ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ВРАЩАТЕЛЬНО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В СИСТЕМЕ, НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ КОТОРОЙ УСТОЙЧИВО

Л. Д. Акуленко (Москва)

Последовательными приближениями строится вращательно-колебательное решение общей системы с параметром. На основе известных теорем первого метода Ляпунова проводится исследование устойчивости этого решения. Ранее в аналогичной постановке рассматривались задачи о периодических, или колебательных, решениях в системах с малым параметром.

Исследуется система общего вида

$$dx_i \,/\, dt = F_i(t,\ x_1,\dots,\ x_n,\ \lambda) \qquad (i = 1,\dots,\ n) \tag{1}$$

Здесь $t \in [t_0, \infty)$ — независимая переменная, $\lambda \in [\lambda_1,\ \lambda_2]$ — числовой параметр, вообще говоря, не малый. Предполагается, что вещественные функции F_i удовлетворяют следующим условиям.

1. Функции F_i определены для всех $t \in [t_0, \infty)$, непрерывны и периодичны с постоянным периодом T, не зависящим от λ.

2. Функции F_i периодичны по $x_1,\dots,\ x_p$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ с периодами $T_1,\dots,\ T_p$, соответственно, которые также не зависят от λ.

3. Функции F_i обладают по $x_1,\dots,\ x_n$ и по λ частными производными до второго порядка включительно, удовлетворяющими условиям Липшица с не зависящими от t постоянными в окрестности точки, принадлежащей некоторой неограниченной по координатам $x_1,\dots,\ x_p$ области G переменных x_i и $\lambda_0 \in [\lambda_1,\ \lambda_2]$.

Предполагается также, что при некотором частном значении параметра $\lambda = \lambda_0$ система (1) допускает в области G изолированное решение вида [1]

$$x_{i,\,0} = \varphi_i(\omega t) = \delta_i(T_i \,/\, 2\pi)\ \omega t + u_i(\omega t) \qquad (\omega = 2\pi \,/\, T) \tag{2}$$

Здесь

$$\delta_i = 1 \quad (i \leqslant p), \qquad \delta_i = 0\ (i > p), \qquad u_i(\omega(t + T)) = u_i\,(\omega t)$$

Функции φ_i за любой целый промежуток времени $\Delta t = T$ получают постоянные приращения $\Delta x_{i,\,0} = \delta_i T_i$. Решение (2) назовем вращательно-колебательными. Будем считать его изолированным, если система уравнений в вариациях

$$d\xi_i \,/\, dt = p_{i1}\xi_1 + \ldots + p_{in}\xi_n \qquad (p_{ik}(\omega t) = (\partial F_i \,/\, \partial x_k)_0) \tag{3}$$

не имеет периодических решений периода T. Для этого, как известно [2], достаточно, чтобы характеристическое уравнение для системы (3) не имело корней с модулями, равными единице. Колебательные системы типа (3) с малым параметром исследовались методами Пуанкаре и Ляпунова в [2].

Поставим задачу построить для всех $t \in [t_0, \infty)$ точное вращательно-колебательное решение системы (1) и исследовать его устойчивость по Ляпунову при достаточно близких к λ_0 значениях λ, обращающееся в (2) при $\lambda = \lambda_0$ и имеющее вид

$$x_i(t,\ \lambda) = \varphi_i(\omega t) + (\lambda - \lambda_0)\ z_i(\omega t,\ \lambda) \quad (z_i(\omega(t + T),\ \lambda) \equiv z_i(\omega t,\ \lambda)) \tag{4}$$

Для построения решения вида (4) используется известная схема последовательных приближений, развитая И. Г. Малкиным [2].

Основной результат заключается в следующем утверждении.

Теорема. Если решение (2) системы (1) при $\lambda = \lambda_0$ будет изолированным, то основная, возмущенная система при достаточно близких к λ_0 значениях λ будет допускать одно и только одно решение вида (4), принадлежащее G и обращающееся в порождающее (2) при $\lambda = \lambda_0$.

Это возмущенное решение будет асимптотически устойчивым при $|\lambda - \lambda_0|$ достаточно малом, если все корни характеристического уравнения для системы в вариациях (3) имеют модули, меньшие единицы, и неустойчивым, если имеется хотя бы один с модулем, большим единицы.

Доказательство. Введением обозначений

$$\varepsilon = \lambda - \lambda_0, \quad y_i = x_i - \varphi_i(\omega t)$$

система (1) приводится к виду

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} y_k + Y_i(t, y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon \left(\frac{\partial F_i}{\partial \lambda}\right)_0 + \varepsilon f_i(t, y_1, \ldots, y_n, \varepsilon) \tag{5}$$

$$Y_i(t, y_1, \ldots, y_n) = F_i(t, \varphi_1 + y_1, \ldots, \varphi_n + y_n, \lambda_0) - (F_i)_0 - (p_{i1}y_1 + \ldots + p_{in}y_n)$$

$$f_i(t, y_1, \ldots, y_n, \varepsilon) = F_i^*(t, \varphi_1 + y_1, \ldots, \varphi_n + y_n, \varepsilon) - (\partial F_i / \partial \lambda)_0$$

$$\varepsilon F_i^*(t, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = F_i(t, x_1, \ldots, x_n, \lambda) - F_i(t, x_1, \ldots, x_n, \lambda_0)$$

Согласно условиям гладкости, наложенным на F_i, при достаточно малых по абсолютной величине y_i, y_i', y_i'', ε, ε', ε'' справедливы оценки (см., например, [2])

$$|Y_i(t, y_1, \ldots, y_n)| < A \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2$$

$$|Y_i(t, y_1', \ldots, y_n') - Y_i(t, y_1'', \ldots, y_n'')| < B \sum_{j=1}^{n} (|y_j'| + |y_j''|) \sum_{k=1}^{n} |y_k' - y_k''|$$

$$|f_i(t, y_1', \ldots, y_n', \varepsilon') - f_i(t, y_1'', \ldots, y_n'', \varepsilon'')| < C \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k' - y_k''| + |\varepsilon' - \varepsilon''| \right)$$

$$|f_i(t, y_1, \ldots, y_n, \varepsilon)| < C \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k| + |\varepsilon| \right) \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что правые части системы (5) периодичны по t с периодом T. Ее периодическое решение строится последовательными приближениями. Первое приближение определяется из системы

$$\frac{dy_{i,1}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(\omega t)\, y_{k,1} + \varepsilon \left(\frac{\partial F_i}{\partial \lambda}\right)_0 \tag{7}$$

а произвольное m-е как периодическое решение следующей общей схемы

$$\frac{dy_{i,m+1}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} y_{k,m+1} + Y_i(t, y_{1,m}, \ldots, y_{n,m}) +$$

$$+ \varepsilon \left(\frac{\partial F_i}{\partial \lambda}\right)_0 + \varepsilon f_i(t, y_{1,m}, \ldots, y_{n,m}, \varepsilon)$$

Здесь зависимость от λ_0 из-за сокращения записи не указана. Так как система в вариациях (3) не имеет периодических решений периода T, то, согласно [2], система (7) имеет единственное периода T решение, удовлетворяющее условию

$$\max |y_{i,1}| < \varepsilon D \max |(\partial F_i / \partial \lambda)_0|$$

Здесь величина постоянной D не зависит от $(\partial F_i / \partial \lambda)_0$, а только от коэффициентов p_{ik}. Нужно показать, во-первых, что любое q-е приближение ограничено и принадлежит допустимой области. Для этого предполагается, что выполняются неравенства

$$\max |y_{i,m}| < \varepsilon D \max |(\partial F_i / \partial \lambda)_0| < \varepsilon N \quad (m = 1, \ldots, q - 1) \tag{8}$$

а затем доказывается, что и q-е приближение ограничено величиной εN. При помощи (6), (8) можно оценить функции $y_{i,q}$

$$\max |y_{i,q}| < \varepsilon D \max |(\partial F_i / \partial \lambda)_0| + \varepsilon^2 n A D N^2 + \varepsilon^2 C D (nN + 1) \tag{9}$$

Нужным выбором малого параметра ε правую часть неравенства (9) можно сделать меньше εN. Таким образом, доказано, что

$$\max |y_{i,m}| < \varepsilon N, \quad x_{i,m}(t, \lambda) \in G, \quad x_{i,m}(t, \lambda_0) = \varphi \quad (m = 1, \ldots, q, \ldots)$$

Теперь нужно показать, что последовательные приближения равномерно сходятся. Для этого оцениваются разности $(y_{i,\,m+1} - y_{i,\,m})$, удовлетворяющие системе

$$\frac{d\,(y_{i,\,m+1} - y_{i,m})}{dt} = \sum_{k=1}^{n} y_{ik}\,(y_{k,\,m+1} - y_{k,m}) + [Y_i\,(t,\,y_{1,m},\,\ldots,\,y_{n,m}) -$$
$$- Y_i\,(t,\,y_{1,\,m-1},\,\ldots,\,y_{n,\,m-1})] + \varepsilon\,[f_i\,(t,\,y_{1,m},\,\ldots,\,y_{n,m},\,\varepsilon) - f_i\,[t,\,y_{1,m-1},\,\ldots,\,y_{n,m-1},\,\varepsilon)]$$

Обозначая $a_m = \max|\,y_{i,\,m} - y_{i,\,m-1},|$ можно получить

$$\max|\,y_{i,\,m+1} - y_{i,\,m}\,| < \varepsilon nD\,(2nBN + C)\,a_m$$

Полагая $a_{m+1} = \varepsilon nD(2nBN + C)a_m$, можно видеть, что $a_m \to 0$ при $m \to \infty$, если $\varepsilon nD\,(2nBN + C) \leqslant 1$.

Таким образом, при достаточно малом ε приближения $y_{i,m}$ сходятся равномерно к некоторым периодическим функциям $y_i(\omega t,\,\varepsilon)$. Докажем, что $y_i(\omega t,\,\varepsilon)$ удовлетворяют (5). Пусть через $y_i^*(\omega t,\,\varepsilon)$ обозначено единственное периода T решение системы

$$\frac{dy_i^*}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\,(\omega t)\,y_k^* + Y_i\,(t,\,y_1\,(\omega t,\,\varepsilon),\,\ldots,\,y_n\,(\omega t,\,\varepsilon)) + \varepsilon\,(\partial F_i\,/\,\partial\lambda)_0 +$$
$$+ \varepsilon f_i\,(t,\,y_1\,(\omega t,\,\varepsilon),\,\ldots,\,y_n\,(\omega t,\,\varepsilon),\,\varepsilon)$$

Тогда аналогично предыдущему устанавливаются оценки

$$\max|\,y_i^* - y_{i,\,m}\,| < \varepsilon nD(2nBN + C)\,\max|\,y_i(\omega t,\;\varepsilon) - y_{i,\,m-1}\,|$$

Предельным переходом доказывается, что функции $y_i(\omega t,\,\varepsilon)$ удовлетворяют системе (5). Для доказательства того, что при ε достаточно малом $y_i(\omega t,\,\varepsilon)$ — единственное в G периодическое решение системы (5), предполагается противное, т. е. $y_i'(\omega t,\,\varepsilon)$ — тоже периодическое решение. Тогда для величин $(y_i' - y_i)$ справедливы оценки

$$\max|\,y_i' - y_i\,| < [\varepsilon nD(2nBN + C)]^l\,\max|\,y_i' - y_i\,|$$

Здесь l — сколь угодно большое целое число. Из этих оценок следует, что $y_i' \equiv y_i$.

Для доказательства утверждения теоремы об асимптотической устойчивости построенного решения (4) при достаточно малых значениях ε совершается, как обычно, замена $x_i = x_i(\omega t,\;\lambda) + \xi_i$. Вариации ξ_i удовлетворяют системе

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} [\,p_{ik}\,(\omega t) + f_{ik}\,(\omega t,\,\varepsilon)]\,\xi_k + R_i\,(\omega t,\,\xi_1,\,\ldots,\,\xi_n,\,\varepsilon)$$

в которой для функций R_i, f_{ik} справедливы равномерные оценки

$$|\,f_{ik}\,| \leqslant b\,|\,\varepsilon\,|, \qquad |\,R_i\,| \leqslant a|\,(|\,\xi_1|^2 + \ldots + |\,\xi_n\,|^2)$$

Рассматривая добавки к системе (3) как «возмущения» с достаточно малой постоянной Липшица при достаточно малых значениях ε, $|\,\xi_i\,|$, можно сформулировать утверждение, принадлежащее Ляпунову [2].

«Если все характеристические показатели невозмущенного периодического движения имеют отрицательные вещественные части, то это движение асимптотически устойчиво. Если хотя бы один из указанных характеристических показателей имеет положительную вещественную часть, то невозмущенное движение неустойчиво...».

Пусть $\rho_1,\ldots,\,\rho_n$ — корни характеристического уравнения системы (3). Так как характеристические показатели $\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_n$ этой системы определяются формулами $\alpha_i = T^{-1}\ln\rho_i$, то все утверждения теоремы можно считать доказанными.

В заключение нужно отметить, что утверждение, аналогичное сформулированной выше теореме, справедливо, если функции F_i обладают только первыми частными производными по x_i, λ, удовлетворяющими условиям Липшица [2].

Поступила 13 VI 1967 Московский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л. Д. К вопросу о стационарных колебаниях и вращениях. Укр. матем. ж., 1966, т. 18, № 5, стр. 7—18.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.