Значения напряжений в заделке, рассчитанные по формулам (2.1) и (2.7), приведены в табл. 4. При этом коэффициенты $E_0(t)$, $F_n(t)$ представлялись в виде

$$E_0(t) = \sum_{s=0}^{s=9} l_s T_s(t), \qquad F_n(t) = \sum_{s=0}^{s=9} e_s(n) T_s(t)$$

Для определения коэффициентов l_s и $e_s(n)$ использовались представления (2.4), (2.5) через функции Бесселя от комплексного аргумента.

Из табл. 4 видно, что напряжения в заделке уменьшаются с увеличением зоны контакта. Все расчеты были выполнены на ЭЦВМ «Минск-12».

Автор благодарит И. И. Воровича за постановку задачи и ценные указания при ее выполнении.

Поступила 25 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Копасенко В. В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, стр. 109—115.
2. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5, стр. 934—943.
3. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
4. Александров В. М. О приближенном решении одного класса интегральных уравнений. Изв. АН АрмССР, серия физ.-матем. наук, 1961, т. 14, № 3.
5. Nelson C. W. New Tables of Howland's and Related Integrals. Math. Comput., 1961, vol. 15, No. 73, p. 12—18.
6. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., «Наука», 1966.

О ВЫПУЧИВАНИИ ГИБКИХ ПЛАСТИН

Л. С. Срубщик, В. А. Треногин

(Ростов-на-Дону, Москва)

Рассматривается задача о поведении тонкой гибкой пластины произвольной формы под действием малой нормальной нагрузки εQ и внешнего краевого усилия, составляющие которого вдоль осей x и y равны, соответственно, p и q. В случае, когда нормальная нагрузка отсутствует, $p = p_0$ и $q = q_0$, эта задача, как известно, имеет тривиальное решение

$$w = 0, \quad F = {}^1\!/_2 (p_0 x^2 + q_0 y^2)$$

где w — прогиб пластины, а F — функция напряжений. Вблизи этого решения при малых отклонениях p, q от p_0, q_0 и при малой нормальной нагрузке существует одна или несколько равновесных форм пластины. Если p_0, q_0 не являются критическими, то существует единственная форма равновесия, аналитически зависящая от указанных параметров. Метод определения решения для этого случая в виде ряда по степеням малого параметра был предложен П. Я. Полубариновой-Кочиной [1] и позднее обоснован И. И. Воровичем [2].

Случай критических значений p_0, q_0 более сложен (хорошо известное явление «выпучивания» пластины).

Первое исследование для круглой пластины при наличии радиальной симметрии ($p = q$) и при отсутствии нормальной нагрузки было проведено Фридрихсом и Стокке ром [3], которые при помощи вариационного метода показали рождение пары новых решений при переходе через критическое значение. Совсем недавно Бергер и Файф [4] перенесли эти результаты на случай пластины произвольной формы при отсутствии нормальной нагрузки и в предположении, что краевые усилия зависят от одного параметра, воспользовавшись при этом топологической теоремой М. А. Красносельского о бифуркации [5]. Гораздо раньше, в 1955—1958 гг. И. И. Ворович [6] для исследования общих задач нелинейной теории пологих оболочек, наряду с вариационными и топологическими методами, применил теорию собственных значений нелинейных нечетных операторов, дал качественное исследование поведения пластин и оболочек после потери устойчивости. Кроме того, И. И. Ворович использовал один из вариантов аналитического метода Ляпунова — Шмидта [2] и в качестве конкретного приложения рассмотрел [7] задачу о поведении после потери устойчивости кольцеобразной круглой пластины при наличии малой нормальной нагрузки и разнообразных краевых условиях.

Для рассмотрения указанной вначале работы задачи здесь применяется метод [8], который несколько отличается от метода И. И. Воровича, хотя по существу очень близок к нему.

Далее показано, что если значения p_0, q_0, $\varepsilon = 0$ являются критическими, то окрестность точки $p = p_0$, $q = q^0$, $\varepsilon = 0$ разбивается некоторой поверхностью (поверхность разветвления) на две части, в одной из которых существует единственное малое решение, а во второй — три малых решения. При этом предполагается, что нуль является простым собственным значением соответствующей линеаризованной краевой задачи. Приводятся приближенные формулы для всех этих малых решений.

§ 1. Постановка задачи и запись ее в виде одного операторного уравнения. Пусть пластина занимает ограниченную область Ω с достаточно гладкой границей Γ. Пластина находится под действием малой нормальной нагрузки и внешних краевых усилий, с нормальной и касательной составляющими вида

$$\sigma_n|_\Gamma = p \cos^2\theta + q \sin^2 \theta, \ \sigma_\tau|_\Gamma = \frac{1}{2} (p - q) \sin 2\theta$$

Здесь p и q — составляющие внешнего усилия в направлениях x и y, а θ — угол, который нормаль n в соответствующей точке Γ образует с осью абсцисс. Тогда систему нелинейных уравнений Кармана можно привести к виду

$$\Delta^2 F + \frac{1}{2} [w, w] = 0, \ \varkappa^2\Delta^2 w - [w, F] - \varepsilon Q = 0 \tag{1.1}$$

$$[w, F] = w_{xx}F_{yy} + w_{yy}F_{xx} - 2w_{xy} F_{xy} \tag{1.2}$$

с краевыми условиями

$$F|_\Gamma = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \tag{1.3}$$

Кроме того, предполагается, что пластина либо жестко защемлена по контуру

$$w|_\Gamma = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \tag{1.4}$$

либо шарнирно опирается по краю, т. е.

$$w|_\Gamma = 0, \qquad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n}\right]_\Gamma = 0 \tag{1.5}$$

Уравнения (1.1)—(1.5) записаны в безразмерной форме. При этом

$$w = \frac{W}{d}, \quad F = \frac{\Phi}{Ed^2}, \quad x = \frac{x_1}{d}, \quad y = \frac{y_1}{d}, \quad \varkappa^2 = \frac{h^2}{12(1-\sigma^2)d^2}$$

$$\varepsilon Q = \frac{q_1 d}{Eh}, \quad 0 < \sigma < 0.5$$

Здесь W — прогиб пластины; Φ — функция напряжений; d — характерный диаметр области Ω; x_1, y_1 — прямоугольные координаты; q_1 — интенсивность нормальной нагрузки; h — толщина пластины; E — модуль Юнга; σ — коэффициент Пуассона и ρ — радиус кривизны контура в точке Γ.

Нашей целью является исследование задачи (1.1)—(1.5) в окрестности значений параметров p_0 и q_0. Для этого положим

$$p = p_0 + \lambda, \ q = q_0 + \mu \tag{1.6}$$

Введем в рассмотрение банаховы пространства E_1 и E_2 двумерных функциональных столбцов. Пусть E_1 — банахово пространство столбцов

$$u(x, y) = \begin{Vmatrix} w(x, y) \\ F(x, y) \end{Vmatrix}$$

компоненты которых w и F принадлежат пространству С. Л. Соболева $W_\alpha^4(\Omega)$ $(\alpha > 1)$ и удовлетворяют, соответственно, краевым условиям (1.4) или (1.5) и (1.3).

Далее, пусть E_2 — пространство столбцов

$$h(x, y) = \begin{Vmatrix} v(x, y) \\ \Phi(x, y) \end{Vmatrix}$$

компоненты которых принадлежат $L_\alpha(\Omega)$ $(\alpha > 1)$. В этих пространствах, с учетом формул (1.6), задачу можно записать в виде одного функционального уравнения

$$Bu = \varepsilon\varphi + \lambda Au + \mu Cu + Du \tag{1.7}$$

Здесь B, A и C — линейные операторы из E_1 в E_2

$$B = \begin{Vmatrix} \varkappa^2\Delta^2 - p_0\partial^2(\cdots)/\partial y^2 - q_0\partial^2(\cdots)/\partial x^2 & 0 \\ 0 & \Delta^2 \end{Vmatrix}, \qquad A = \begin{Vmatrix} \partial^2(\cdots)/\partial y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$C = \begin{Vmatrix} \partial^2(\cdots)/\partial x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \varphi = \begin{Vmatrix} Q \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{1.8}$$

Здесь φ — элемент из E_2, а $D(u)$ — квадратичный оператор из E_1 в E_2, порожденный билинейным симметричным дифференциальным выражением

$$2D(u_1, u_2) = \begin{Vmatrix} [w_1, F_2] + [w_2, F_1] \\ -[w_1, w_2] \end{Vmatrix}, \qquad D(u) = D(u, u) = \begin{Vmatrix} [w, F] \\ -[w, w] \end{Vmatrix} \tag{1.9}$$

Возможность записи задачи в виде уравнения (1.7) в указанных пространствах следует из априорных оценок для уравнений теории пластин и пологих оболочек, установленных в работах И. И. Воровича [9] и Н. Ф. Морозова [10].

§ 2. **О продолжении решений.** Рассмотрим сначала более простой случай, когда оператор B имеет ограниченный обратный оператор B^{-1}. Запишем уравнение

$$\varkappa^2\Delta^2 w - p_0 w_{yy} - q_0 w_{xx} = 0, \qquad \Delta^2 F = 0 \tag{2.1}$$

с краевыми условиями (1.3) и (1.4) (либо (1.5)). Из (2.1) следует, что $F \equiv 0$. Таким образом, все исследование сводится к изучению первого уравнения (2.1) с краевыми условиями (1.4) (или (1.5)).

Пусть p_0 и q_0 таковы, что эта задача не находится на спектре. Так будет, в частности, если $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$. Механически это означает, что пластина растягивается внешними усилиями, приложенными к краю пластины. В этих условиях оператор B^{-1} существует и ограничен. Из теоремы о неявных операторах [11] вытекает, что существует единственное малое решение $u = u(\varepsilon, \lambda, \mu)$, удовлетворяющее условию $u(0, 0, 0) = 0$. Это решение можно найти [12] в виде ряда по целым степеням параметров ε, λ и μ.

Пусть, далее, p_0 и q_0 таковы, что задача (2.1) находится на спектре. Тогда она имеет конечное число линейно независимых решений $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Из того факта, что формально сопряженная задача совпадает с (2.1), следует, что для разрешимости неоднородного уравнения $Bu = h$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_\Omega v(x, y) f_i(x, y)\, dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{2.2}$$

Для исследования уравнения (1.7) теперь можно составить уравнение разветвления Ляпунова — Шмидта [12], которое в этом случае имеет вид системы n уравнений с n неизвестными $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и параметрами λ, μ, ε

$$L^{(s)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi, \varepsilon, \lambda, \mu) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.3}$$

Исследование этой системы в общем случае представляет большие трудности. Наличие многих параметров приводит к тому, что вместо точек ветвления в случае одного параметра появляются поверхности (или кривые) разветвления, разбивающие окрестность точки $\varepsilon = \mu = \lambda = 0$ на части, и при переходе через эти поверхности рождаются (или исчезают) новые пары решений.

§ 3. **Исследование явления выпучивания при $n = 1$.** Остановимся подробнее на случае $n = 1$. Здесь уравнение разветвления (2.3) имеет вид

$$L(\varepsilon, \lambda, \mu, \xi) \equiv \sum_{i+j+k\geqslant 0} L_{ijk0}\varepsilon^i\lambda^j\mu^k + \sum_{l=1}^{\infty} \zeta^l \sum_{i+j+k\geqslant 0} L_{ijkl}\varepsilon^i\lambda^j\mu^k = 0 \qquad (3.1)$$

(индексы указывают, при каких степенях ε, λ, μ и ξ стоят коэффициенты).

Вычислим его главные коэффициенты. Рассуждая так же, как и в п. 4.3 работы [12], и используя (2.2) при $n = 1$, получим

$$a_0 \equiv L_{1000} = \iint\limits_\Omega Qf\, dx\, dy, \qquad \iint\limits_\Omega f^2 dx\, dy = 1 \qquad (3.2)$$

Здесь f — нетривиальное решение задачи (2.1), удовлетворяющее второму соотношению в (3.2). Коэффициенты $L_{0100} = L_{00100} = 0$, так как уравнение не содержит свободных членов, содержащих λ и μ

$$a_1 \equiv L_{0101} = \iint\limits_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f dx\, dy = -\iint\limits_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 dx\, dy < 0 \qquad (3.3)$$

Точно так же

$$a_2 \equiv L_{0011} = -\iint\limits_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 dx\, dy < 0 \qquad (3.4)$$

Для нахождения первого отличного от нуля коэффициента L_{000l} ($l \geqslant 2$) воспользуемся приемом, предложенным в [12]. Введем оператор B_1, определяемый для $u \in E_1$ формулой

$$B_1 u = \left\| \begin{matrix} \Delta^2 w - p_0 \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - q_0 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \iint\limits_\Omega wf\, ds\, dt f(x, y) \\ \Delta^2 F \end{matrix} \right\| \qquad (3.5)$$

Согласно обобщенной лемме Шмидта оператор B_1 имеет ограниченный обратный оператор. Рассмотрим уравнение

$$B_1 u = D(u) + \xi\varphi_1, \quad \varphi_1 = \left\| \begin{matrix} f \\ 0 \end{matrix} \right\| \qquad (3.6)$$

Здесь ξ — произвольный малый параметр. Решение уравнения (3.6) можно найти в виде бесконечного ряда, сходящегося в метрике $W_\alpha^{(4)}(\Omega)$

$$u(\xi) = u_1\xi + u_2\xi^2 + u_3\xi^3 + \ldots \qquad (3.7)$$

Теперь коэффициенты L_{000l} ($l \geqslant 2$) вычисляются из соотношений

$$\sum_{l=2}^{\infty} L_{000l}\xi^l = \iint\limits_\Omega D_1(u(\xi))\, f\, dx\, dy \qquad (3.8)$$

где через D_1 обозначена первая компонента D. Подставляя (3.7) в (3.6), получим рекуррентную систему для определения u_i ($i = 1,2,\ldots$)

$$B_1 u_1 = \varphi_1, \quad B_1 u_2 = D(u_1), \quad B_1 u_3 = 2D(u_1, u_2), \ldots \qquad (3.9)$$

Из первого уравнения (3.9) в силу (3.5) и (3.2) находим, что $u_1 = \varphi_1$. Для определения u_2 вычисляем сначала $Du_1 = D\varphi_1$. Используя (1.9), получим

$$D(u_1) = \left\| \begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{2}[f, f] \end{matrix} \right\|$$

Отсюда в силу (3.8) следует, что $L_{0002} = 0$. Покажем теперь, что

$$a_3 \equiv L_{0003} = -\int_\Omega (\Delta F_2)^2 \, dx\, dy < 0 \tag{3.10}$$

где F_2 — некоторая функция, которая будет определена ниже. Для этого из (3.9) находим

$$u_2 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ F_2 \end{matrix} \right\|$$

где F_2 — решение краевой задачи

$$\Delta^2 F_2 = -{}^1\!/_2 [f, f], \qquad F_2|_\Gamma = \partial F_2/\partial n\,|_\Gamma = 0 \tag{3.11}$$

Используя (1.9), выводим

$$2D(u_1 u_2) = \left\| \begin{matrix} [f, F_2] \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

Теперь, применяя (3.8), (3.11), при помощи интегрирования по частям получаем

$$a_3 = 2 \iint_\Omega D_1(u_1, u_2)\, f dx\, dy = \iint_\Omega [f, F_2]\, f\, dx\, dy = \iint_\Omega F_2 [f, f]\, dx\, dy = -2 \iint_\Omega (\Delta F_2)^2 \, dx\, dy$$

Из формулы (3.10) вытекает, что задача имеет для всех достаточно малых ε, λ и μ ровно три комплексных решения. Нас, однако, интересуют только вещественные решения. Построим приближенно поверхность разветвления, которая, как будет видно далее, делит окрестность точки $\varepsilon = \lambda = \mu = 0$ на две части, в одной из которых существует одно решение, а в другой — три решения, два из которых сливаются на поверхности разветвления.

Приближенное уравнение разветвления имеет вид

$$a_0\varepsilon + a_1\lambda\xi + a_2\mu\xi + a_3\xi^3 + \ldots = 0 \tag{3.12}$$

§ 4. Асимптотика малых решений. Сначала рассмотрим простейший случай, когда $Q \equiv 0$. Тогда $L_{i000} = 0$ $(i = 1,2,\ldots)$, и уравнение разветвления имеет ξ множителем $\xi = 0$ соответствует тривиальному решению задачи. Сократив на ξ, придем к уравнению

$$a_1\lambda + a_2\mu + a_3\xi^2 + \ldots = 0 \tag{4.1}$$

Отсюда видно, что окрестность точки $\lambda = \mu = 0$ делится кривой разветвления (ее приближенное уравнение $a_1\lambda + a_2\mu = 0$) на две части, выше кривой уравнение (4.1) не имеет малых решений, а ниже имеет ровно два решения. В первом приближении эти решения даются формулами

$$\xi_{1,2} = \pm [-a_3^{-1}(a_1\lambda + a_2\mu)]^{1/2} \tag{4.2}$$

В этом случае задача (1.1)—(1.5) имеет, кроме тривиального, еще два малых нетривиальных решения, причем их асимптотические представления имеют вид

$$w_{1,2} \approx \xi_{1,2}(\lambda, \mu)\, f(x, y), \; F_{1,2} \approx 0 \tag{4.3}$$

Отметим, что частный случай $p = q$ (т. е. $\lambda = \mu$) рассмотрен в работе [4], где топологическим методом было доказано рождение двух новых решений при переходе через критическое значение. В дополнение к этим результатам заметим, что в этом случае решение можно найти в виде сходящихся рядов [12] по степеням $(-\lambda)^{1/2}$, а первое приближение получается из (4.2) при $\mu = \lambda$. Точно такие же выводы можно сделать для случая, когда p и q связаны некоторой зависимостью.

Теперь рассмотрим случай, когда $Q \not\equiv 0$. Здесь ограничимся такими значениями Q, когда $a_0 \neq 0$. Из уравнения (3.12) можно заключить, что окрестность $\varepsilon = \lambda = \mu = 0$ делится поверхностью разветвления на две части, в одной из которых одно решение, а в другой — три. Для приближенного построения этой поверхности составим результант $R(\varepsilon, \lambda, \mu)$ многочленов

$$P(\varepsilon, \lambda, \mu, \xi) = a_0\varepsilon + a_1\lambda\xi + a_2\mu\xi + a_3\xi^3, \qquad \partial P/\partial\xi = a_1\lambda + a_2\mu + 3a_3\xi^2$$

Уравнение дискриминантной поверхности, совпадающей с поверхностью разветвления $R(\varepsilon, \lambda, \mu) = 0$ имеет вид

$$4(a_1\lambda + a_1\mu)^3 + 27a_0^2a_3\varepsilon^2 = 0 \qquad (4.4)$$

и задает цилиндрическую поверхность, образующими которой служат полукубические параболы.

Отметим, что в этом случае все решения задачи приближенно представимы формулами

$$w \sim \xi(\varepsilon, \mu, \lambda)\, f(x, y), \quad F \sim 0$$

где ξ — решение кубического уравнения

$$P(\varepsilon, \lambda, \mu, \xi) = 0$$

Остановимся подробнее на частном случае, когда $p = kq$ (т. е. $\lambda = k\mu$). Тогда

$$P(\varepsilon, \lambda, \mu, \xi) \equiv a_0\varepsilon + b\mu\xi + a_3\xi^3 = 0, \qquad b = a_1k + a_2 \qquad (4.5)$$

(Полагаем, что если $k = \infty$, то $b = a_1$ и в последующих выкладках надо μ заменить на λ.) Для исследования асимптотики решения ξ удобно перейти от двух малых параметров ε и μ в уравнении (4.5) к одному параметру, принимающему произвольные вещественные значения. Этого можно добиться, вводя новые переменные θ и η по формулам

$$\xi = \left(\frac{a_0}{a_3}\varepsilon\right)^{1/3}\eta, \qquad \theta = b\mu\,(a_0\varepsilon)^{-2/3}a_3^{-1/3} \qquad (4.6)$$

Теперь из (4.5) имеем

$$1 + \theta\eta + \eta^3 = 0$$

Точка A $(-{}^3/_2(2)^{1/3},\ {}^1/_2\,(4)^{1/3})$ кривой, изображающей функцию $\eta = \eta(\theta)$ будет точкой ветвления. Существует три однозначных ветви $\eta = \eta_0(\theta)$, $\eta = \eta_+(\theta)$ и $\eta = \eta_-(\theta)$. Последние две определены левее точки абсциссы точки A и сливаются в ней.

Определяя с нужной степенью точности $\eta_0(\theta)$, $\eta_-(\theta)$ и $\eta_+(\theta)$ из уравнения (4.7), можно при помощи формул (4.6) и (4.3) найти малые решения задачи (1.1)—(1.5).

Дадим, например, без обоснования асимптотику η_0, η_- и η_+ при $\theta \to \pm\infty$ и при $\theta \to A - 0$. Первый случай соответствует асимптотике соответствующих значений ξ вне малой полоски, окружающей кривую разветвления, а второй — асимптотике решений вблизи кривой разветвления.

Из (4.6) и (4.7) имеем

$$\eta_0(\theta) \sim -(-\theta)^{1/2}, \qquad \eta_+(\theta) \sim (-\theta)^{1/2}, \qquad \eta_-(\theta) \sim -1/2\theta$$

Точно также при $\theta \to -\infty$ из (4.7) находим

$$\eta_0(\theta) \sim -(-\theta)^{1/2}, \qquad \eta_+(\theta) \sim (-\theta)^{1/2}, \qquad \eta_-(\theta) \sim -1/2\theta$$

Применяя (4.6), получаем при $\mu\varepsilon^{-2/3} \to -\infty$

$$\xi_{0,+}(\varepsilon, \mu) \sim \mp \operatorname{sign}(a_0\varepsilon)\frac{(-b\mu)^{1/2}}{a_3}, \qquad \zeta_-(\varepsilon, \mu) \sim \frac{a_0\varepsilon}{\mu}$$

Теперь построим асимптотику вблизи кривой разветвления. Производя замены

$$\theta = -3\cdot 2^{-2/3} - \tau, \quad \eta = 2^{-1/3} + \sigma$$

Из (4.7) нетрудно получить

$$\sigma \sim \pm\,({}^1/_3\,\tau)^{1/3} \text{ при } \tau \to 0,\ \sigma \to 0$$

Отсюда следует

$$\eta_\pm(\theta) \sim 2^{-1/3} \pm [-3\cdot 2^{-2/3} - \theta]^{1/3} \quad \text{при} \quad \theta \to -3\cdot 2^{-2/3}$$

Наконец, в силу (4.6) получаем

$$\xi_\pm(\varepsilon, \mu) \sim (a_0\varepsilon / a_3)^{1/3}\{2^{-1/3} \pm [-3\cdot 2^{-2/3} - b\mu\,(a_0\varepsilon)^{-2/3}a_3^{-1/3}]^{1/2}\}$$

$$\varepsilon_0(\varepsilon, \mu) \sim (4a_0\varepsilon / a_3)^{1/3} \text{ и } \mu\varepsilon^{-2/3} \to -3\cdot 2^{-2/3}\, a^{1/3}a^{2/3}b^{-1}$$

§ 5. **Пример. Круглая симметрично загруженная пластина.** Переходя к полярной системе координат (r, θ) и производя замены в (1.1)—(1.4)

$$\frac{dw}{dr} = \vartheta, \qquad \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = p + \psi, \qquad \int_0^{\tau} Q(s)\, s ds = Q_1(r)$$

получим уравнения круглой пластины в случае радиальной симметрии

$$A\psi - {}^1/_2\,\vartheta^2 = 0, \qquad \varkappa^2 A\vartheta + p_0\vartheta = -\varepsilon Q_1(r) - \lambda\vartheta - \vartheta\psi$$
$$A(\cdots) \equiv -r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r(\cdots), \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1 \tag{5.1}$$

с краевыми условиями

$$[\vartheta / r]_{r=0} < \infty, \ [\psi / r]_{r=0}, < \infty \ \psi(1) = 0, \quad \vartheta(1) = 0 \tag{5.2}$$

Здесь в качестве пространства E_1 возьмем пространство двумерных функциональных столбцов, компоненты которых будут элементами пространства $C_2(0,1)$ и удовлетворяют граничным условиям (5.2). В качестве E_2 возьмем пространство C_0 (0,1).

При помощи матричных обозначений, аналогичных приведенным в § 1, задача записывается в виде уравнения (1.7). Критические значения параметра p_0 и отвечающие им собственные функции определяются из краевой задачи

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\vartheta}{dr} - \left(p_0 + \frac{1}{r^2}\right)\vartheta = 0, \qquad \vartheta(1) = \vartheta(0) = 0 \tag{5.3}$$

Задача (5.3) имеет счетное множество отрицательных собственных значений $p_{0k} = -\alpha_k^2$, где α_k — положительные нули функции Бесселя $J_1(r)$. Все p_{0k} — простые и им отвечают собственные функции $J_1(\alpha_k, r)$. Можно подсчитать, что коэффициенты уравнения разветвления (4.1) равны $(\lambda = \mu)$

$$a_0 = \int_0^1 Q_1 J_1(\alpha_k r)\, dr, \qquad a_1 = a_2 = -\frac{1}{2}\int_0^1 J_1^2(\alpha_k r)\, dr < 0$$

$$a_3 = -\int_0^1 \left[\left(\frac{d\vartheta}{d\rho}\right)^2 + \frac{\vartheta^2}{\rho^2}\right] d\rho < 0 \qquad \left(\vartheta = r\int_r^1 \frac{dt}{t^3}\int_0^t J_1^2(s)\, s\, ds\right)$$

Выводы получаются такие же, как в § 4.

Поступила 25 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу об устойчивости пластинки. ПММ, 1936, т. 3, вып. 1.
2. Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
3. Friedrichs K., Stoker J. The Non—Linear Boundary Value Problem of the Bucled Plate. Amer. J. math., 1941, vol. 63, No. 4, p. 839—887.
4. Berger M., Fife P. On von Karman's equations and the buckling of a thin elastic plate. Bull. Amer. Math. Soc., 1966, vol. 72, No. 6, p. 1006—1011.
5. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
6. Ворович И. И. Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 1, стр. 37—40.
7. Ворович И. И. О поведении круглой плиты после потери устойчивости. Уч. зап. Ростовск. ун-та, 1955, т. 32, вып. 4, стр. 55—60.
8. Треногин В. А. Уравнение разветвления и диаграмма Ньютона. Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 5, стр. 1032—1035.
9. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2.
10. Морозов Н. Ф. К нелинейной теории тонких пластин. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 5.
11. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., Физматгиз, 1966.
12. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Усп. матем. наук, 1962, т. 17, вып. 2, стр. 13—75.