где

$$
\begin{aligned}
x_{1003} = u_{1003} - {}^9/_5\,(x_{0120}\,x_{0012} + y_{0120}y_{0012}) - \omega_2^{-1}\,(x_{1002}y_{1011} + x_{1011}y_{1002}) + \\
+ 4\omega_2^{-2}\,(x_{1002}x_{0201} + y_{1002}y_{0201}) + {}^3/_2\,(x_{0003}\,x_{0111} + y_{0003}y_{0111}) \\
y_{1003} = v_{1003} - {}^9/_5\,(x_{0120}y_{0012} - x_{0012}y_{0120}) - \omega_2^{-1}\,(y_{1011}y_{1002} - x_{1011}x_{1002}) + \\
+ 4\omega_2^{-2}\,(x_{0201}y_{1002} - x_{1002}y_{0201}) + {}^3/_2\,(x_{0111}\,y_{0003} - x_{0003}y_{0111})
\end{aligned}
$$

При исследовании устойчивости в конкретных задачах надо привести функцию Гамильтона к виду (5.1) а затем воспользоваться формулами этого параграфа и теоремами 2.1 и 3.1.

Автор благодарит В. А. Сарычева за полезные обсуждения результатов работы.

Поступила 27 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Изд. 2-е, М.— Л., «Наука», 1966.
2. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Усп. матем. н., 1963, т. 18, вып. 6.
3. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика, М.— Л., Гостехиздат, 1937.
4. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.— Л., Гостехиздат, 1941.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 3-е, «Наука», 1965.
6. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
7. Маркеев А. П. Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника. Космич. исслед., 1967, т. 5, вып. 3.
8. Булгаков Б. В. О нормальных координатах. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.

О ВЛИЯНИИ НЕГОЛОНОМНОЙ СВЯЗИ НА СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Э. Г. Альбрехт, Г. С. Шелементьев

(Свердловск)

Исследуется вопрос об изменении свойства стабилизируемости механической системы при наложении на нее неголономной связи. Указываются условия, при которых наложение неголономной связи ухудшает стабилизируемость системы. Выделяются также случаи, когда неголономная связь наоборот улучшает стабилизируемость механической системы.

§ 1. Для полноты изложения приведем сначала некоторые известные факты из теории стабилизации неголономных систем [1-4].

Пусть имеется механическая система, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1,\ldots, q_{n+1}$ и пусть движение этой системы подчинено неголономной связи, уравнение которой можно записать в виде

$$
\dot{q}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,(q_1, \ldots, q_{n+1})\,\dot{q}_i \qquad (1.1)
$$

Предположим, что данная система имеет однопараметрическое семейство Q неустойчивых положений равновесия [2]

$$
q_i = q_i(q), \;\; \alpha \leqslant q \leqslant \beta \;\; (\alpha, \; \beta = \mathrm{const}), \;\; (i = 1,\ldots, \; n + 1) \qquad (1.2)
$$

Рассмотрим задачу [1,3] определения управляющей силы $u(q_1,\ldots, q_{n+1}, \dot{q}_1,\ldots \ldots, \dot{q}_{n+1})$, при действии которой на систему положения равновесия (1.2) становятся асимптотически устойчивыми. Как обычно, в таких случаях составим уравнения возмущенного движения. Для этого от координат $q_1,\ldots, q_{n+1}$ перейдем к новым координатам $s_1,\ldots,$

s_n и ξ при помощи замены

$$s_i = q_i - q_i(q) \qquad (i = 1, \ldots, n + 1)$$

$$\xi = s_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \omega_i (q_1 (q), \ldots, q_{n+1}(q)) s_i$$

Здесь ω_i — коэффициенты, фигурирующие в уравнении неголономной связи (1.1). Пользуясь далее уравнениями движения неголономной системы [5,6] в форме Аппеля или в форме Лагранжа, получим уравнения возмущенного движения в виде [4,7],

$$\dot{z} = A(q)\, z + b(q)u + c(q)\xi + \varphi_1(q,\ \xi,\ z,\ u)$$

$$\dot{\xi} = \varphi_2(q,\ \xi,\ z) \qquad (\varphi_2(q,\ \xi,\ 0) \equiv 0) \tag{1.3}$$

Здесь $z = \{z_1, \ldots, z_{2n}\}$ — $2n$-мерный вектор, компоненты которого определяются равенствами $z_{2i-1} = s_i$, $z_{2i} = s_i^{\cdot}$ $(i = 1, \ldots, n)$; $A(q)$ — $2n \times 2n$-матрица; $b(q)$, $c(q)$ и $\varphi_1 (q, \xi, z, u)$ — $2n$-мерные векторы. Будем предполагать, что элементы матрицы A, векторов b, c, φ_1 и функция φ_2 являются аналитическими относительно переменных q, ξ, z_i, u, причем разложение функций φ_1 и φ_2 начинается не ниже, чем с членов второго порядка малости по переменным ξ, z_i и u.

Из (1.3) следует, что имеем дело с особенным случаем в критическом случае одного нулевого корня [1]. Поэтому стабилизация положений равновесия (1.2) до асимптотической устойчивости по Ляпунову воздействием u невозможна.

Примем следующее определение.

Определение 1.1. Семейство положений равновесия (1.2) неголономной системы будем называть асимптотически устойчивым, если любое из этих положений равновесия устойчиво по Ляпунову и если для любого возмущенного движения, близкого к какому-либо из этих равновесий $q_i(q^*)$, выполняется условие

$$\lim_{t\to\infty} q_i(t) = q_i(q^* + \varepsilon) \ \ (i = 1, \ldots, n + 1) \ (\alpha \leqslant q^* \leqslant \beta)$$

Здесь ε — достаточно малое положительное число, если только малы начальные возмущения $q_i - q_i(q^*)$ $(i = 1, \ldots, n + 1)$.

В соответствии с этим определением рассмотрим задачу о стабилизации семейства положений равновесия (1.2) неголономной системы.

Задача 1.1. Требуется найти такое управление $u = u\ (q,z)$, чтобы семейство положений равновесия (1.2) стало асимптотически устойчивым в смысле определения 1.1.

Справедлив следующий результат [4].

Теорема 1.1. Пусть линейная система

$$\dot{z} = A(q)z + b(q)u \tag{1.4}$$

стабилизируема воздействием u до асимптотической устойчивости по Ляпунову при любом q из отрезка $[\alpha, \beta]$, тогда задача 1.1 разрешима, т. е. система (1.3) стабилизируема в смысле определения 1.1, при этом стабилизирующее воздействие u имеет вид

$$u\,(q,\ z) = \sum_{i=1}^{2n} p_i\,(q)\, z_i$$

где $p_i\,(q)$ суть аналитические функции переменной q.

§ 2. Рассмотрим задачу о стабилизации системы, состоящей из двух тяжелых материальных точек M_1 и M_2, связанных с тонким невесомым стержнем так, что точка M_1 жестко прикреплена к стержню, а точка M_2 может скользить без трения вдоль этого стержня. Пусть точки M_1 и M_2 находятся на поверхности двух эллипсоидальных горок. Тогда такая система будет иметь неустойчивое положение равновесия, соответствующее случаю, когда точки M_1 и M_2 находятся на вершинах горок. Будем предполагать, что система точек M_1 и M_2 управляется внутренними силами взаимного притяжения (или отталкивания). В качестве обобщенных координат q_i выберем координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 точек M_1 и M_2 в декартовой системе отсчета, ось z которой направлена вверх по вертикали в данном месте Земли. Пусть кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид

$$T = {}^1/_2\,(x_1^{\cdot 2} + y_1^{\cdot 2} + x_2^{\cdot 2} + y_2^{\cdot 2}) + T_1(x,\ y,\ x^{\cdot},\ y^{\cdot})$$

$$\Pi = -{}^1/_2\,[{}^1/_2\,(x_1 + y_1 - 1)^2 + 2\,(y_1 - x_1 + 1)^2 + x_2^2 + 6x_2y_2 + 6y_2^2] + \Pi_1(x,\ y)$$

Предполагается, что функции T_1 и Π_1 разлагаются в ряды в некоторой окрестности положения равновесия

$$x_1 = 1,\ y_1 = x_2 = y_2 = 0 \tag{2.1}$$

При этом разложение начинается с членов не ниже третьего порядка по x_i, y_i, $x_i^{\cdot}$, $y_i^{\cdot}$. Тогда уравнения движения системы точек M_1 и M_2 в линейном приближении будут иметь вид (2.2)

$$z_1^{\cdot\cdot} = {}^5/_2 z_1 - {}^3/_2 z_2 - u, \quad z_2^{\cdot\cdot} = -{}^3/_2 z_1 + {}^5/_2 z_2, \quad z_3^{\cdot\cdot} = z_3 + 3z_4 + u, \quad z_4^{\cdot\cdot} = 3z_3 + 6z_4$$

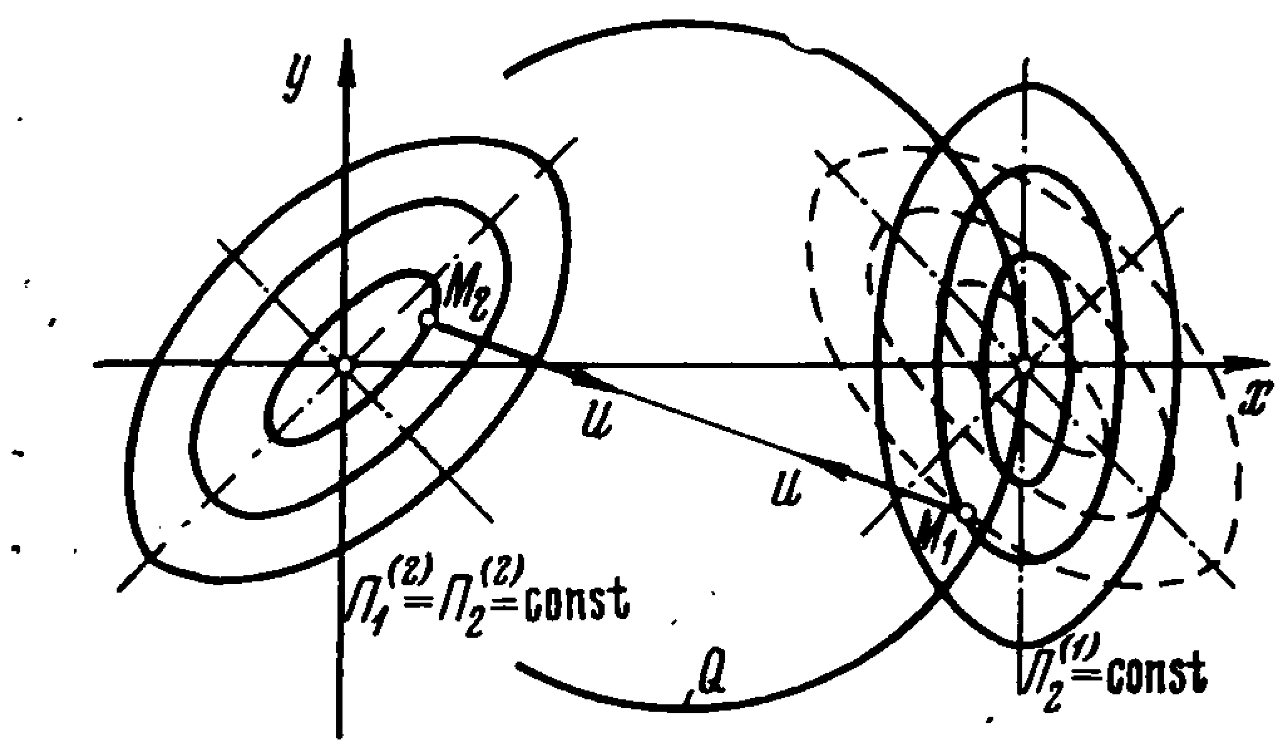
Здесь z_i — отклонения от положения равновесия (2.1), т. е.

$$z_1 = x_1 - 1,\quad z_2 = y_1,\quad z_3 = x_2,\quad z_4 = y_2$$

Составим матрицу A_1 и вектор b_1

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 2.5 & -1.5 & 0 & 0 \\ -1.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{Vmatrix}, \qquad b_1 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Оказывается, что векторы b_1, A_1b_1, $A_1^2b_1$, $A_1^3b_1$ линейно независимы и, следовательно, система (2.2) стабилизируема [1, 3, 8] управлением u до асимптотической устойчивости по Ляпунову. Этот факт можно было бы вывести и из общих соображений о стабилизируемости голономных систем [8], так как здесь прямая, соединяющая точки M_1 и M_2 в положении равновесия, не совпадает с главными направлениями поверхностей уровня $\Pi_1^{(i)} = \mathrm{const}$ ($i = 1, 2$) потенциальных энергий точек M_1 и M_2, соответственно.



Отметим здесь, что наложение неголономной связи вида (1.1) на систему (2.2), как это следует из теоремы 1.1, может лишь ухудшить ее стабилизируемость.

Повернем эллипс $\Pi_1^{(1)} = \mathrm{const}$ на угол 45° по часовой стрелке, тогда линия, соединяющая точки M_1 и M_2 в положении равновесия, совпадет с главным направлением эллипса $\Pi_2^{(1)} = \mathrm{const}$ (фигура), и будет образована уже нестабилизируемая голономная система. Действительно, тогда

$$\Pi = -{}^1/_2\,[(x_1 - 1)^2 + 4y_1^2 + x_2^2 + 6x_2y_2 + 6y_2^2] + \Pi_2(x,\ y) \tag{2.3}$$

Система точек M_1 и M_2, очевидно, по-прежнему будет иметь положение равновесия (2.1). Ее движение в окрестности этого положения равновесия в первом приближении опишется уравнениями

$$z_1^{\cdot\cdot} = z_1 - u,\quad z_2^{\cdot\cdot} = 4z_2,\quad z_3^{\cdot\cdot} = z_3 + 3z_4 + u,\quad z_4^{\cdot\cdot} = 3z_3 + 6z_4 \tag{2.4}$$

Система (2.4), как и следовало ожидать [1,8], нестабилизируема силой u, направленной вдоль стержня.

Покажем, что стабилизируемость системы (2.4) можно улучшить за счет наложения на нее неголономной связи. Для этого снабдим точку M_1 колесиком с острым режущим краем так, чтобы ее скорость была все время направлена вдоль стержня, т. е. наложим на систему точек M_1 и M_2 неголономную связь вида

$$(y_2 - y_1)\, x_1^{\cdot} - (x_2 - x_1)\, y_1^{\cdot} = 0 \tag{2.5}$$

Так как система (2.4) принята за исходную, то по-прежнему предполагаем, что потенциальная энергия системы определяется равенством (2.3). Проделав необходимые вычисления [2,7], получаем, что система точек M_1 и M_2 имеет однопараметрическое семейство Q положений равновесия

$$x_1 = q, \quad y_1 = \pm {}^1/_2 \sqrt{q(1-q)} \quad (0 < q \leqslant 1), \quad x_2 = y_2 = 0 \tag{2.6}$$

Значению $q = 1$ соответствует интересующее нас положение равновесия (2.1). При $q = 1$ система (1.4), характеризующая стабилизируемость неголономной системы. имеет вид

$$\begin{array}{ll} z_1^{\cdot\cdot} = z_1 - u & (z_1 = x_1 - 1) \\ z_2^{\cdot\cdot} = z_2 + 3z_3 + u & (z_2 = x_2) \\ z_3^{\cdot\cdot} = 3z_2 + 6z_3 & (z_3 = y_2) \end{array} \tag{2.7}$$

Система (2.7) стабилизируема воздействием u до асимптотической устойчивости по Ляпунову. Это следует из того, что векторы b_2, $A_2 b_2$, $A_2 b_2$ линейно независимы. Здесь

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{Vmatrix}, \qquad b_2 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Следовательно, система (1.4) стабилизируема и при $0 < \alpha \leqslant q \leqslant 1$. Поэтому из теоремы 1.1 вытекает, что нестабилизируемая голономная система точек M_1 и M_2 становится стабилизируемой в смысле определения 1.1 при наложении на нее неголономной связи (2.5).

Здесь для наглядности была выбрана простейшая модель механической системы, состоящей из двух точек. Однако аналогичные рассуждения справедливы и в общем случае.

Пусть голономная механическая система управляется силой u, направление которой не совпадает ни с одним из направлений главных нормальных координат. Эта система стабилизируема до асимптотической устойчивости по Ляпунову [8].Следовательно, наложение неголономной связи на такую систему, согласно теореме 1.1, может лишь ухудшить ее стабилизируемость. Напротив, если управляющая сила u действует в направлении какой-либо главной нормальной координаты, то система нестабилизируема. За счет наложения на нее неголономной связи вида (1.1), стесняющей перемещения системы в направлениях, не совпадающих с направлением этой нормальной координаты, можно добиться ее стабилизируемости до асимптотической устойчивости в смысле определения 1.1.

Поступила 12 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Изд. 2-е, М., «Наука», 1966.
2. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Устойчивость состояний равновесия неголономных систем. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
3. Красовский Н. Н. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
4. Шелементьев Г. С. О стабилизации неголономной системы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
5. Аппель П. Теоретическая механика, т. 2, М., Физматгиз, 1960.
6. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
7. Румянцев В. В. Об устойчивости движения неголономных систем. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
8. Габриелян М. С. О стабилизации неустойчивых движений механических систем. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.