# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСА

**А. П. Маркеев** (Москва)

Изучается вопрос об устойчивости положения равновесия канонической системы с двумя степенями свободы в случае резонанса. Полученные результаты применяются для исследования устойчивости стационарных вращений спутника.

**§ 1. Постановка задачи.** Рассмотрим автономную каноническую систему с двумя степенями свободы

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

Пусть начало координат является положением равновесия системы, и гамильтониан $H$ есть аналитическая функция обобщенных координат и импульсов $q_i$, $p_i$, разлагающаяся в ряд

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots + H_m + \ldots \tag{1.2}$$

где $H_m$ — однородная функция степени $m$ относительно $q_i$, $p_i$.

Если $H_2$ — знакоопределенная функция, то, согласно теореме Ляпунова, положение равновесия устойчиво [1]. Пусть $H_2$ не является знакоопределенной функцией, но система устойчива по первому приближению. Тогда, при некоторых ограничениях на частоты линейной системы $\omega_1$, $\omega_2$ и на коэффициенты форм $H_3$ и $H_4$, вопрос об устойчивости полной системы (1.1) можно решить при помощи теоремы, приведенной в [2]. Существенным ограничением этой теоремы будет требование отсутствия резонанса: для частот $\omega_1$ и $\omega_2$ должны выполняться неравенства

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0 \tag{1.3}$$

где $k_i$ — целые числа, удовлетворяющие условию $0 < |k_1| + |k_2| \leqslant 4$. Однако известны примеры [3], когда при наличии резонанса система (1.1) может быть неустойчивой.

Случай, когда одна из частот равна нулю, и случай равных частот обычно соответствуют границе области устойчивости линейной системы и в дальнейшем не рассматриваются. Считая $\omega_1 > \omega_2 > 0$, получаем, что неравенства (1.3) не выполняются при $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$. Цель настоящей работы состоит в исследовании устойчивости положения равновесия системы (1.1) в этих случаях резонанса. Для приведения функции Гамильтона к форме, отражающей резонансный характер задачи, применяется преобразование Биркгофа [4]. С точки зрения устойчивости преобразованная и исходная системы эквивалентны. Результаты исследования устойчивости выражаются через коэффициенты гамильтониана (1.2), записанного в форме, при которой его квадратичная часть $H_2$ соответствует нормальным колебаниям.

**§ 2. Исследование устойчивости при $\omega_1 = 2\omega_2$.** После простых преобразований (см. § 5) гамильтониан задачи примет вид (2.1)

$$H = i\omega_1 q_1' p_1' + i\omega_2 q_2' p_2' + \sum_{\nu=3} g'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} q_1'^{\nu_1} q_2'^{\nu_2} p_1'^{\nu_3} p_2'^{\nu_4} + \sum_{\nu=4} h'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} q_1'^{\nu_1} q_2'^{\nu_2} p_1'^{\nu_3} p_2'^{\nu_4} + O(|q|^5)$$

Здесь

$$|q| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2}, \qquad \nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$$

Применяя преобразование Биркгофа, попытаемся уничтожить члены третьей степени в (2.1). Оказывается, что в случае $\omega_1 = 2\omega_2$ можно уничтожить все члены, кроме резонансных, и в новых переменных $q_i''$, $p_i''$ гамильтониан станет таким:

$$H = i\omega_1 q_1'' p_1'' + i\omega_2 q_2'' p_2'' + g'_{1002} q_1'' p_2''^2 + g'_{0210} q_2''^2 p_1'' + O(|q|^4) \tag{2.2}$$

где (см. § 5)

$$g'_{1002} = x_{1002} + iy_{1002}, \quad g_{0210}' = -{}^1\!/_2\,\omega_1^{-1}\omega_2^2 (y_{1002} + ix_{1002})$$

После канонической замены переменных

$$q_1'' = \omega_1^{-1/2}(q_1^\circ - ip_1^\circ), \qquad q_2'' = \omega_2^{-1/2}(iq_2^\circ - p_2^\circ),$$
$$p_1'' = {}^1/_2\omega_1^{1/2}(-iq_1^\circ + p_1^\circ), \qquad p_2'' = {}^1/_2\omega_2^{1/2}(q_2^\circ - ip_2^\circ) \tag{2.3}$$

гамильтониан принимает вид (2.4)

$$H = {}^1/_2\omega_1(q_1^{\circ 2} + p_1^{\circ 2}) - {}^1/_2\omega_2(q_2^{\circ 2} + p_2^{\circ 2}) + {}^1/_2\sqrt{2\omega_2}\,[{}^1/_2(q_2^{\circ 2} - p_2^{\circ 2})(x_{1002}q_1^\circ + y_{1002}p_1^\circ) + q_2^\circ p_2^\circ(y_{1002}q_1^\circ - x_{1002}p_1^\circ)] + O(|q|^4)$$

Пусть выполняется неравенство

$$x_{1002}^2 + y_{1002}^2 \neq 0 \tag{2.5}$$

Тогда совершим еще одно каноническое преобразование

$$q_1^\circ = q_1^*\cos\theta - p_1^*\sin\theta, \quad q_2^\circ = q_2^*, \qquad p_1^\circ = q_1^*\sin\theta + p_1^*\cos\theta, \quad p_2^\circ = p_2^* \tag{2.6}$$

Здесь

$$\sin\theta = y_{1002}(x_{1002}^2 + y_{1002}^2)^{-1/2}, \quad \cos\theta = x_{1002}(x_{1002}^2 + y_{1002}^2)^{-1/2}$$

Получим гамильтониан

$$H = \omega_2(q_1^{*2} + p_1^{*2}) - {}^1/_2\omega_2(q_2^{*2} + p_2^{*2}) - {}^1/_2\sqrt{2\omega_2(x_{1002}^2 + y_{1002}^2)}\times$$
$$\times[{}^1/_2 q_1^*(p_2^{*2} - q_2^{*2}) + p_1^*q_2^*p_2^*] + O(|q|^4) \tag{2.7}$$

Покажем, что при выполнении неравенства (2.5) положение равновесия неустойчиво. Для этого воспользуемся теоремой Четаева [5]. В рассматриваемом случае вопрос о неустойчивости разрешается функцией

$$V = {}^1/_2 p_1^*(p_2^{*2} - q_2^{*2}) - q_1^*q_2^*p_2^* \tag{2.8}$$

За область $V > 0$ можно принять, например, область, определяемую неравенствами $q_1^* < 0$, $p_1^* < 0$, $p_2^* < q_2^* < 0$. Производная $dV/dt$ в силу уравнений движения с гамильтонианом (2.7) будет такой: (2.9)

$$dV/dt = {}^1/_8\sqrt{2\omega_2(x_{1002}^2 + y_{1002}^2)}\,(q_2^{*2} + p_2^{*2})[(q_2^{*2} + p_2^{*2}) + 4(q_1^{*2} + p_1^{*2})] + Q(|q|^5)$$

Из (2.9) видно, что в области $V > 0$ при достаточно малых $q_i^*$, $p_i^*$ функция $dV/dt$ является определенно положительной. Это и доказывает неустойчивость положения равновесия при условии (2.5).

Пусть теперь условие (2.5) не выполняется. Тогда в гамильтониане (2.1) отсутствуют слагаемые $g_{1002}'q_1'p_2'^2$ и $g_{0210}'q_2'^2p'_1$, и, следовательно, функцию Гамильтона (2.1) можно при помощи преобразования Биркгофа привести к виду (2.10)

$$H = i\omega_1 q_1''p_1'' + i\omega_2 q_2''p_2'' + l_{2020}(q_1''p_1'')^2 + l_{1111}q_1''p_1''q_2''p_2'' + l_{0202}(q_2''p_2'')^2 + O(|q|^5)$$

где $l_{2020}$, $l_{1111}$, $l_{0202}$ вещественны и определяются по формулам, приведенным в § 5. Из результатов работы [2] следует, что при выполнении неравенства

$$l_{2020} - 2l_{1111} + 4l_{0202} \neq 0 \tag{2.11}$$

положение равновесия будет устойчивым.

Таким образом, доказана следующая теорема.

*Теорема 2.1.* Если для гамильтониана возмущенного движения выполняется неравенство $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво. Если же $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 = 0$, а $l_{2020} - 2l_{1111} + 4l_{0202} \neq 0$, то положение равновесия устойчиво.

§ 3. **Исследование устойчивости при $\omega_1 = 3\omega_2$.** Рассмотрим случай резонанса $\omega_1 = 3\omega_2$. Тогда при помощи преобразования Биркгофа можно уничтожить все члены третьей степени в (2.1). Из членов четвертой степени останутся резонансные и содержащие $q_i''$ и $p_i''$ в одинаковых степенях. Таким образом, функция Гамильтона в случае резонанса $\omega_1 = 3\omega_2$ имеет в нормальной форме следующий вид:

$$H = i\omega_1 q_1'' p_1'' + i\omega_2 q_2'' p_2'' + l_{2020}(q_1'' p_1'')^2 + l_{1111} q_1'' p_1'' q_2'' p_2'' + \\ + l_{0202}(q_2'' p_2'')^2 + l_{1003} q_1'' p_2''^3 + l_{0310} q_2''^3 p_1'' + O(|q|^5) \tag{3.1}$$

Здесь

$$l_{2020} = h_{2020}' - \frac{3}{i\omega_1} g_{3000}' g_{0030}' - \frac{3}{i\omega_1} g_{2010}' g_{1020}' + \frac{1}{i(2\omega_1 - \omega_2)} g_{0120}' g_{2001}' - \\ - \frac{1}{i\omega_2} g_{1110}' g_{1011}' - \frac{1}{i(2\omega_1 + \omega_2)} g_{2100}' g_{0021}'$$

$$l_{1111} = h_{1111}' + \frac{4}{i(\omega_1 - 2\omega_2)} g_{0210}' g_{1002}' - \frac{4}{i(\omega_1 + 2\omega_2)} g_{1200}' g_{0012}' - \frac{4}{i(2\omega_1 + \omega_2)} g_{2100}' g_{0021}' - \\ - \frac{4}{i(2\omega_1 - \omega_2)} g_{2001}' g_{0120}' - \frac{2}{i\omega_1} g_{2010}' g_{0111}' - \frac{2}{i\omega_1} g_{1101}' g_{1020}' - \frac{2}{i\omega_2} g_{0201}' g_{1011}' - \frac{2}{i\omega_2} g_{1110}' g_{0102}'$$

$$l_{0202} = h_{0202}' - \frac{3}{i\omega_2} g_{0300}' g_{0003}' - \frac{3}{i\omega_2} g_{0102}' g_{0201}' - \frac{1}{i(\omega_1 - 2\omega_2)} g_{1002}' g_{0210}' - \\ - \frac{1}{i\omega_1} g_{1101}' g_{0111}' - \frac{1}{i(\omega_1 + 2\omega_2)} g_{1200}' g_{0012}' \tag{3.2}$$

$$l_{1003} = h_{1003}' - \frac{2}{i(2\omega_1 - \omega_2)} g_{2001}' g_{0012}' - \frac{1}{i(\omega_1 - 2\omega_2)} g_{1011}' g_{1002}' + \\ + \frac{2}{i\omega_2} g_{1002}' g_{0102}' - \frac{3}{i\omega_1} g_{0103}' g_{1101}'$$

$$l_{0310} = h_{0310}' - \frac{2}{i(\omega_1 + 2\omega_2)} g_{0120}' g_{1200}' - \frac{1}{i\omega_2} g_{1110}' g_{0210}' + \\ + \frac{2}{i(\omega_1 - 2\omega_2)} g_{0210}' g_{0201}' - \frac{1}{i\omega_2} g_{0300}' g_{0111}'$$

Заметим, что $l_{2020}$, $l_{1111}$, $l_{0202}$ вещественны, а

$$l_{1003} = x_{1003} + iy_{1003}, \qquad l_{0310} = -{}^1/_{12}\omega_2^2 (x_{1003} - iy_{1003}) \tag{3.3}$$

Формулы для расчета коэффициентов (3.2) через коэффициенты исходного гамильтониана приведены в § 5.

Сделаем замену переменных (2.3). Получаем

$$H = {}^3/_2\,\omega_2 (q_1^{\circ 2} + p_1^{\circ 2}) - {}^1/_2\,\omega_2 (q_2^{\circ 2} + p_2^{\circ 2}) - {}^1/_4\, l_{2020} (q_1^{\circ 2} + p_1^{\circ 2})^2 + \\ + {}^1/_4\, l_{1111} (q_1^{\circ 2} + p_1^{\circ 2})(q_2^{\circ 2} + p_2^{\circ 2}) - {}^1/_4\, l_{0202} (q_2^{\circ 2} + p_2^{\circ 2})^2 + \\ + {}^1/_{12} \sqrt{3}\omega_2 [p_2^\circ (p_2^{\circ 2} - 3q_2^{\circ 2})(x_{1003} p_1^\circ - y_{1003} q_1^\circ) + \\ + q_2^\circ (q_2^{\circ 2} - 3p_2^{\circ 2})(y_{1003} p_1^\circ + x_{1003} q_1^\circ)] + O(|q|^5) \tag{3.4}$$

Если $x_{1003}^2 + y_{1003}^2 = 0$, то, как следует из [2], при выполнении неравенства

$$l_{2020} - 3l_{1111} + 9l_{0202} \neq 0 \tag{3.5}$$

положение равновесия устойчиво. Пусть теперь $x_{1003}^2 + y_{1003}^2 \neq 0$. Тогда после канонического преобразования (2.6), где теперь

$$\sin\theta = x_{1003} (x_{1003}^2 + y_{1003}^2)^{-1/2}, \qquad \cos\theta = -y_{1003} (x_{1003}^2 + y_{1003}^2)^{-1/2}$$

получаем гамильтониан в виде

$$H = {}^3/_2\,\omega_2 (q_1^{*2} + p_1^{*2}) - {}^1/_2\,\omega_2 (q_2^{*2} + p_2^{*2}) - {}^1/_4\, l_{2020} (q_1^{*2} + p_1^{*2})^2 + \\ + {}^1/_4\, l_{1111} (q_1^{*2} + p_1^{*2})(q_2^{*2} + p_2^{*2}) - {}^1/_4\, l_{0202} (q_2^{*2} + p_2^{*2})^2 + \\ + {}^1/_{12}\,\omega_2 \sqrt{3(x_{1003}^2 + y_{1003}^2)}\, [q_1^* p_2^* (p_2^{*2} - 3q_2^{*2}) - p_1^* q_2^* (q_2^{*2} - 3p_2^{*2})] + O(|q|^5) \tag{3.6}$$

Покажем, что положение равновесия при условии

$$3\omega_2 \sqrt{x_{1003}^2 + y_{1003}^2} \geqslant |l_{2020} - 3l_{1111} + 9l_{0202}| \tag{3.7}$$

является неустойчивым. Снова воспользуемся теоремой Четаева. Функцию $V$ возьмем в виде $V = V_1 V_2$, где

$$\begin{aligned} V_1 &= (p_2^{*2} + q_2^{*2} - 3p_1^{*2} - 3q_1^{*2})^2 - (p_2^{*2} + q_2^{*2})^k \\ V_2 &= p_1^* p_2^* (p_2^{*2} - 3q_2^{*2}) + q_1^* q_2^* (q_2^{*2} - 3p_2^{*2}) \end{aligned} \quad (k > 2) \tag{3.8}$$

Ясно, что вблизи начала координат существует область $V > 0$. Например, это будет совокупность точек $V_1 < 0$, лежащих вблизи поверхности $p_2^{*2} + q_2^{*2} = 3(p_1^{*2} + q_1^{*2})$ в области $V_2 < 0$, определяемой неравенствами: $p_1^* < 0$, $q_1^* > 0$, $p_2^* > \sqrt{3} q_2^* > 0$.

Параметр $k$ в (3.8) подберем так, чтобы функция $dV / dt$ была положительной и область $V > 0$ лежала внутри области $dV / dt > 0$.

Производную функции $V$ удобнее вычислить, перейдя предварительно к каноническим полярным координатам

$$q_i^* = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, \qquad p_i^* = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i \quad (i = 1,2).$$

Преобразованная функция Гамильтона примет вид

$$\begin{aligned} H &= 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 - l_{2020} r_1^2 + l_{1111} r_1 r_2 - l_{0202} r_2^2 + \\ &+ {}^1/_3\, \omega_2 \sqrt{3 (x_{1003}^2 + y_{1003}^2)}\, r_2 \sqrt{r_1 r_2} \sin (\varphi_1 + 3\varphi_2) + O(|q|^5) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Сделаем еще одно каноническое преобразование

$$P_1 = {}^1/_3\, r_2, \qquad Q_1 = \varphi_1 + 3\varphi_2, \qquad P_2 = -{}^1/_3\, r_1 + {}^1/_9\, r_2, \qquad Q_2 = -3\varphi_1$$

Гамильтониан в новых переменных станет таким:

$$H = a_2 P_1^2 + a_1 P_1 P_2 + a_0 P_1 \sqrt{P_1 (P_1 - 3P_2)} \sin Q_1 - 9 l_{2020} P_2^2 - 9\omega_2 P_2 + O(|q|^5) \tag{3.10}$$

Здесь

$$a_0 = 3\omega_2 \sqrt{x_{1003}^2 + y_{1003}^2}, \qquad a_1 = 3 (2 l_{2020} - 3 l_{1111}), \qquad a_2 = -l_{2020} + 3 l_{1111} - 9 l_{0202}$$

Функция $V$ в новых переменных имеет вид

$$V = 12 \sqrt{3} [(18 P_2)^2 - (6 P_1)^k] P_1 \sqrt{P_1 (P_1 - 3P_2)} \cos Q_1 \tag{3.11}$$

В рассматриваемой области вблизи поверхности $p_2^{*2} + q_2^{*2} = 3(p_1^{*2} + q_1^{*2})$ (в новых переменных $P_2 = 0$) в области $V_2 < 0$ (в новых переменных $\cos Q_1 < 0$) функция $V$ принимает положительные значения при условии

$$P_2 = {}^1/_{18} A (6P_1)^{k/2} \tag{3.12}$$

где $A$ — произвольное число из интервала $(-1,1)$.

Вычисляя производную функции (3.11) в силу уравнений движения с гамильтонианом (3.10) и используя (3.12), получаем, что при $2 < k < 3$ функция $dV / dt$ имеет вид

$$dV / dt = 12 \sqrt{3} [k 6^k a_0 \cos^2 Q_1 + 12 (1 - A^2) (a_0 + a_2 \sin Q_1) + f(P_1)] P_1^{k+3} \tag{3.13}$$

Здесь $f(P_1)$ сколь угодно мала при $P_1$, стремящемся к нулю. Поэтому в достаточной близости от начала координат знак производной определяется знаком выражения

$$k 6^k a_0 \cos^2 Q_1 + 12 (1 - A^2) (a_0 + a_2 \sin Q_1) \tag{3.14}$$

Из (3.14) видно, что при $a_0 \geqslant |a_2|$ $dv / dt > 0$; причем внутри области $V > 0$ производная в нуль не обращается. Тем самым функция $V$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Четаева, и доказано утверждение о неустойчивости при условии (3.7).

Пусть теперь неравенство (3.7) не выполняется. Если в разложении гамильтониана (1.2) ограничиться членами не выше четвертого порядка по $q_i$, $p_i$, то можно показать, что в этом приближении положение равновесия будет устойчивым

Действительно, тогда система с гамильтонианом (3.10) имеет два интеграла

$$P_2 = \mathrm{const}, \qquad a_2 P_1^2 + a_1 P_1 P_2 + a_0 P_1 \sqrt{P_1(P_1 - 3P_2)} \sin Q_1 = \mathrm{const}$$

Рассмотрим функцию

$$V = [a_2 P_1^2 + a_1 P_1 P_2 + a_0 P_1 \sqrt{P_1(P_1 - 3P_2)} \sin Q_1]^2 + P_2^4 \tag{3.15}$$

Ясно, что $dV / dt = 0$, и легко проверить, что при $a_0 < |a_2|$ функция (3.15) является определенно положительной в окрестности $q_i = p_i = 0$. Отсюда, согласно теореме Ляпунова [1], следует устойчивость положения равновесия в рассматриваемом приближении. Таким образом, доказана следующая теорема.

*Теорема 3.1.* Если для гамильтониана возмущенного движения одновременно выполняются неравенства

$$x_{1003}^2 + y_{1003}^2 \neq 0, \qquad 3\omega_2 \sqrt{x^2_{1003} + y_{1003}^2} \geqslant | l_{2020} - 3l_{1111} + 9l_{0202}|,$$

то положение равновесия неустойчиво; в случае обратного знака в последнем неравенстве при учете в функции Гамильтона членов не более четвертого порядка имеет место устойчивость. При одновременном выполнении условий

$$x_{1003}^2 + y_{1003}^2 = 0, \quad l_{2002} - 3l_{1111} + 9l_{0202} \neq 0$$

положение равновесия устойчиво.

§ 4. **Об устойчивости стационарных вращений спутника.** В качестве приложения рассмотрим устойчивость стационарных вращений спутника в случае резонанса. Известно [6], что при движении динамически симметричного спутника по круговой орбите в центральном ньютоновском гравитационном поле он может занимать такие положения в орбитальной системе координат, когда ось симметрии: 1) перпендикулярна плоскости орбиты; 2) лежит в плоскости, перпендикулярной радиусу-вектору, 3) лежит в плоскости, перпендикулярной вектору скорости. Спутник при этом вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью.

Устойчивость стационарного вращения типа 2 исследована полностью. Для движений типа 1 и 3 в случае, когда $H_2$ не является знакоопределенной функцией, но движение устойчиво по первому приближению, остались не исследованными [7] случаи резонанса $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$.

Для движения типа I функция Гамильтона (1.2) содержит $H_m$ только для четных $m$. Поэтому $x_{1002}^2 + y_{1002}^2 \equiv 0$, и, согласно § 2, если при резонансе $\omega_1 = 2\omega_2$ выполняется неравенство (2.11), то движение будет устойчивым. Неравенство (2.11) нарушается [7] в двух точках плоскости параметров $\alpha, \beta$, где $\alpha = C/A$, $\beta = r_0/\omega_0$ ($A$ и $C$ — экваториальный и полярный моменты инерции спутника, $r_0$ — проекция абсолютной угловой скорости на ось симметрии, являющаяся интегралом движения, $\omega_0$ — угловая скорость движения центра масс по орбите). При исследовании устойчивости в случае $\omega_1 = 3\omega_2$ была подсчитана функция $a_0 - |a_2|$ вдоль кривой $\omega_1 = 3\omega_2$, начиная с больших по абсолютной величине значений $\beta$ ($\beta = -114$). Оказалось, что она положительна при $-1.743 < \beta < -1.566$ и $0.384 < \beta < 0.45$. Следовательно, согласно § 3, при этих значениях параметров стационарное вращение типа 1 неустойчиво. На остальной части резонансной кривой удается доказать устойчивость только при учете в гамильтониане (1.2) членов до четвертого порядка включительно.

Расчеты показывают, что в случае движения типа 3 будет неустойчивость как при $\omega_1 = 2\omega_2$, так и при $\omega_1 = 3\omega_2$ вдоль всей резонансной кривой.

§ 5. **Расчетные формулы.** Известно (см., например, [8]), что существует вещественное линейное каноническое преобразование, приводящее $H_2$ к виду, соответствующему нормальным колебаниям. Поэтому можно считать, что гамильтониан (1.2) имеет вид

$$H = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) - \tfrac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2) + \sum_{\nu=3} g_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\nu_3} p_2^{\nu_4} +$$

$$+ \sum_{\nu=4} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\nu_3} p_2^{\nu_4} + \cdots \tag{5.1}$$

Для приведения гамильтониана (5.1) к виду, удобному для применения преобразования Биркгофа, сделаем каноническую замену переменных

$$\begin{aligned} q_1 &= {}^1/_2\, q_1' + i\omega_1^{-1} p_1', \qquad p_1 = {}^i/_2\, \omega_1 q_1' + p_1', \\ q_2 &= -\, {}^i/_2\, q_2' + \omega_2^{-1} p_2', \qquad p_2 = -\, {}^1/_2\, \omega_2 q_2' + i p_2' \end{aligned} \tag{5.2}$$

В новых переменных функция Гамильтона запишется в виде (2.1), где

$$\begin{gathered} g'_{0030} = x_{0030} + iy_{0030}, \quad g'_{3000} = -\, {}^1/_8\, \omega_1^3 (y_{0030} + ix_{0030}), \quad g'_{1020} = x_{1020} + iy_{1020} \\ g'_{2010} = -\, {}^1/_2\, \omega_1 (y_{1020} + ix_{1020}), \quad g'_{0120} = x_{0120} + iy_{0120} \\ g'_{2001} = {}^1/_2\, \omega_1^2 \omega_2^{-1} (y_{0120} + ix_{0120}), \quad g'_{1011} = x_{1011} + iy_{1011}, \quad g'_{1110} = {}^1/_2\, \omega_2 (y_{1011} + ix_{1011}) \\ g'_{0021} = x_{0021} + iy_{0021}, \quad g'_{2100} = {}^1/_8\, \omega_1^2 \omega_2 (y_{0021} + ix_{0021}), \quad g'_{1002} = x_{1002} + iy_{1002} \\ g'_{0210} = -\, {}^1/_2\, \omega_1^{-1} \omega_2^2 (y_{1002} + ix_{1002}), \quad g'_{0012} = x_{0012} + iy_{0012} \\ g'_{1200} = -\, {}^1/_8\, \omega_1 \omega_2^2 (y_{0012} + ix_{0012}), \quad g'_{0111} = x_{0111} + iy_{0111}, \quad g'_{1101} = -\, {}^1/_2\, \omega_1 (y_{0111} + ix_{0111}) \\ g'_{0201} = x_{0201} + iy_{0201}, \quad g'_{0102} = 2\omega_2^{-1} (y_{0201} + ix_{0201}), \quad g'_{0003} = x_{0003} + iy_{0003} \\ g'_{0300} = {}^1/_8\, \omega_2^3 (y_{0003} + ix_{0003}) \end{gathered} \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered} x_{0030} = g_{0030} - \omega_1^{-2} g_{2010}, \quad y_{0030} = \omega_1^{-1} g_{1020} - \omega_1^{-3} g_{3000}, \quad x_{1020} = -\, {}^1/_2\, g_{1020} - {}^3/_2\, \omega_1^{-2} g_{3000} \\ y_{1020} = {}^3/_2\, \omega_1 g_{0030} + {}^1/_2\, \omega_1^{-1} g_{2010}, \quad x_{0120} = -\, {}^1/_2\, \omega_2 g_{0021} + {}^1/_2\, \omega_1^{-1} g_{1110} + {}^1/_2\, \omega_1^{-2} \omega_2 g_{2001} \\ y_{0120} = -\, {}^1/_2\, g_{0120} - {}^1/_2\, \omega_1^{-1} \omega_2 g_{1011} + {}^1/_2\, \omega_1^{-2} g_{2100}, \quad x_{1011} = -\, \omega_1 g_{0021} - \omega_1^{-1} g_{2001} \\ y_{1011} = \omega_1 \omega_2^{-1} g_{0120} + \omega_1^{-1} \omega_2^{-1} g_{2100}, \quad x_{0021} = \omega_2^{-1} g_{0120} - \omega_1^{-1} g_{1011} - \omega_1^{-2} \omega_2^{-1} g_{2100} \\ y_{0021} = g_{0021} + \omega_1^{-1} \omega_2^{-1} g_{1110} - \omega_1^{-2} g_{2001}, \quad x_{1002} = -\, {}^1/_2\, \omega_1 \omega_2^{-1} g_{0111} - {}^1/_2\, g_{1002} + {}^1/_2\, \omega_2^{-2} g_{1200} \\ y_{1002} = -\, {}^1/_2\, \omega_1 g_{0012} + {}^1/_2\, \omega_1 \omega_2^{-2} g_{0210} + {}^1/_2\, \omega_2^{-1} g_{1101}, \quad x_{0012} = -\, g_{0012} + \omega_2^{-2} g_{0210} - \omega_1^{-1} \omega_2^{-1} g_{1101} \\ y_{0012} = \omega_2^{-1} g_{0111} - \omega_1^{-1} g_{1002} + \omega_1^{-1} \omega_2^{-2} g_{1200}, \quad x_{0111} = \omega_1^{-1} \omega_2 g_{1002} + \omega_1^{-1} \omega_2^{-1} g_{1200} \\ y_{0111} = -\, \omega_2 g_{0012} - \omega_2^{-1} g_{0210}, \quad x_{0201} = -\, {}^1/_4\, \omega_2 g_{0102} - {}^3/_4\, \omega_2^{-1} g_{0300}, \quad y_{0201} = {}^3/_4\, \omega_2^2 g_{0003} + {}^1/_4\, g_{0201} \\ x_{0003} = -\, \omega_2^{-1} g_{0102} + \omega_2^{-3} g_{0300}, \quad y_{0003} = -\, g_{0003} + \omega_2^{-2} g_{0201} \end{gathered} \tag{5.3}$$

Из коэффициентов при членах четвертой степени в (2.1) выпишем только нужные для исследования

$$\begin{gathered} h'_{2020} = -\, {}^3/_2\, \omega_1^2 h_{0040} - {}^3/_2\, \omega_1^{-2} h_{4000} - {}^1/_2\, h_{2020} \\ h'_{1111} = \omega_1 \omega_2 h_{0022} + \omega_1^{-1} \omega_2^{-1} h_{2200} + \omega_1 \omega_2^{-1} h_{0220} + \omega_2 \omega_1^{-1} h_{2002} \\ h'_{0202} = -\, {}^3/_2\, \omega_2^2 h_{0004} - {}^3/_2\, \omega_2^{-2} h_{0400} - {}^1/_2\, h_{0202} \\ h'_{1003} = u_{1003} + + iv_{1003}, \quad h'_{2310} = -\, {}^1/_4\, \omega_1^{-1} \omega_2^3 (u_{1003} - iv_{1003}) \end{gathered} \tag{5.5}$$

где

$$\begin{aligned} u_{1003} &= {}^1/_2\, \omega_1 h_{0013} + {}^1/_2\, \omega_2^{-3} h_{1300} - {}^1/_2\, \omega_2^{-1} h_{1102} - {}^1/_2\, \omega_1 \omega_2^{-2} h_{0211} \\ v_{1003} &= -\, {}^1/_2\, \omega_1 \omega_2^{-1} h_{0112} - {}^1/_2\, h_{1003} + {}^1/_2\, \omega_2^{-2} h_{1201} + {}^1/_2\, \omega_1 \omega_2^{-3} h_{0310} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Из формул (5.3) — (5.6) получаем при $\omega_1 = 3\omega_2$

$$\begin{aligned} l_{2020} = h'_{2020} &+ {}^{27}/_8\, \omega_2^2 (x^2_{0030} + y^2_{0030}) + {}^3/_2\, (x^2_{1020} + y^2_{1020}) + {}^9/_{10}\, (x^2_{0120} + y^2_{0120}) - \\ &- {}^1/_2\, (x^2_{1011} + y^2_{1011}) - {}^9/_{56}\, \omega_2^2 (x^2_{0021} + y^2_{0021}) \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{gathered} l_{1111} = h'_{1111} - {}^2/_3\, (x^2_{1002} + y^2_{1002}) + {}^3/_{10}\, \omega_2^2 (x^2_{0012} + y^2_{0012}) - {}^9/_{14}\, \omega_2^2 (x^2_{0021} + y^2_{0021}) - \\ - {}^{18}/_5\, (x^2_{0120} + y^2_{0120}) + 2\, (x_{0111} x_{1020} + y_{0111} y_{1020}) - 4\omega_2^{-1} (x_{0201} y_{1011} + x_{1011} y_{0201}) \\ l_{0202} = h'_{0202} - {}^3/_8\, \omega_2^2 (x^2_{0003} + y^2_{0003}) - 6\omega_2^{-2} (x^2_{0201} + y^2_{0201}) + {}^1/_6\, (x^2_{1002} + y^2_{1002}) + \\ + {}^1/_2\, (x^2_{0111} + y^2_{0111}) + {}^3/_{40}\, \omega_2^2 (x^2_{0012} + y^2_{0012}) \\ l_{1003} = x_{1003} + iy_{1003}, \quad l_{0310} = -\, {}^1/_{12}\, \omega_2^2 (x_{1003} - iy_{1003}) \end{gathered}$$

где

$$x_{1003} = u_{1003} - {}^9/_5\,(x_{0120}\,x_{0012} + y_{0120}y_{0012}) - \omega_2^{-1}\,(x_{1002}y_{1011} + x_{1011}y_{1002}) +$$
$$+ 4\omega_2^{-2}\,(x_{1002}x_{0201} + y_{1002}y_{0201}) + {}^3/_2\,(x_{0003}\,x_{0111} + y_{0003}y_{0111})$$
$$y_{1003} = v_{1003} - {}^9/_5\,(x_{0120}y_{0012} - x_{0012}y_{0120}) - \omega_2^{-1}\,(y_{1011}y_{1002} - x_{1011}x_{1002}) +$$
$$+ 4\omega_2^{-2}\,(x_{0201}y_{1002} - x_{1002}y_{0201}) + {}^3/_2\,(x_{0111}\,y_{0003} - x_{0003}y_{0111})$$

При исследовании устойчивости в конкретных задачах надо привести функцию Гамильтона к виду (5.1) а затем воспользоваться формулами этого параграфа и теоремами 2.1 и 3.1.

Автор благодарит В. А. Сарычева за полезные обсуждения результатов работы.

Поступила 27 XII 1967

## ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Изд. 2-е, М.— Л., «Наука», 1966.
2. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Усп. матем. н., 1963, т. 18, вып. 6.
3. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика, М.— Л., Гостехиздат, 1937.
4. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.— Л., Гостехиздат, 1941.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 3-е, «Наука», 1965.
6. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
7. Маркеев А. П. Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника. Космич. исслед., 1967, т. 5, вып. 3.
8. Булгаков Б. В. О нормальных координатах. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.

---

# О ВЛИЯНИИ НЕГОЛОНОМНОЙ СВЯЗИ НА СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**Э. Г. Альбрехт, Г. С. Шелементьев**

(Свердловск)

Исследуется вопрос об изменении свойства стабилизируемости механической системы при наложении на нее неголономной связи. Указываются условия, при которых наложение неголономной связи ухудшает стабилизируемость системы. Выделяются также случаи, когда неголономная связь наоборот улучшает стабилизируемость механической системы.

§ 1. Для полноты изложения приведем сначала некоторые известные факты из теории стабилизации неголономных систем [1-4].

Пусть имеется механическая система, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1,\ldots, q_{n+1}$ и пусть движение этой системы подчинено неголономной связи, уравнение которой можно записать в виде

$$\dot{q}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,(q_1, \ldots, q_{n+1})\,\dot{q}_i \tag{1.1}$$

Предположим, что данная система имеет однопараметрическое семейство $Q$ неустойчивых положений равновесия [2]

$$q_i = q_i(q),\ \ \alpha \leqslant q \leqslant \beta\ \ (\alpha,\ \beta = \mathrm{const}),\ \ (i = 1,\ldots,\ n + 1) \tag{1.2}$$

Рассмотрим задачу [1,3] определения управляющей силы $u(q_1,\ldots,\ q_{n+1},\ \dot{q}_1,\ldots$ $\ldots, \dot{q}_{n+1})$, при действии которой на систему положения равновесия (1.2) становятся асимптотически устойчивыми. Как обычно, в таких случаях составим уравнения возмущенного движения. Для этого от координат $q_1,\ldots,\ q_{n+1}$ перейдем к новым координатам $s_1,\ldots,$