ОБ УРАВНЕНИЯХ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Нгуен Ван Дьеп

(Воронеж)

Изучаются уравнения плоского пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости с моментными напряжениями, несимметричным тензором напряжения и внутренней инерцией частиц. Рассмотрены различные варианты уравнений плоского пограничного слоя и исследованы их инвариантные групповые свойства. Обсуждаются уравнения пограничного слоя в задаче обтекания плоской пластинки и в задаче о затопленной струе. Общие вопросы теории жидкости с моментными напряжениями рассмотрены в работах [1, 2].

§ 1. Общая система уравнений движения вязкой, несжимаемой жидкости с моментными напряжениями имеет вид

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0,\quad \frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+2\nu\nabla\cdot(\nabla\mathbf{v})^d+\nu_r\nabla\times[2\boldsymbol{\omega}-\nabla\times\mathbf{v}]$$
$$I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=2\nu_r(\nabla\times\mathbf{v}-2\boldsymbol{\omega})+c_0\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega})+2c_d\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{\omega})^d+2c_a\nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{\omega})^a \tag{1.1}$$

Здесь ρ — массовая плотность, p — давление, I — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы, $\mathbf{v}$ — вектор скорости точки, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, ν — кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r — кинематическая вращательная вязкость, c_0, c_d и c_a — коэффициенты моментной вязкости, $d(\ldots)/dt$ — полная производная по времени, ∇ — пространственный градиент, $(\nabla\mathbf{v})^d$ и $(\nabla\boldsymbol{\omega})^d$ — симметричные части соответствующих диад, $(\nabla\mathbf{v})^a$ и $(\nabla\boldsymbol{\omega})^a$ — антисимметричные диады.

Уравнения (1.1) для двумерного случая в безразмерной форме имеют следующий вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_r}\right)\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)+\frac{2}{R_r}\frac{\partial\omega_z}{\partial y}$$
$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_r}\right)\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)-\frac{2}{R_r}\frac{\partial\omega_z}{\partial x} \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial\omega_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial\omega_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial\omega_z}{\partial y}=-\frac{4E}{R_r}\omega_z+\frac{2E}{R_r}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)+\frac{E}{R_c}\left(\frac{\partial^2\omega_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_z}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

$$R=\frac{Vl}{\nu},\qquad E=\frac{V^2}{I},\qquad R_r=\frac{Vl}{\nu_r},\qquad R_c=\frac{Vl^3}{\gamma},\qquad \gamma=\frac{c_a+c_d}{I} \tag{1.3}$$

Здесь V, l — характерная скорость и длина.

Запишем уравнения (1.2) в криволинейных [3] ортогональных координатах q_1, q_2 с коэффициентами Ламэ h_1, h_2

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{v_1}{h_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{v_2}{h_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}+\frac{v_2}{h_1h_2}\left(v_1\frac{\partial h_1}{\partial q_2}-v_2\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\right)= \tag{1.4}$$
$$=-h_1\frac{\partial p}{\partial q_1}+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_r}\right)\left[\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial q_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial q_2^2}+\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial(h_2/h_1)}{\partial q_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\right.$$
$$+\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial(h_1/h_2)}{\partial q_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}+\frac{2}{h_1^2h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}-\frac{2}{h_1h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_2}+$$
$$+\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\right)v_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\right)v_1+\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\right)v_2-$$
$$\left.-\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\right)v_2\right]+\frac{2}{R_r}\frac{1}{h_2}\frac{\partial\omega_3}{\partial q_2}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{v_1}{h_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}+\frac{v_2}{h_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2}-\frac{v_1}{h_1h_2}\left(v_1\frac{\partial h_1}{\partial q_2}-v_2\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\right)=-\frac{1}{h_2}\frac{\partial p}{\partial q_2}+$$
$$+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_r}\right)\left[\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial q_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial q_2^2}+\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial(h_2/h_1)}{\partial q_1}\frac{\partial v_2}{\partial q_1}+\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial(h_1/h_2)}{\partial q_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2}-\right.$$
$$-\frac{2}{h_1^2h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{2}{h_1h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}+\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\right)v_2+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\right)v_2-$$
$$\left.-\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\right)v_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\right)v_1\right]-\frac{2}{R_r}\frac{1}{h_1}\frac{\partial \omega_3}{\partial q_2}$$

$$h_2\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+h_1\frac{\partial v_2}{\partial q_2}+v_1\frac{\partial h_2}{\partial q_1}+v_2\frac{\partial h_1}{\partial q_2}=0$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t}+\frac{v_1}{h_1}\frac{\partial \omega_3}{\partial q_1}+\frac{v_2}{h_2}\frac{\partial \omega_3}{\partial q_2}+\frac{\omega_3}{2h_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{\omega_3}{2h_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2}+\frac{v_1\omega_3}{2h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}+\frac{v_2\omega_3}{2h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}=$$
$$=-\frac{4E}{R_r}\omega_3+\frac{2E}{R_r}\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(h_2v_2)}{\partial q_1}-\frac{\partial(h_1v_1)}{\partial q_2}\right]+\frac{E}{R_c}\left[\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2\omega_3}{\partial q_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\frac{\partial^2\omega_3}{\partial q_2^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial(h_2/h_1)}{\partial q_1}\frac{\partial\omega_3}{\partial q_1}+\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial(h_1/h_2)}{\partial q_2}\frac{\partial\omega_3}{\partial q_2}\right]$$

Следуя [3], положим (1.5)

$$q_1=x,\quad q_2=\frac{y}{\sqrt{R}},\quad v_1=v_x,\quad v_2=\frac{v_y}{\sqrt{R}},\quad \omega_3=\omega_z\sqrt{R},\quad h_1=1+\frac{y}{r\sqrt{R}},\quad h_2=1$$

Подставив (1.5) в (1.4), устремим в полученных уравнениях R к бесконечности. В зависимости от соотношений между комплексами R, R_r, R_c, E рассмотрим четыре возможных типа уравнений пограничного слоя.

1. Если R, R_r, E, R_c/R имеют одинаковые порядки, то в размерных переменных получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+(\nu+\nu_r)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\nu_r\frac{\partial\omega}{\partial y}$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad u=v_x,\quad v=v_y,\quad \omega=\omega_z \tag{1.6}$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}=-\frac{4\nu_r}{I}\omega-\frac{2\nu_r}{I}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\gamma}{I}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$$

В этом случае уравнения пограничного слоя содержат члены, характеризующие несимметричность диады напряжений, моментные напряжения и инерцию частиц при вращении.

2. Если R, R_r, E имеют одинаковые порядки, а $ER \ll R_c$, то имеем систему (1.6) в которой последнее уравнение заменяется следующим соотношением:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}=-\frac{4\nu_r}{I}\omega-\frac{2\nu_r}{I}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.7}$$

Этот случай соответствует отсутствию моментных напряжений в жидкости.

3. Если R, R_r и $\sqrt{R_c}$ имеют одинаковые порядки при условии, что $E \gg R$, то получим систему (1.6), в которой последнее уравнение имеет вид

$$0=-4\nu_r\omega-2\nu_r\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \tag{1.8}$$

Это соответствует случаю, когда инерцией вращения частиц можно пренебречь.

4. Если R, R_r, R_c/E имеют одинаковые порядки, $E \ll R$, то в системе (1.6) последнее уравнение заменяется следующим уравнением:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+u\frac{\partial\omega}{\partial x}+v\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\gamma}{I}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) соответствует случаю, когда моментное напряжение играет главную роль при вращении частиц.

§ 2. Следуя [4–6], рассмотрим инвариантные групповые свойства уравнений пограничного слоя жидкости с моментными напряжениями в стационарном случае.

А. Рассмотрим первый тип уравнений пограничного слоя. Нормальная форма системы (1.6) имеет вид

$$\alpha_y=\frac{1}{\nu+\nu_r}\left(uu_x+v\alpha+\frac{1}{\rho}p_x-2\nu_r\beta\right),\quad u_y=\alpha,\quad \omega_y=\beta$$
$$p_y=0,\quad v_y=-u_x,\quad \beta_y=\frac{I}{\gamma}\left(u\omega_x+v\beta+\frac{4\nu_r}{I}\omega+\frac{2\nu_r}{I}\alpha\right)\qquad (S_1)$$

Здесь и в дальнейшем индексы x, y после величин u, v, p, ω, α, β означают дифференцирование по этим переменным.

Величины x, y, u, v, ω, p, α, β рассматриваются как координаты точки пространства E_8. Найдем группу G преобразования E_8 со следующим инфинитезимальным оператором:

$$X=\xi_x\frac{\partial}{\partial x}+\xi_y\frac{\partial}{\partial y}+\xi_u\frac{\partial}{\partial u}+\xi_v\frac{\partial}{\partial v}+\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}+\xi_\omega\frac{\partial}{\partial \omega}+\xi_\beta\frac{\partial}{\partial \beta}+\xi_p\frac{\partial}{\partial p}$$

Здесь ξ_x, ξ_y . . . — функции от x, y, p, u, v, α, β, ω. Пусть E_{20} — продолжение E_8 относительно всех производных от u, v, ω, p, α, β; X^+ — продолжение оператора X.

Для того чтобы система (S_1) допускала группу G, необходимо и достаточно выполнение условий [4–6]

$$X^+\left[\alpha_y-\frac{1}{\nu+\nu_r}\left(uu_x+v\alpha+\frac{1}{\rho}p_x-2\nu_r\beta\right)\right]=0$$
$$X^+(u_y-\alpha)=0,\quad X^+(\omega_y-\beta)=0,\quad X^+p_y=0,\quad X^+(v_y+u_x)=0\qquad (2.1)$$
$$X^+[\beta_y-(Iu\omega_x+Iv\beta+4\nu_r\omega+2\nu_r\alpha)\gamma^{-1}]=0$$

Система уравнений (2.1) на многообразии (S_1) расщепляется и дает систему определяющих уравнений, общее решение которой имеет вид

$$\xi_x=ax+b_1,\quad \xi_p=2ap+b_2,\quad \xi_u=au,\quad \xi_w=a\omega\qquad (2.2)$$
$$\xi_\alpha=a\alpha,\quad \xi_\beta=a\beta,\quad \xi_y=b_3\varphi(x),\quad \xi_v=b_3u\varphi'(x),\quad \varphi'(x)=d\varphi/dx$$

Здесь $\varphi(x)$ — произвольная функция от x.

Таким образом, система (S_1) допускает бесконечную группу G. Так как ξ_x, ξ_y, ξ_u, ξ_v, ξ_w, ξ_p не зависят от α и β, то вместо пространства E_8 можно рассмотреть только пространство E_6, в котором алгебра Ли группы G порождается следующими укороченными базисными операторами:

$$X_1=x\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial u}+2p\frac{\partial}{\partial p}+\omega\frac{\partial}{\partial \omega},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial p}\qquad (2.3)$$

и множеством операторов вида

$$X_4=\varphi(x)\frac{\partial}{\partial y}+u\varphi'(y)\frac{\partial}{\partial v}\qquad (2.4)$$

Можно показать, что подалгебра операторов (2.4) будет идеалом всей алгебры Ли, допускаемой системы (S_1).

Чтобы найти существенно различные инвариантные решения (S_1), нужно построить оптимальную систему операторов (2.3), образующих алгебру вычетов по идеалу (2.4). В результате вычислений [4, 5] получим следующие однопараметрические подгруппы.

Подгруппа H_1 с оператором X_1. Этой подгруппе соответствует следующий полный набор независимых инвариантов:

$$J_1=u/x,\quad J_2=v,\quad J_3=p/x^2,\quad J_4=\omega/x,\quad J_5=\xi=y$$

Подставив найденные из этих инвариантов значения u, v, p, ω в уравнения (S_1), получим систему уравнений, которую назовем системой (S_1/H_1):

$$\rho(\nu+\nu_r)J_1''=\rho J_1^2+\rho J_2J_1'+2J_3-2\rho\nu_rJ_4',\quad J_3'=0$$
$$J_1+J_2'=0,\quad \gamma J_4''=IJ_1J_4+IJ_2J_4'+4\nu_rJ_4+2\nu_rJ_1'$$

Здесь и в дальнейшем знак штрих означает дифференцирование по переменной ξ

Подгруппа H_2 с оператором X_2. Полный набор независимых инвариантов имеет вид

$$J_1 = u, \quad J_2 = v, \; J_3 = p, \; J_4 = \omega, \; J_5 = \xi = y$$

Соответствующую систему $(S_1 \,/\, H_2)$ запишем в форме $(\nu + \nu_r)J_1'' = J_2J_1' - 2\nu_r J_4'$

$$J_3' = 0, \quad J_2' = 0 \;\; \gamma J_4'' = IJ_2J_4' + 4\nu_r J_4 + 2\nu_r J_1'$$

Подгруппа H_3 с оператором X_3. Полный набор независимых инвариантов составляют инварианты вида

$$J_1 = u, \quad J_2 = v, \quad J_3 = \omega, \; J_4 = x, \quad J_5 = \xi = y$$

На этой подгруппе нельзя построить инвариантное решение [4, 5].

Подгруппа H_4 с оператором $X = \partial (\ldots) \,/\, \partial x + \partial (\ldots) \,/\, \partial p$. Имеем следующие независимые инварианты

$$J_1 = u, \quad J_2 = v, \quad J_3 = p - x, \; J_4 = \omega, \quad J_5 = \xi = y$$

Система $(S_1 \,/\, H_1)$ имеет вид

$$\rho\, (\nu + \nu_r)J_1'' = \rho J_2J_1' - 2\rho\nu_r J_4', \quad J_3' = 0$$

$$J_2' = 0, \quad \gamma J_4'' = IJ_2J_4' + 4\nu_r J_4 + 2\nu_r J_1'$$

Подгруппа H_5 с оператором X_4. Полный набор независимых инвариантов будет

$$J_1 = u, \quad J_2 = v - uy\varphi' \,/\, \varphi$$
$$J_3 = p, \quad J_4 = \omega, \quad J_5 = \xi = x$$

Система (S_1/H_5) интегрируется до конца и дает решение

$$u = \frac{c_2}{\varphi(x)}, \qquad v = \Phi(x) + \frac{c_2 y\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

$$p = c_1 - \frac{c_2^2\rho}{\varphi^2}$$

$$\omega = C_3 \exp\left[-\frac{4\nu_r}{c_2 I}\int \varphi(x)\,dx\right]$$

Подгруппа	Оператор	Подгруппа	Оператор
H_1	X_3	H_8	X_2
H_2	X_4	H_9	$X_2 + X_3$
H_3	X_5	H_{10}	$X_1 + mX_2$
H_4	$X_3 + X_4$	H_{11}	$2X_1 + X_2 + X_4$
H_5	$X_3 + X_5$	H_{12}	$3X_1 + X_2 + X_5$
H_6	$X_4 + X_5$	H_{13}	X_6
H_7	$X_3 + X_4 + X_5$		

Здесь $\Phi(x)$ — произвольная функция, c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования.

Можно показать, что уравнения пограничного слоя (1.7), (1.8) второго и третьего типов допускают ту же группу G, что и уравнения (S_1). Поэтому их решения могут быть получены из систем $(S_1 \,/\, H_1)$ — $(S_1 \,/\, H_5)$, в которых нужно приравнять нулю γ и I.

B. Рассмотрим четвертый тип уравнений пограничного слоя. Нормальная форма системы (1.9) имеет вид

$$\alpha_y = \frac{1}{\nu + \nu_r}\left(uu_x + v\alpha + \frac{1}{\rho}p_x - 2\nu_r\beta\right), \qquad u_y = \alpha, \; \omega_y = \beta \qquad (S_2)$$

$$p_y = 0, \quad v_y = -u_x, \quad \beta_y = I\gamma^{-1}(u\omega_x + v\beta)$$

Общее решение системы определяющих уравнений вида (2.1) в этом случае находится в форме

$$\xi_x = ax + b_1, \quad \xi_y = (1 - a)y + b_2\varphi(x), \quad \xi = (3a - 2)u$$

$$\xi_v = (a - 1)y + b_2 u\varphi'(x), \quad \xi_p = (6a - 4)p + b_3, \quad \xi_\omega = (4a - 3)\,\omega + b_4.$$

Оптимальная система операторов алгебры Ли, соответствующая четвертому типу уравнений пограничного слоя, приведена здесь выше в виде таблицы.

В этом случае для подгрупп H_1, H_2, H_4, H_{13} существуют такие же инварианты, как и в случае пограничного слоя первого типа. Для подгрупп H_3 и H_6 нет инвариантных решений. Рассмотрим остальные подгруппы.

Подгруппа H_5. Полный набор независимых инвариантов состоит из следующих:

$$J_1 = u, \quad J_2 = v, \quad J_3 = p, \quad J_4 = \omega - x, \quad J_5 = \xi = y$$

Система уравнений $(S_2 \,/\, H_5)$ имеет вид

$$(\nu + \nu_r)J_1'' = J_2J_1' - 2\nu_r J_4', \quad J_2' = 0, \quad J_3' = 0, \quad \gamma J_4'' = IJ_1 + IJ_2J_4'$$

Подгруппа H_7. Этой подгруппе соответствует следующий полный набор независимых инвариантов:

$$J_1 = u, \quad J_2 = v, \quad J_3 = p - x, \quad J_4 = \omega - x, \quad J_5 = \xi = y$$

Система (S_2 / H_7) принимает форму

$$\rho(\nu + \nu_r)J_1'' = \rho J_2 J_1' + 1 - 2\rho\nu_r J_4', \quad J_2' = 0$$
$$J_3' = 0, \quad \gamma J_4'' = IJ_1 + IJ_2J_4'$$

Подгруппа H_8. Полный набор независимых инвариантов имеет вид

$$J_1 = uy, \quad J_2 = vy, \quad J_3 = py^4, \quad J_4 = \omega y^3, \quad J_5 = \xi = x$$

Этой подгруппе соответствует следующая система уравнений (S_2 / H_8):

$$\rho J_1 J_1' - 2\rho J_2 J_1 = 6\rho(\nu + \nu_r)J_1 - 3\rho\nu_r J_4, \quad J_2 = J_1'$$
$$J_3 = 0, \quad \gamma J_4 = IJ_1J_4' - 3IJ_2J_4$$

Подгруппа H_9. Имеем следующие независимые инварианты:

$$J_1 = u\exp(2x), \quad J_2 = v\exp(x), \quad J_3 = p\exp(4x)$$
$$J_4 = \omega\exp(3x), \quad J_5 = \xi = y\exp(-x)$$

Система (S_2 / H_9) имеет вид

$$\rho(\nu + \nu_r)J_1'' = -2\rho J_1^2 - \rho\xi J_1 J_1' + \rho J_2 J_1' - 4J_3, \quad J_3' = 0$$
$$-\xi J_1' - 2J_1 + J_2 = 0, \quad \gamma J_4'' = IJ_2J_4' - 3IJ_1J_4 - I\xi J_1 J_4'$$

Полагая $J_1 = \varphi'$, $J_4 = \psi$, получим

$$(\nu + \nu_r)\varphi''' + 2\varphi^2 - \varphi\varphi'' + 4c_1 = -2\nu_r\psi', \quad p = c_1\exp(-4x)$$
$$\gamma\psi'' = I(2\varphi' - \xi\varphi' + \xi\varphi'')\psi' - 3I\varphi'\psi$$

Подгруппа H_{10}. Ее полный набор независимых инвариантов будет

$$J_1 = ux^{-1+2m}, \quad J_2 = vx^m, \quad J_3 = px^{-2(1-2m)}, \quad J_4 = \omega^{-1+3m}, \quad J_5 = \xi = yx^{-m}$$

Система уравнений (S_2 / H_{10}) принимает форму

$$(\nu + \nu_r)\varphi''' + (1 - m)\varphi\varphi'' - (1-2m)\varphi'^2 - 2(1-2m)c_1 = -2\nu_r\psi'$$
$$\gamma\psi'' = I(1-3m)\varphi'\psi - I(1 - m)\varphi\psi', \quad p = c_1\rho x^{2(1-2m)} \tag{2.5}$$

Подгруппа H_{11}. Для этой подгруппы имеем следующие независимые инварианты:

$$J_1 = u, \quad J_2 = vx^{1/2}, \quad J_3 = p - \ln x^{1/2}, \quad J_4 = \omega x^{1/2}, \quad J_5 = \xi = yx^{-1/2}$$

Система (S_2 / H_{11}) имеет вид

$$2\rho(\nu + \nu_r)\varphi''' + \rho\varphi\varphi'' - 1 = -4\rho\nu_r\psi'$$
$$2\gamma\psi'' = -2I\xi\varphi'\psi' - I\varphi\psi', \quad p = c_1 + \ln x^{1/2}$$

Подгруппа H_{12}. Полный набор независимых инвариантов будет

$$J_1 = ux^{-1/3}, \quad J_2 = vx^{1/3}, \quad J_3 = px^{-2/3}, \quad J_4 = \omega - \ln x^{1/3}, \quad J_5 = \xi = yx^{-1/3}$$

Система (S_2 / H_{12}) имеет вид

$$3\rho(\nu + \nu_r)\varphi''' - \rho\varphi'^2 + 2\rho\varphi'\varphi'' + 2c_1 = -6\rho\nu_r\psi'$$
$$\gamma\psi'' = I\varphi' + I(\xi - 2)\varphi'\psi', \quad p = c_1 x^{2/3}$$

§ 3. Рассмотрим задачу обтекания плоской полубесконечной пластинки вязкой несжимаемой жидкостью с моментными напряжениями. Примем граничные условия

$$u = v = 0 \text{ при } y = 0 \tag{3.1}$$
$$\lim u(x, y) = U(x) = cx^n, \quad \lim \omega(x, y) = 0 \quad \text{при } y \to \infty$$

На твердой стенке для ω можно использовать одно из следующих условий:

$$\omega = 0 \quad \text{при } y = 0, \qquad \omega_y = -u_{yy} \quad \text{при } y = 0 \tag{3.2}$$

Давление p найдется из соотношения [3]

$$p_x = -\rho UU' = -nc^2\rho x^{2n-1} \tag{3.3}$$

Условия (3.1) — (3.3) могут быть удовлетворены только для автомодельных решений уравнений (2.5), в которых надо положить

$$m = (1 - n) / 2, \quad c_1 = - c^2 / 2$$

Из (2.5) получим систему уравнений

$$2 (\nu + \nu_r)\varphi''' + (n + 1)\varphi\varphi'' + 2n (c^2 - \varphi'^2) = - 4\nu_r\psi'$$
$$2\gamma\psi'' + I (n + 1)\varphi\psi' - I (3n - 1)\varphi'\psi = 0 \qquad (3.4)$$

Граничные условия (3.1) примут вид

$$\varphi (0) = \varphi' (0) = 0, \quad \varphi' (\infty) = c, \quad \psi (\infty) = 0 \qquad (3.5)$$

Соотношения (3.2) запишутся в форме

$$\psi (0) = 0 \quad \text{или} \quad 2\psi (0) + \varphi'' (0) = 0 \qquad (3.6)$$

Если при $y = \infty$ скорость жидкости постоянна, то уравнения (3.4) имеют вид

$$2 (\nu + \nu_r)\varphi''' + \varphi\varphi'' = - 4\nu_r\psi', \quad 2\gamma\psi'' + I (\varphi\psi)' = 0 \qquad (3.7)$$

Из уравнений (3.4) при условиях (3.5) и первом условии (3.6) видно, что $\omega \equiv 0$, т. е. решение (3.4) при $\omega \not\equiv 0$ возможно при условиях (3.5) и втором условии (3.6).

§ 4. Рассмотрим задачу о затопленной струе жидкости с моментными напряжениями. Воспользуемся уравнениями (2.5). По условию сохранения импульса струи

$$\rho \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \, dy = M = \text{const}$$

необходимо положить $m = {}^2/_3$, $c_1 = 0$.

Из (2.5) получим уравнения, описывающие течение в затопленной струе:

$$3 (\nu + \nu_r)\varphi''' + (\varphi\varphi')' = - 6\nu_r\psi', \; 3\gamma\psi'' + I\varphi\psi' + 3I\varphi'\psi = 0, \quad \rho \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'^2 d\xi = M \qquad (4.1)$$

Граничные условия для φ примут вид [3]

$$\varphi (0) = \varphi'' (0) = \varphi' (\infty) = 0 \qquad (4.2)$$

Для ψ из условия симметрии имеем

$$\psi' (0) = 0 \qquad (4.3)$$

и на бесконечности примем одно из условий

$$\psi (\infty) = 0, \quad 2\psi (\infty) + \varphi'' (\infty) = 0 \qquad (4.4)$$

Заметим, что уравнения (4.1) при условии (4.2) и первом условии (4.4) совпадают с уравнениями движения затопленной струи ньютоновской вязкой жидкости ($\psi = 0$). Если принять условия (4.2), (4.3) и второе условие (4.4), то решение задачи о затопленной струе жидкости с моментными напряжениями приводит к интегрированию (4.1).

Автор благодарит Д. Д. Ивлева и А. Т. Листрова за постановку задачи и руководство при выполнении работы.

Поступила 29 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Grad H. Statistical Mechanics. Thermodynamics and Fluid Dynamics of Systems with an Arbitrary Number of Integrals Communs. Pure and Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 4, pp. 455—494.
2. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Асимметричная гидромеханика. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
5. Овсянников Л. В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во Новосиб. ун-та, 1966.
6. Павловский Ю. Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 2.