

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С РАЗРЫВНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Б. Н. Скрябин (Горький)

Рассматривается дифференциальное уравнение (представляющее интерес для приложений), содержащее вместе с производной некоторую функцию, имеющую разрывы типа конечного скачка. Для различных случаев строятся доопределения уравнения на линиях разрыва.

Схемы доопределения дают информацию, необходимую для полного качественного исследования системы. Рассмотрены примеры полного качественного исследования для двух различных характеристик, соответствующих двум различным случаям доопределения.

Уравнение

$$\varphi'' + 2h[1 - bF'(\varphi)] \varphi' + F(\varphi) = \Omega, \quad F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi) \quad (1)$$

встречающееся в приложениях¹, неоднократно изучалось при непрерывных характеристиках $F(\varphi)$ (см., например, [1,2]).

В данной заметке предлагается способ исследования для случая характеристики, имеющей разрывы типа конечного скачка.

Пусть $\varphi = \varphi_n$ — одна из точек разрыва. Эквивалентная уравнению (1) система

$$\varphi' = y, \quad y' = \Omega - F(\varphi) - 2h[1 - bF'(\varphi)]y \quad (2)$$

не определена на прямой $\varphi = \varphi_n$. Поэтому движение изображающей точки системы при попадании ее на эту прямую нуждается в доопределении. Естественно получить его следующим образом. В интервале $(\varphi_n - \mu, \varphi_n + \mu)$ заменим характеристику $F(\varphi)$ прямой, соединяющей точки $[\varphi_n - \mu, F(\varphi_n - 0)]$ и $[\varphi_n + \mu, F(\varphi_n + 0)]$. Тогда на фазовой плоскости в полосе $\varphi_n - \mu < \varphi < \varphi_n + \mu$ вместо системы (2) будем иметь систему

$$x' = y, \quad y' = \frac{\beta - \gamma}{2\mu} x - 2\alpha y - \frac{\beta + \gamma}{2} \quad (3)$$

где

$$x = \varphi - \varphi_n, \quad \beta = F(\varphi_n - 0) - \Omega, \quad \gamma = F(\varphi_n + 0) - \Omega, \\ \alpha = h \left(1 + b \frac{\beta - \gamma}{2\mu} \right)$$

На одной из прямых $x = \pm \mu$ зафиксируем какую-нибудь точку с ординатой y_0 . Может оказаться, что полутраектория $x = x(t, \mu)$, $y = y(t, \mu)$ системы (3), начинающаяся при $t = 0$ в этой точке и проходящая внутрь полосы, при всех достаточно малых μ вновь выходит из полосы при некотором $t = t(\mu)$ в некоторой точке с координатами $x = \mu$, $y = y(\mu)$ ($x = -\mu$, $y = y(\mu)$). В этом случае примем такое доопределение: изображающая точка системы (2), попав в точку $\varphi = \varphi_n$, $y = y_0$, находится на прямой $\varphi = \varphi_n$ в течение времени t , равного пределу $t(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$, после чего продолжает движение при $\varphi > \varphi_n$ ($\varphi < \varphi_n$) в соответствии с системой (2) при начальных условиях $\varphi = \varphi_n$, $y = \lim y(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$. Если же рассматриваемая полутраектория системы (3) при всех достаточно малых μ целиком лежит в полосе, то примем такое доопределение: изображающая точка системы (2), попав в точку $\varphi = \varphi_n$, $y = y_0$, остается на прямой неограниченно долго. Ситуации, которые представятся при вычислениях, исчерпываются двумя указанными. Уравнение движения изображающей точки по прямой $\varphi = \varphi_n$ в обоих случаях получим предельным переходом в уравнениях рассматриваемой полутраектории системы (3): $y = Y(t) = \lim y(t, \mu)$ при $\mu \rightarrow 0$.

¹ При $b > 0$ уравнение (1) будет уравнением фазовой автоподстройки частоты с интегрирующим фильтром при учете запаздывания, при $b < 0$ — уравнением автоподстройки с пропорционально-интегрирующим фильтром без учета запаздывания [1].

Перейдем к вычислениям, которые проведем на языке точечных преобразований [3]. Выделим (фиг. 1) на прямой $x = -\mu$ полупрямые

$$U \{x = -\mu, y = u > 0\}, \quad U_1 \{x = -\mu, y = -u_1 < 0\}$$

и на прямой $x = \mu$ полупрямые

$$V \{x = \mu, y = v > 0\}, \quad V_1 \{x = \mu, y = -v_1 < 0\}$$

Траектории системы (3) осуществляют точечные преобразования полупрямой U в полупрямые V и U_1 . Назовем их соответственно преобразование T и преобразование S . Параметрические уравнения функции соответствия будут для преобразования T

$$u = \frac{2\omega\mu}{\beta - \gamma} \left[-\gamma \frac{\exp \alpha\tau}{\operatorname{sh} \omega\tau} + \beta \left(\operatorname{cth} \omega\tau + \frac{\alpha}{\omega} \right) \right]$$

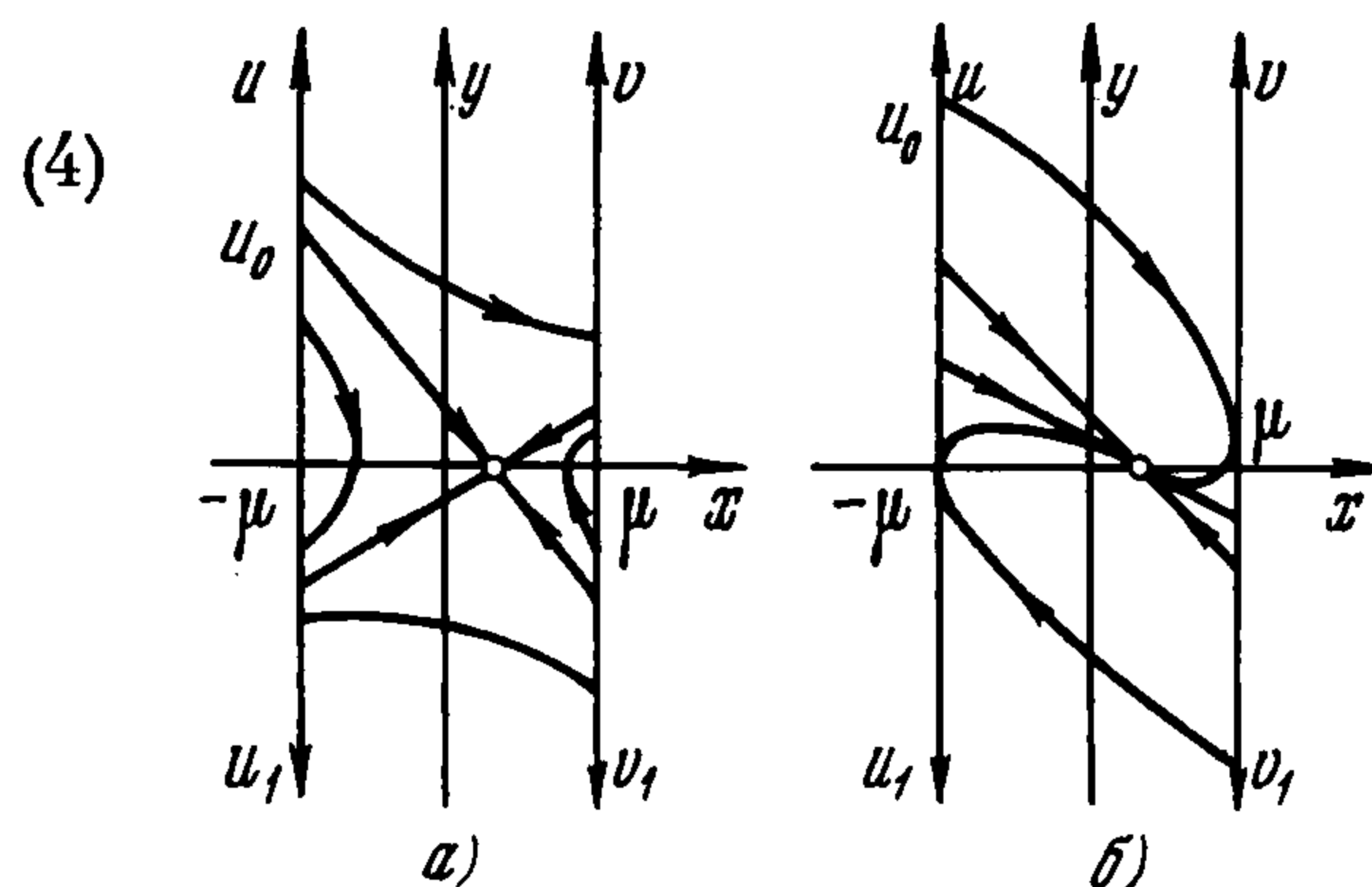
$$v = \frac{2\omega\mu}{\beta - \gamma} \left[\beta \frac{\exp(-\alpha\tau)}{\operatorname{sh} \omega\tau} - \gamma \left(\operatorname{cth} \omega\tau - \frac{\alpha}{\omega} \right) \right]$$

для преобразования S

$$u = \frac{2\omega\mu\beta}{\beta - \gamma} \left[\operatorname{cth} \omega\theta + \frac{\alpha}{\omega} - \frac{\exp \alpha\theta}{\operatorname{sh} \omega\theta} \right]$$

$$u_1 = \frac{2\omega\mu\beta}{\beta - \gamma} \left[\operatorname{cth} \omega\theta - \frac{\alpha}{\omega} - \frac{\exp(-\alpha\theta)}{\operatorname{sh} \omega\theta} \right]$$

$(\omega = \sqrt{\alpha^2 + (\beta - \gamma)/2\mu})$



Фиг. 1

Здесь τ и θ — параметры (время перехода изображающей точки системы (3) с полупрямой U соответственно на полупрямую V или U_1).

Рассмотрим случаи

(1). $\gamma < 0 < \beta$, $r = 2b$, $h > 0$. Состояние равновесия системы (3) есть седло, расположенное внутри полосы $-\mu < x < \mu$. Соответствующая картина фазовых траекторий приведена на фиг. 1, а.

Пусть u_0 — отрезок, отсекаемый от полупрямой U сепаратрисой, имеющей отрицательный наклон. Величина $u_0 \rightarrow r\beta$ при $\mu \rightarrow 0$. Поэтому, какую бы точку u на интервале $u > r\beta$ ни фиксировать, при достаточно малых μ она участвует в преобразовании T . При этом первое из равенств (4) неявно определяет функцию $\tau = \tau(\mu)$ — время перехода из фиксированного u на полупрямую V . Ее предельное значение при $\mu \rightarrow 0$ есть ¹

$$\tau = \begin{cases} r \ln [r\gamma / (r\beta - u)] & (r\beta < u < r(\beta - \gamma)) \\ 0 & (u \geq r(\beta - \gamma)) \end{cases} \quad (6)$$

Во втором из равенств (4) положим $\tau = \tau(\mu)$ и найдем $\lim v[\tau(\mu), \mu]$ при $\mu \rightarrow 0$. Это предельное значение есть ²

$$v = \begin{cases} 0 & (r\beta < u < r(\beta - \gamma)) \\ u - r(\beta - \gamma) & (u \geq r(\beta - \gamma)) \end{cases} \quad (7)$$

Фиксируем теперь какую-нибудь точку на интервале $u < r\beta$. При малых μ она участвует в преобразовании S . При этом первое из равенств (5) неявно определяет функцию $\theta = \theta(\mu)$ — время перехода из фиксированного u на полупрямую U_1 . Ее предельное значение при $\mu \rightarrow 0$ есть ³

$$\theta = r \ln [r\beta / (r\beta - u)] \quad (8)$$

Во втором из равенств (5) положим $\theta = \theta(\mu)$ и найдем $\lim u_1[\theta(\mu), \mu]$ при $\mu \rightarrow 0$. Это предельное значение есть

$$u_1 = 0 \quad (9)$$

Фиксируем теперь $u = r\beta$. Рассмотрим изменение отрезка $u_0 = u_0(\mu)$ с уменьшением μ . Для этого вычислим

$$u_0'(0) = 2\beta(4h^2b + 1) / r(\beta - \gamma)$$

¹ См. приложение 1.

² См. приложение 2.

³ Доказательство аналогично доказательству в приложении 1.

Если $b > -1/4h^2$, то при малых μ величина u_0 убывает вместе с μ , и точка $u = r\beta$ участвует в преобразовании S. Первое из равенств (5) определяет функцию $\theta = \theta(\mu)$ — время перехода из $u = r\beta$ на полупрямую U_1 . Ее предельное значение при $\mu \rightarrow 0$ есть $\theta = \infty$.

Это следует из того, что θ в равенстве (8) можно сделать как угодно большим, если взять u достаточно близким к $r\beta$ и из того, что в (5) производная $\partial u / \partial \theta > 0$.

Случай $b < -1/4h^2$ рассматривается аналогично. Величина u_0 возрастает с уменьшением μ , и точка $u = r\beta$ участвует в преобразовании T. Предельное время есть $\tau = \infty$.

При $b = -1/4h^2$ имеем $r\beta \equiv u_0$. В этом случае точка $u = r\beta$ при любом μ лежит на сепаратрисе. Время доопределенного движения есть ∞ .

Для $u < r(\beta - \gamma)$ нужно еще получить уравнение движения изображающей точки по прямой $\varphi = \varphi_n$. Для любого u это будет

$$y = Y(t) \equiv 0 \quad (10)$$

Полученная схема доопределенных движений по верхней части прямой $\varphi = \varphi_n$ приведена на фиг. 2, а. Здесь для наглядности налегающие одна на другую траектории раздвинуты в горизонтальном направлении. Изображающая точка системы (2), попавшая в точку $\varphi = \varphi_n, y = u, u \geq r(\beta - \gamma)$, совершает мгновенный скачок в соответствии с формулой (7) и продолжает движение при $\varphi > \varphi_n$ в соответствии с системой (2).

Если $r\beta < u < r(\beta - \gamma)$, то изображающая точка мгновенно перескакивает в точку $v = 0$ и находится здесь в течение времени, определяемого формулой (6), после чего продолжает движение при $\varphi > \varphi_n$.

Если $r\beta < u < r(\beta - \gamma)$, то изображающая точка мгновенно перескакивает в точку $\varphi = \varphi_n, y = 0$ и остается там неограниченно долго. Это движение является вырождением при $\mu \rightarrow 0$ движения по сепаратрисе седла системы (3). Будем говорить, что оно происходит по сепаратрисе состояния равновесия $\varphi = \varphi_n, y = 0$.

Если $u < r\beta$, то изображающая точка мгновенно перескакивает в точку $u_1 = 0$ и находится здесь в течение времени, определяемого формулой (8), после чего продолжает движение¹ при $\varphi < \varphi_n$.

Из соображений симметрии следует, что если в описанной схеме поменять u на v_1, v на u_1, β на $-\gamma$ и наоборот, то получим схему доопределенных движений по нижней части прямой $\varphi = \varphi_n$.

(2) $\beta < 0 < \gamma, r < 0$. Состояние равновесия системы (3) при малых μ — устойчивый узел, лежащий в полосе $-\mu < x < \mu$. Соответствующая картина фазовых траекторий приведена на фиг. 1, б.

Пусть $u_0 = u_0(\mu)$ — отрезок, отсекаемый от полупрямой U траекторией, проходящей через точку $x = \mu, y = 0$. При $\mu \rightarrow 0$ имеем² $u_0(\mu) \rightarrow r(\beta - \gamma), u_0'(\mu) \rightarrow +\infty$. Поэтому для $u > r(\beta - \gamma)$ вычисления совпадают с соответствующими вычислениями п. (1). Если же полутраектория системы (3) начинается на отрезке $u \leq r(\beta - \gamma)$, то при

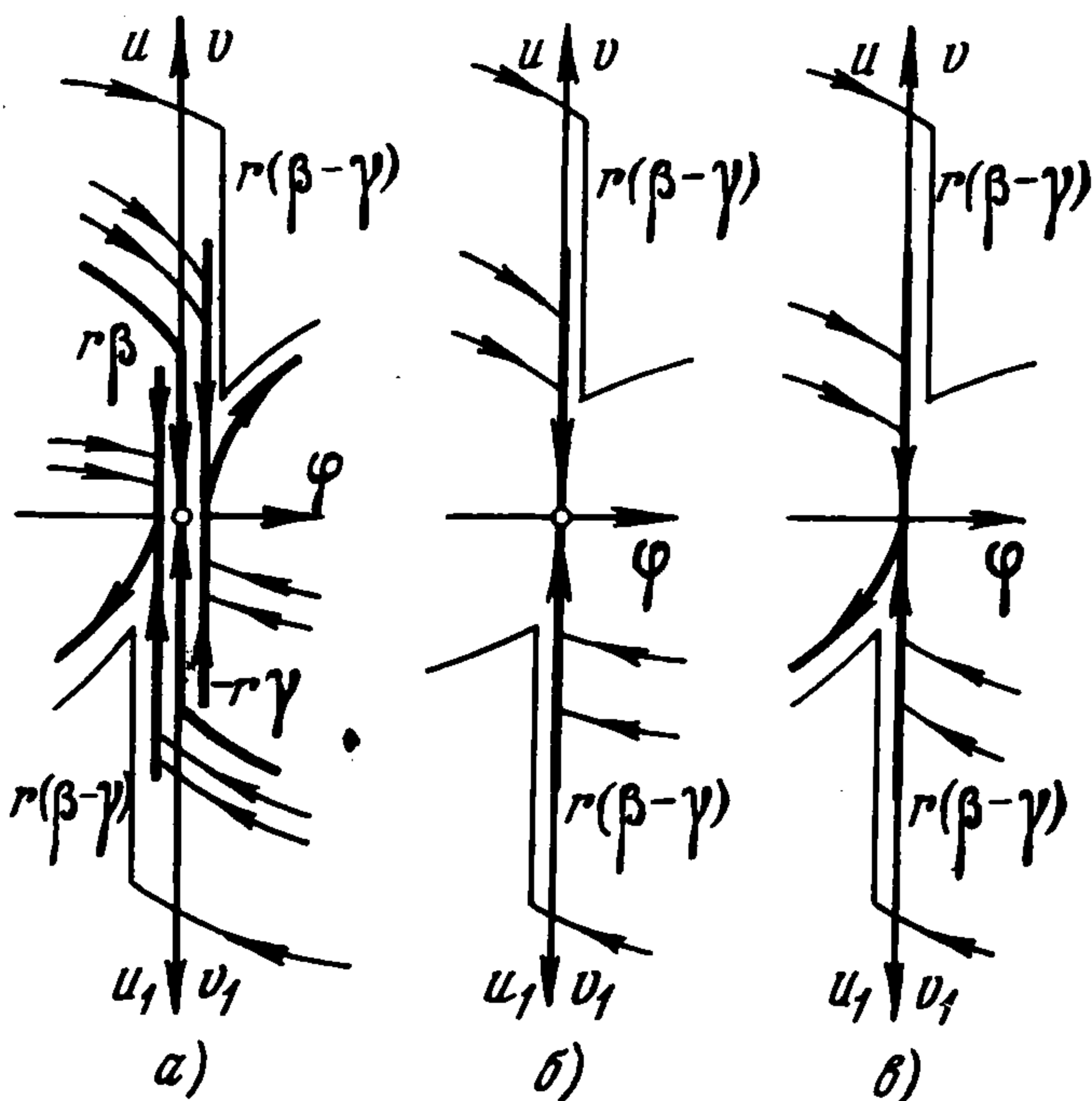
¹ Уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$$\varphi'' + 2h\varphi' = rz' - z, \quad z = F(\varphi) - \Omega$$

и применить условия скачков М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [4].

При этом для $u > r(\beta - \gamma)$ получим нижнюю строку формулы (7). При значениях $u < r(\beta - \gamma)$ условия скачков неприменимы.

² См. приложение 3.



Фиг. 2

малых μ она целиком лежит внутри полосы $-\mu < x < \mu$, и время соответствующих доопределенных движений есть ∞ . Уравнением движения по прямой $\varphi = \varphi_n$, как и в случае (1), будет уравнение (10).

Полученная схема доопределенных движений по верхней части прямой $\varphi = \varphi_n$ приведена на фиг. 2, б. Изображающая точка системы (2), попавшая в точку $\varphi = \varphi_n$, $y = u$, $u > r(\beta - \gamma)$, совершает мгновенный скачок в соответствии с формулой (7) и продолжает движение при $\varphi > \varphi_n$ в соответствии с системой (2).

При $u \leq r(\beta - \gamma)$ изображающая точка мгновенно перескакивает в точку $\varphi = \varphi_n$, $y = 0$ и остается там неограниченно долго. Будем говорить, что эти движения ведут в состояние равновесия $\varphi = \varphi_n$, $y = 0$, являющееся вырождением при $\mu \rightarrow 0$ узла системы (3).

Из соображений симметрии следует, что если в описанной схеме поменять u на v_1 , v на u_1 , то получим схему доопределенных движений по нижней части прямой $\varphi = \varphi_n$.

(3) $0 < \gamma < \beta$, $r > 0$. Состояние равновесия системы (3) есть седло, расположенное правее полосы $-\mu < x < \mu$.

Не приводя вычислений, опишем получающуюся в этом случае схему доопределенных движений (фиг. 2, в). Изображающая точка системы (2), попавшая в точку $\varphi = \varphi_n$, $y = u$, $u > r(\beta - \gamma)$, совершает мгновенный скачок в соответствии с формулой (7) и продолжает движение при $\varphi > \varphi_n$ в соответствии с системой (2).

Если $u \leq r(\beta - \gamma)$, то изображающая точка мгновенно перескакивает в точку $u_1 = 0$ и находится здесь в течение времени, определяемого формулой (8), после чего продолжает движение при $\varphi < \varphi_n$. Изображающая точка системы (2), попавшая в точку $\varphi = \varphi_n$, $y = v_1$, $v_1 \geq r(\beta - \gamma)$, совершает мгновенный скачок вверх в соответствии с равенством $u_1 = v_1 \geq r(\beta - \gamma)$ и продолжает движение при $\varphi < \varphi_n$ в соответствии с системой (2). Если $v_1 < r(\beta - \gamma)$, то изображающая точка мгновенно перескакивает в точку $u_1 = 0$ и остается здесь в течение времени $\tau = r \ln [r\beta / (r\gamma + v_1)]$, после чего продолжает движение при $\varphi < \varphi_n$.

(4) $0 < \beta < \gamma$, $r < 0$. Состояние равновесия системы (3) при малых μ — устойчивый узел, лежащий левее полосы $-\mu < x < \mu$. Схема доопределенных движений та же, что и в п. (3).

Случаи (5) $\beta < \gamma < 0$, $r < 0$ и (6) $\gamma < \beta < 0$; $r > 0$ получаются соответственно из случаев (4) и (3) заменой β на $-\gamma$, u на v_1 , v на u_1 и наоборот.

Из имеющихся шести случаев получим еще шесть, соответствующих изменению знака r , заменой β на $-\gamma$, r на $-r$, u на v , u_1 на v_1 и наоборот.

Рассматривая точечные преобразования прямых $\varphi = \varphi_n$ самих в себя, осуществляемые доопределенными движениями, совместно с точечными преобразованиями прямых $\varphi = \varphi_n$ самих в себя и одна в другую, осуществляемыми траекториями системы (2), можно провести качественное исследование системы для конкретной характеристики $F(\varphi)$, имеющей разрывы.

Пример 1 [5]. Пусть $F(\varphi)$ — функция периода 2π такая, что $F(\varphi) = \varphi / \pi$ при $-\pi < \varphi < \pi$ и $0 < \Omega < 1$. Этот пример иллюстрирует первый случай доопределения.

В качестве фазового пространства будем рассматривать полосу, заключенную между прямыми $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$. Точки этих прямых, имеющие одинаковые ординаты, отождествляем. Таким образом точка разрыва характеристики находится на линии склейки цилиндрического фазового пространства.

Установим существование предельного цикла, охватывающего фазовый цилиндр и расположенного в его верхней части $y > 0$. Для этого выделим на прямой $\varphi = -\pi$ полупрямую $V \{ \varphi = -\pi, y = v > 0 \}$ и на прямой $\varphi = \pi$ полупрямую $U \{ \varphi = \pi, y = u > 0 \}$ и рассмотрим точечное преобразование полупрямой V в полупрямую U , осуществляемое траекториями системы (2). Если обозначить

$$h_1 = h(\pi - b) / \sqrt{\pi}, \quad \omega_1 = \sqrt{1 - h_1^2}, \quad k_1 = h_1 / \omega_1$$

то при $0 < h_1 < 1$ параметрические уравнения функции соответствия этого преобразо-

вания запишутся

$$v / \sqrt{\pi} = \omega_1(1 - \Omega) \exp(k_1 \eta) / \sin \eta + (1 + \Omega) (\omega_1 \operatorname{ctg} \eta + h_1)$$

$$u / \sqrt{\pi} = \omega_1(1 + \Omega) \exp(-k_1 \eta) / \sin \eta + (1 - \Omega) (\omega_1 \operatorname{ctg} \eta - h_1)$$

Ее производные

$$dv/du = \exp(2k_1 \eta) u / v$$

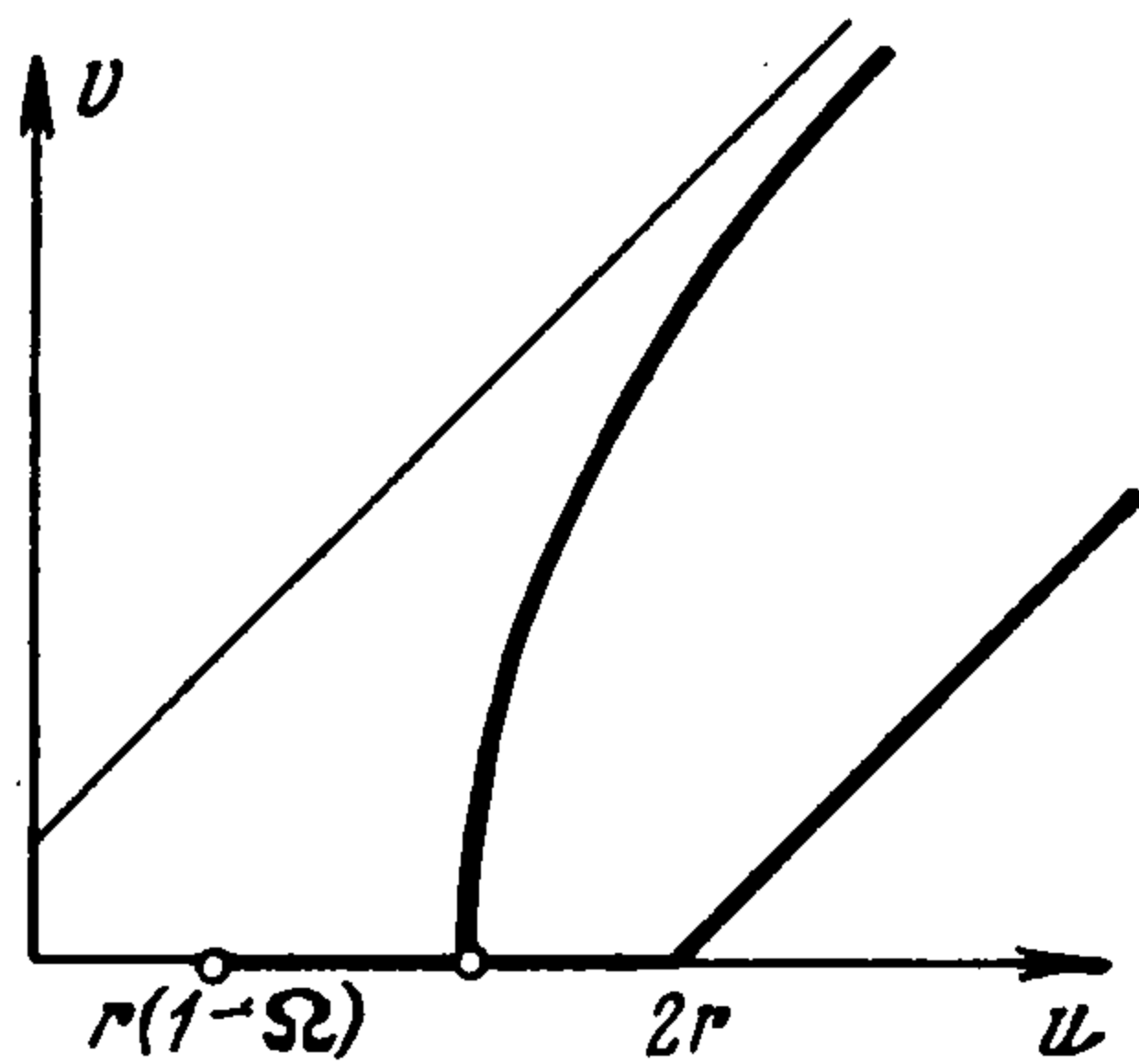
$$d^2v/du^2 = \sqrt{\pi} \sin \eta \exp(3k_1 \eta) [(1 - \Omega)v - (1 + \Omega)u] / \omega_1 v^3$$

Асимптота

$$v = u + 4\sqrt{\pi}h_1$$

Для $a = \ln[(1 + \Omega)/(1 - \Omega)] > k_1 \pi$ кривая $u = u(v)$ изображена на фиг. 3 вместе с ломаной

$$v = v(u) = \begin{cases} u - 2r & \text{при } u \geq 2r \\ 0 & \text{при } r(1 - \Omega) < u < 2r \end{cases}$$



Фиг. 3

являющейся графиком функции соответствия преобразования полупрямой $\varphi = \pi, y > 0$ в себя, осуществляемого доопределенными движениями, и построенной по формуле (7). На фиг. 3 изображен случай, когда кривая и ломаная имеют общую точку на горизонтальном участке ломаной. Это означает, что на фазовом цилиндре имеется предельный цикл, при движении по которому изображающая точка имеет остановку в

точке $\varphi = \pi, y = 0$ на время, определяемое первой строкой формулы (6). Легко видеть, что он устойчив и что более одного цикла быть не может. При увеличении r точка пересечения кривой и ломаной попадает в начальную точку ломаной, что соответствует влипанию цикла в сепаратрису, образующую петлю (сепаратрису, идущую из состояния равновесия $(\pi, 0)$ в то же самое состояние равновесия). Соответствующая бифуркационная поверхность в пространстве параметров r, h_1, a имеет уравнения $u(\eta) = r(1 - \Omega), v(\eta) = 0$.

Исключив η , получим

$$a = k_1 \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{\omega_1 r}{\sqrt{\pi} + h_1 r} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{r^2 + 2\sqrt{\pi}h_1 r + \pi}{\pi}$$

При уменьшении r точка пересечения кривой и ломаной переходит на наклонный участок ломаной, чему соответствует превращение «цикла с остановкой» в точке $(\pi, 0)$ в цикл «без остановки». Поверхность, разделяющая в пространстве параметров области существования цикла с остановкой и цикла без остановки имеет уравнения

$$u(\eta) = 2r, v(\eta) = 0$$

Их можно переписать так:

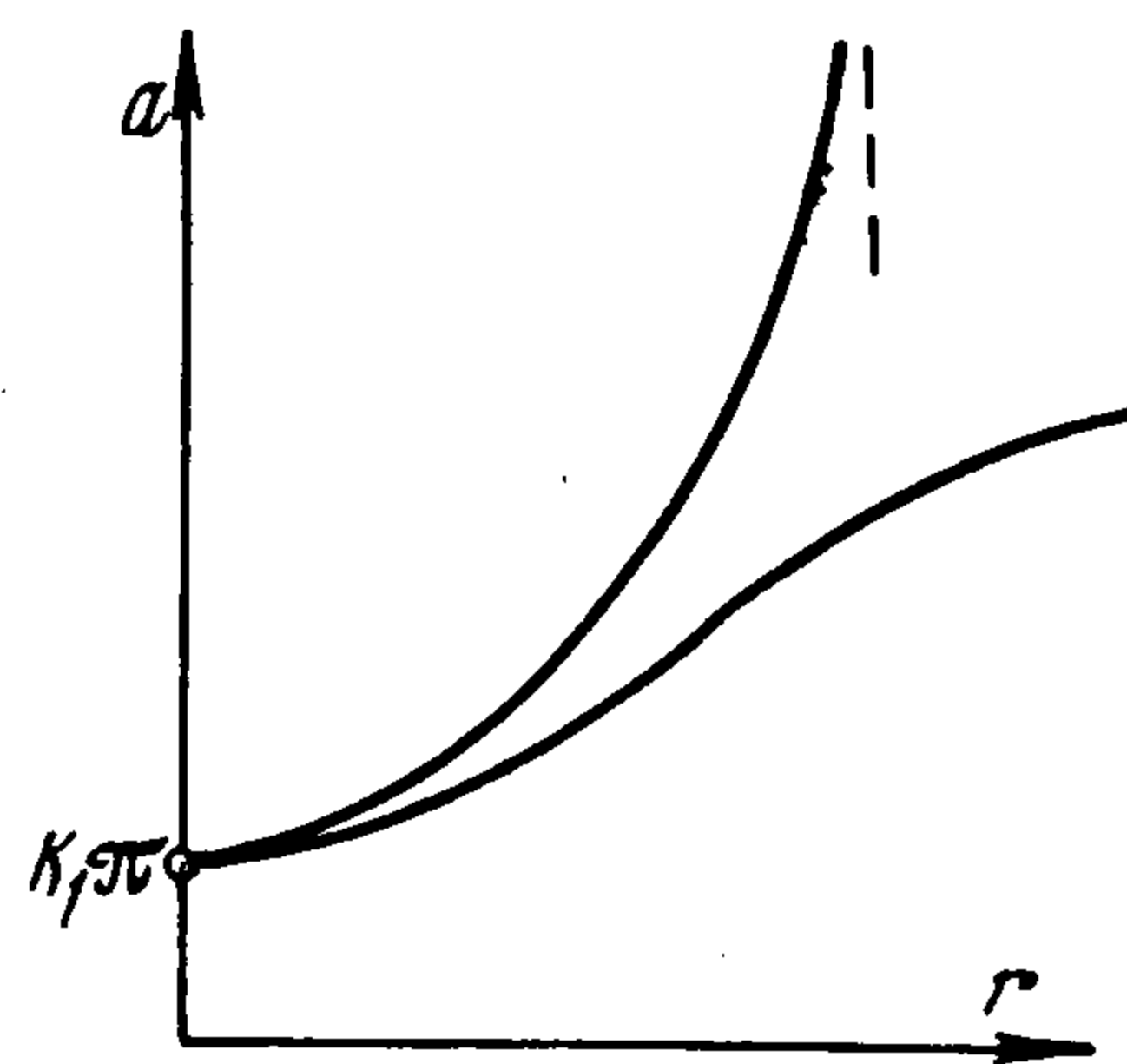
$$r = \sqrt{\pi} \sin \eta / [\omega_1 \exp(k_1 \eta) - \omega_1 \cos \eta - h_1]$$

$$a = k_1 \eta - \ln(-\cos \eta - k_1 \sin \eta)$$

и рассматривать как параметрические уравнения сечения поверхности плоскостью $h_1 = \text{const}$.

На фиг. 4 приведено сечение пространства параметров плоскостью $h_1 = \text{const}$. Если значения параметров соответствуют области под нижней кривой, то система циклов не имеет; при значениях параметров, отвечающих области между кривыми, система имеет цикл с остановкой; область над верхней кривой дает значения параметров, при которых система имеет цикл без остановки.

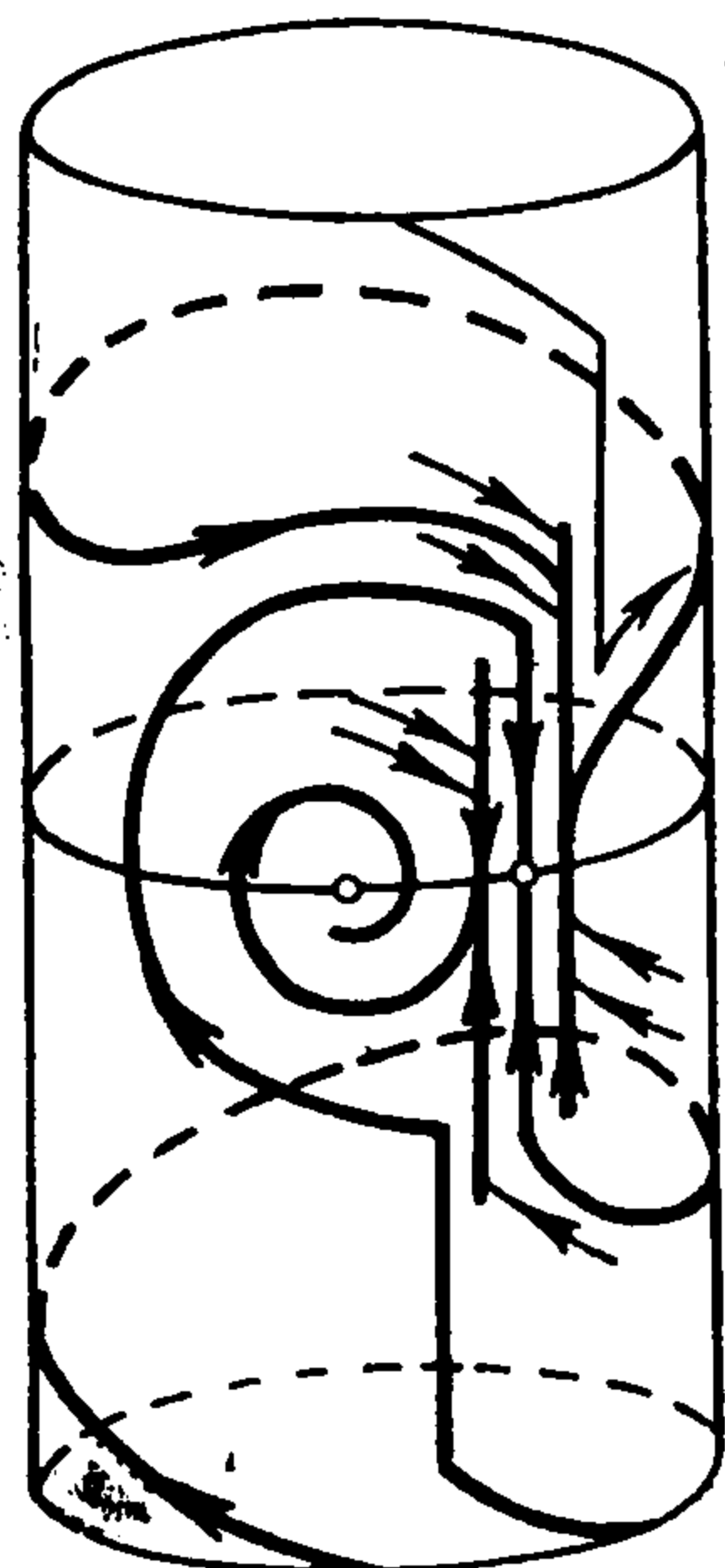
Дальнейшее исследование показывает, что для выбранной области пространства параметров $0 < h_1 < 1, a > k_1 \pi, r > 0$ система не имеет циклов, охватывающих цилиндр при $y < 0$ и циклов, не охватывающих цилиндр. Качественная картина фазовых траекторий системы для случая цикла с остановкой приведена на фиг. 5.



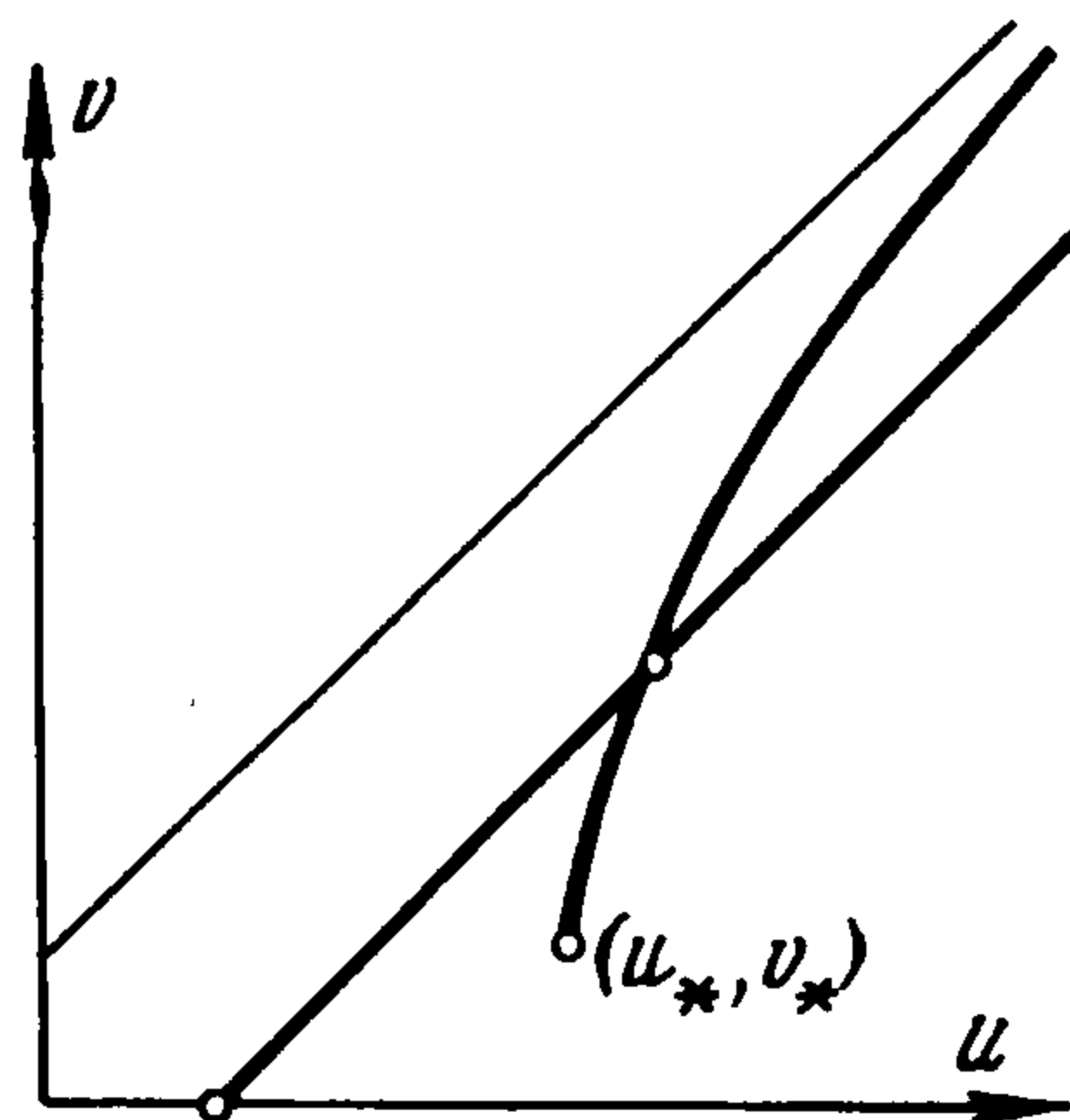
Фиг. 4

Пример 2. Это пример отличается от примера 1 знаками $F(\varphi)$ и r и иллюстрирует второй случай доопределения.

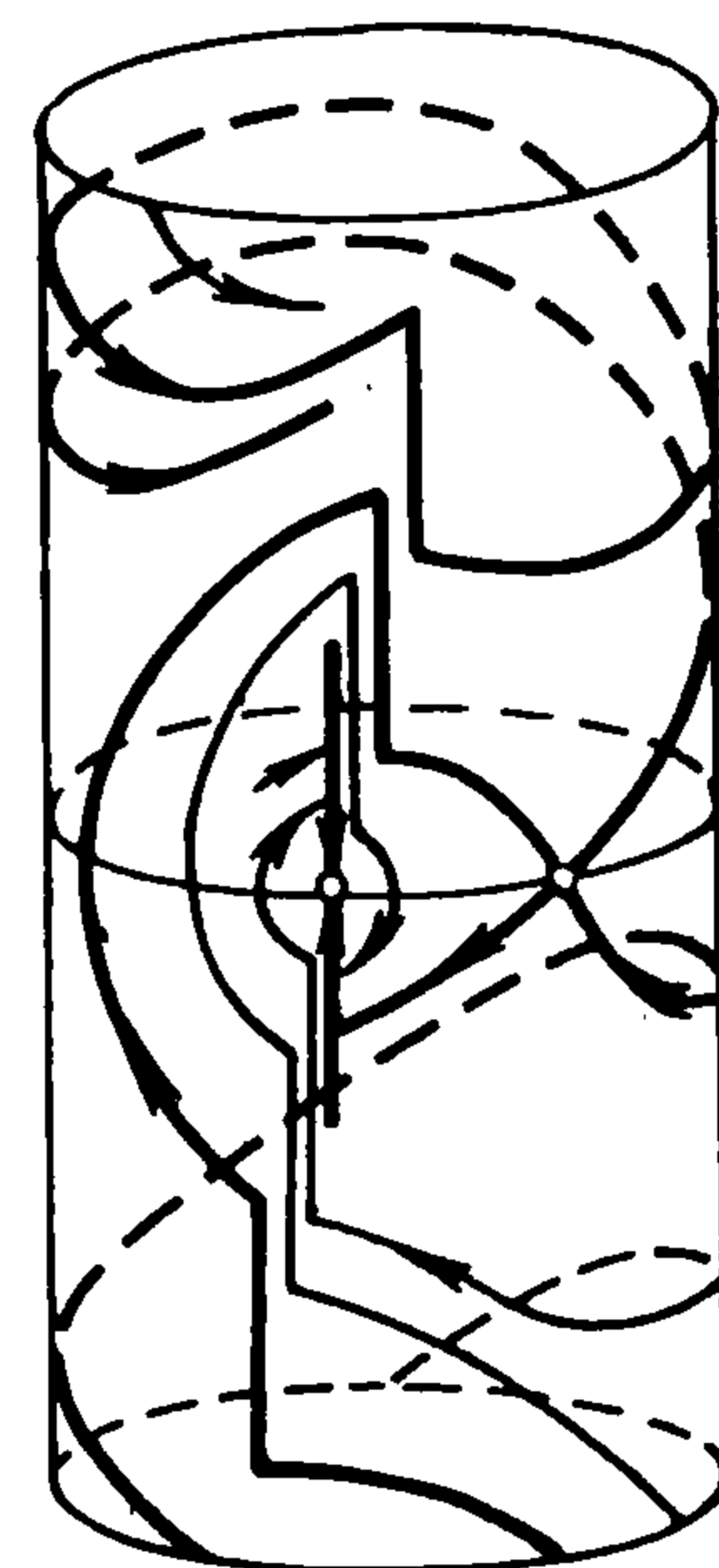
Уравнения функции соответствия $u = u(v)$, ее производных и асимптоты получают из соответствующих уравнений примера 1, если считать $h_1 = h(\pi + b)/\sqrt{\pi}$, $\omega_1 = \sqrt{1 + h_1^2}$, заменить Ω на $-\Omega$, тригонометрические функции на гиперболические со сходным названием и поставить минус перед второй производной.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Для получения всех значений v и u нужно менять η от 0 до ∞ , при этом v меняется от ∞ до $v_* = \sqrt{\pi}(1 - \Omega)(\omega_1 + h_1)$, а u — от ∞ до $u_* = \sqrt{\pi}(1 + \Omega)(\omega_1 - h_1)$, где v_* и u_* — отрезки, отсекаемые сепаратрисами седла $(-\pi\Omega, 0)$ соответственно от полупрямых V и U . Кривая $u = u(v)$ изображена на фиг. 6 вместе с прямой $v = u + 2r$, являющейся графиком функции соответствия преобразования полупрямой $\varphi = \pi, y > 0$ в себя, осуществляемого доопределенными движениями.

На фиг. 6 изображен случай, когда кривая и прямая имеют точку пересечения. Это означает, что на фазовом цилиндре имеется предельный цикл. Легко видеть, что он устойчив и что более одного цикла быть не может. При уменьшении r прямая передвигается слева направо, и при некотором r точка пересечения попадает в точку (u_*, v_*) . При этом предельный цикл влипает в сепаратрису седла $(-\pi\Omega, 0)$, образующую петлю. Соответствующая бифуркационная поверхность в пространстве параметров r, h_1, Ω имеет уравнение

$$v_* = u_* + 2r, \text{ или } \Omega = -r / (\sqrt{\pi}\omega_1) + h_1 / \omega_1$$

Это линейчатая поверхность, составленная из прямых, параллельных плоскости $h_1 = 0$. Наличие цикла отвечает область значений параметров, удовлетворяющих неравенству

$$\Omega > -r / (\sqrt{\pi}\omega_1) + h_1 / \omega_1$$

Дальнейшее исследование показывает, что для выбранной области значений параметров $h_1 > 0, r < 0, 0 < \Omega < 1$ система не имеет циклов, охватывающих цилиндр при $y < 0$ и циклов, не охватывающих цилиндр. Качественная картина фазовых траекторий системы для случая, когда имеется предельный цикл, приведена на фиг. 7.

Приложение 1. Пусть $r\beta < u < r(\beta - \gamma)$. Функцию $u = u(\tau, \mu)$, определяемую первым из равенств (4), не существующую при $\mu = 0$, доопределим ее пределом при $\mu \rightarrow 0$. Получившаяся при этом функция

$$f(\tau, \mu) = \begin{cases} u(\tau, \mu) & \text{при } \mu > 0 \\ r[\beta - \gamma \exp(-\tau/r)] & \text{при } \mu = 0 \end{cases}$$

удовлетворяет следующим условиям: 1) непрерывна, 2) если $\tau_0 = r \ln[r\gamma / (r\beta - u)]$, то $f(\tau_0, 0) = u$, 3) производная $\partial f / \partial \tau < 0$.

Следовательно, при зафиксированном на рассматриваемом интервале u равенство $u = f(\tau, \mu)$ определяет в некоторой окрестности точки $(\tau_0, 0)$ однозначную непрерывную функцию $\tau = \tau_*(\mu)$ такую, что $\tau_*(0) = \tau_0$. А так как $\tau(\mu) \equiv \tau_*(\mu)$ при $\mu \neq 0$, то $\lim_{\mu \rightarrow 0} \tau(\mu) = \tau_0$ при $\mu \rightarrow 0$.

Пусть теперь $u \geq r(\beta - \gamma)$. Так как $\partial u / \partial \tau < 0$, то функция $\tau = \tau(\mu)$, соответствующая фиксированному на рассматриваемом интервале u , ограничена сверху функцией $\tau = \tau(\mu)$ соответствующей любому u , фиксированному на интервале $r\beta < u < r(\beta - \gamma)$, а предел этой ограничивающей функции при $\mu \rightarrow 0$ может быть сделан как угодно близким к нулю, если взять u достаточно близким к $r(\beta - \gamma)$.

Приложение 2. При $r\beta < u < r(\beta - \gamma)$ это предельное значение находится непосредственной подстановкой предельного значения $\tau(\mu)$. Если $u \geq r(\beta - \gamma)$, то положим в равенствах (4) $\kappa = \omega\tau$. Первое из них при фиксированном u и малых μ определяет функцию $\kappa = \kappa(\mu)$ такую, что

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \kappa(\mu) = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{u - r(\beta - \gamma)}$$

(доказательство аналогично доказательству в приложении 1). Положим теперь во втором из равенств (4) $\kappa = \kappa(\mu)$ и найдем, что при $\mu \rightarrow 0$ будет $\lim_{\mu \rightarrow 0} v[\kappa(\mu), \mu] = u - r(\beta - \gamma)$.

Приложение 3. Рассмотрим функцию $u_0 = u[\tau(\mu), \mu]$, где $\tau = \tau(\mu)$ — функция, определяемая равенством $v(\tau, \mu) = 0$. Из того, что при $\mu \rightarrow 0$ будет $\lim_{\mu \rightarrow 0} v(\tau, \mu) = -0$ и $\lim_{\mu \rightarrow 0} v(\tau, \mu) = +\infty$, при $\tau \rightarrow 0$ следует, что $\tau(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$. Положим $\kappa = \omega\tau$. Тогда $u_0 = u[\kappa(\mu), \mu]$, где $\kappa = \kappa(\mu)$ — функция, определяемая равенством $v(\kappa, \mu) = 0$. Из того, что при $\mu \rightarrow 0$ будет $\lim_{\mu \rightarrow 0} v(\kappa, \mu) = r(\beta - \gamma) / (\exp 2\kappa - 1) > 0$ и при $\kappa \rightarrow \infty$: $\lim_{\mu \rightarrow 0} v(\kappa, \mu) = -2\omega\mu(1 - \alpha/\omega) / (\beta - \gamma) < 0$ следует, что $\kappa(\mu) \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow 0$. Поэтому

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\exp \alpha\tau(\mu)}{\operatorname{sh} \omega\tau(\mu)} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{2}{\exp[(\omega - \alpha)\tau(\mu)] - \exp[-(1 + \alpha/\omega)\kappa(\mu)]} = 2$$

$$\left(\lim_{\mu \rightarrow 0} (\omega - \alpha) = 1/r, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \alpha/\omega = 1 \right)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_0 = \frac{2}{\beta - \gamma} \lim_{\mu \rightarrow 0} (\omega\mu) \left[-\gamma \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\exp \alpha\tau(\mu)}{\operatorname{sh} \omega\tau(\mu)} + \beta \left(\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \operatorname{cth} \kappa + \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\omega} \right) \right] = r(\beta - \gamma)$$

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial \kappa} = -\frac{v}{\operatorname{sh} \kappa} \exp\left(\frac{\alpha\kappa}{\omega}\right)$$

а для $u = u_0$ имеем $v = 0$, то

$$\frac{du_0}{d\mu} = \frac{\partial u_0}{\partial \mu} + \frac{\partial u_0}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{d\mu} = \frac{\partial u_0}{\partial \mu} = \left[(\omega\mu)' \left(-\gamma \frac{\exp \alpha\tau(\mu)}{\operatorname{sh} \omega\tau(\mu)} + \beta \operatorname{cth} \kappa(\mu) + \beta \frac{\alpha}{\omega} \right) + \right. \\ \left. + \omega\mu \left(-\gamma \frac{\exp \alpha\tau(\mu)}{\operatorname{sh} \omega\tau(\mu)} \kappa(\mu) + \beta \right) \left(\frac{\alpha}{\omega} \right)' \right] \frac{2}{\beta - \gamma} \rightarrow +\infty$$

при $\mu \rightarrow 0$

$$\left(\lim_{\mu \rightarrow 0} (\omega\mu)' = h + \frac{1}{r}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\omega} \right)' = -\frac{4}{r^2(\beta - \gamma)} > 0 \right)$$

Автор благодарен Н. Н. Баутину, сделавшему ряд полезных замечаний.

Поступила 8 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Капранов М. В. Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты. Радиотехника, 1956, т. 2, № 12.
2. Губарь Н. А. Исследование одной кусочно-линейной динамической системы с тремя параметрами. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
4. Айзерман М. А. Теория автоматического регулирования. М., «Наука», 1966.
5. Splitt F. J. Design and Analysis of a Linear Phase—Locked Loop of wide Dynamic Range. IEEE Trans. Commun. Technol., 1966, vol. 14, No. 4.