравнения (2.6) и (2.7) позволяют выразить ε_2 и δ_2 через s^2 . Подставляя найденные поправки ε_1 и ε_2 в (2.2), получим уравнение, связывающее угловую скорость и амплитуду s отклонения нормального сечения равновесного прямого цилиндра от круговой формы в окрестности точек бифуркаций ω_* (фиг. 1)

$$\omega^2 R^3 = \frac{n^2 - 1}{2} - \frac{3s^2}{64n^2} (1 - n^2)^2 (1 + n^2) \quad (2.8)$$

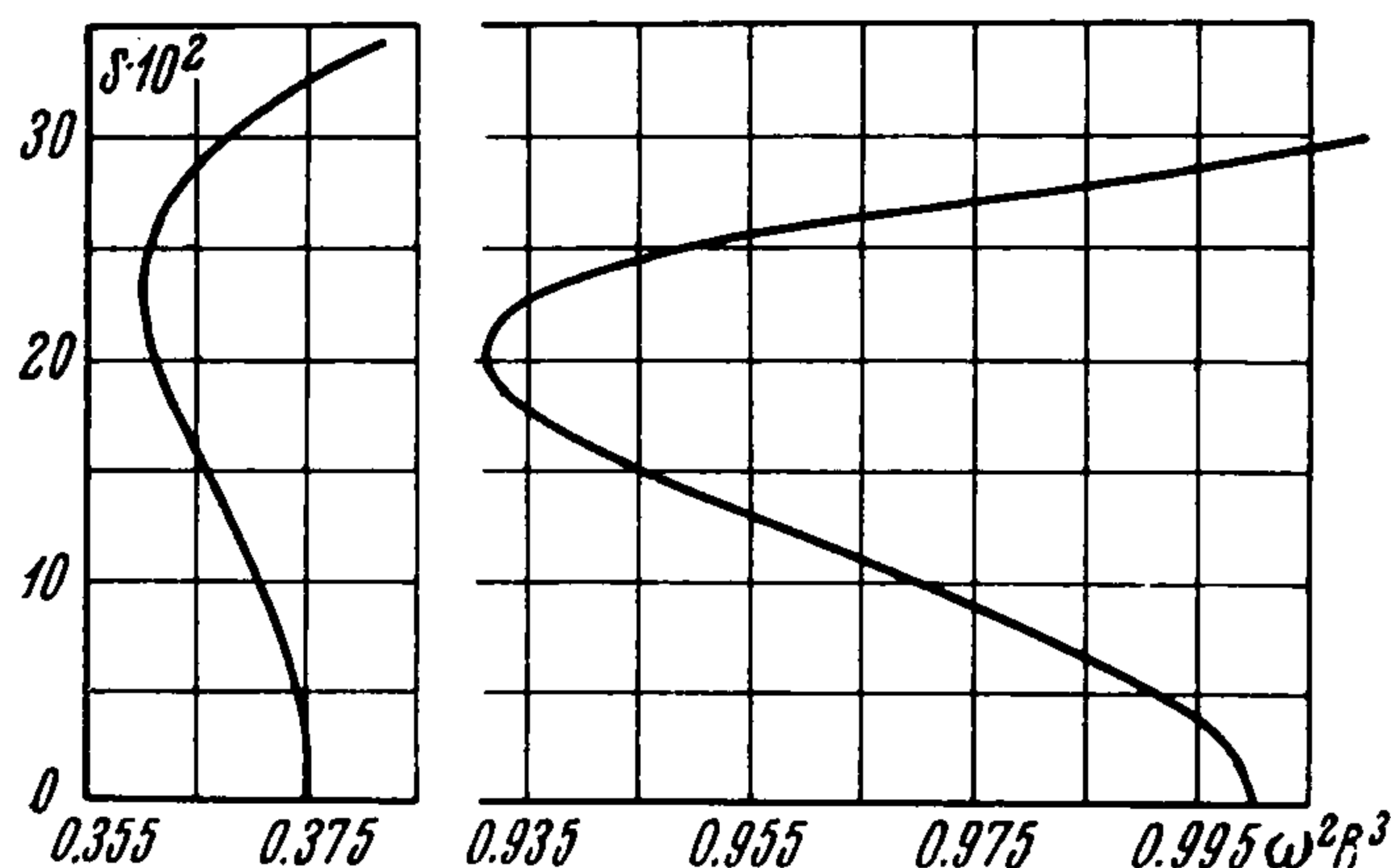


Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 2 изображены эти некруговые равновесные фигуры. Из (2.8) видно, что в найденном приближении ветви некруговых сечений ведут себя как квадратичные параболы, уходящие влево к точке $\omega = 0$. Однако ясно, что дойти до этой точки кривые не могут, так как в отсутствии вращения существует единственное равновесное состояние — круговой цилиндр. Поэтому для каждой кривой существует точка поворота. Эти точки могут быть найдены в следующих приближениях.



Фиг. 3

3. Вариационный метод. Чтобы построить ветви некруговых сечений в следующих приближениях, воспользуемся тем, что задача о равновесных формах может быть сведена к вариационной: равновесные фигуры отвечают экстремуму энергии при дополнительных условиях (1.3) — (1.5). В системе координат, вращающейся вместе с жидкой массой, энергия ε единицы длины цилиндра

$$\varepsilon = -\frac{\rho\Omega^2}{8} \int_0^{2\pi} r^4 d\varphi + \alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \quad (3.1)$$

Функцию $r = r(\varphi)$ будем искать методом Ритца в виде, удовлетворяющем условиям (1.4) и (1.5)

$$r(\varphi) = a(1 + s \cos n\varphi + p \cos 2n\varphi) \quad (n = 2, 3, \dots) \quad \left(a^2 = \frac{2R^2}{2 + s^2 + p^2} \right) \quad (3.2)$$

Здесь величина a определена условием (1.3), а s и p представляют собой вариационные параметры, по которым экстремизируется энергия.

Так как подстановка (3.2) в (3.1) приводит к сложному выражению, то в (3.1) проведено разложение по степеням s и p до s^6 и p^3 включительно

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\alpha} = & -2\pi\omega^2 R^4 \left(1 + 2s^2 - \frac{15}{8}s^4 + \frac{11}{8}s^6 + 2p^2 + 3s^2p - 3s^2p^2 - 3s^4p \right) + \\ & + 2\pi R \left[1 + s^2 \frac{n^2 - 1}{4} + s^4 \left(\frac{3}{32} - \frac{3n^4}{64} \right) + s^6 \left(-\frac{5}{128} + \frac{5n^2}{128} - \frac{9n^4}{256} + \frac{5n^6}{256} \right) + \right. \\ & \left. + p^2 \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) + s^2p \left(-\frac{3n^2}{8} \right) + s^2p^2 \left(\frac{3}{16} + \frac{5n^2}{16} - \frac{3n^4}{4} \right) + s^4p \left(-\frac{5n^2}{32} + \frac{9n^4}{32} \right) \right] \end{aligned}$$

Здесь использовано то же обозначение для ω , что и в (1.2). Экстремизируя последнее уравнение по параметрам s^2 и p и исключая затем p , получим после несложных вычислений

$$\begin{aligned} \omega^2 R^3 = & \frac{n^2 - 1}{8} - \frac{3(1 - n^2)^2(1 + n^2)}{64n^2} s^2 + \\ & + (3 - 30n^2 + 79n^4 + 14n^6 - 197n^8 + 141n^{10} + 15n^{12}) \frac{s^4}{512n^6} \quad (3.3) \end{aligned}$$

Ход бифуркационных ветвей (3.3) показан на фиг. 3. Как и следовало, эти ветви имеют точки поворота, а в окрестности точек бифуркации, когда можно ограничиться квадратичными по s членами, они совпадают с найденными выше параболой (2.8).

Поступила 29 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. А п п е л ь П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.— М., ОНТИ, 1936.
2. Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 3-е, М., Физматгиз, 1963.