

Для  $\alpha = 36.62^\circ$  и условия (1) были выбраны следующие значения постоянных при аппроксимациях функции  $L(u, \alpha)$ :  $A_1 = 4.9$ ,  $A_2 = 0.82$ ,  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 1.5$ ,  $M_1 = 2$ ,  $D_1 = 2.443$ ,  $E_1 = 0.882$ . При этом  $H_-(-i) = 1.0089$ , погрешность аппроксимации (2.1) не превышает 3%, погрешность аппроксимации (4.15) — 6.5%.

б)  $\alpha = 90^\circ$ , условие (2),  $\nu = 0.3$

$\gamma^* (\sqrt{ab})$	$\gamma^* (1/2b)$	$N_a^*$	$N_b^*$	$\mu$	
0.295	—	0.537	0.547	2	(нулевое приближение)
0.291	—	0.528	0.541	2	(метод больших $\mu$ )
0	0.407	—	0.626	0	(нулевое приближение)
0	0.390	—	0.613	0	(первое приближение)
0	0.392	—	0.616	0	(метод Винера — Хопфа)

в)  $\alpha = 90^\circ$ , условие (3)

$\gamma^* (\sqrt{ab})$	$\gamma^* (1/2b)$	$N_a^*$	$N_b^*$	$\mu$	
0.326	—	0.607	0.590	2	(нулевое приближение)
0.326	—	0.607	0.590	2	(метод больших $\mu$ )
1.460	1.055	—	1.125	0	(нулевое приближение)
1.456	1.051	—	1.121	0	(метод Винера — Хопфа)

Для  $\alpha = 90^\circ$  и условий на гранях клина (2) и (3) были выбраны следующие значения постоянных при аппроксимациях функции  $L(u, \alpha)$ :  $B_1 = 1$ ,  $n_1 = 1$ ,  $M_2 = 1$ ,  $E_2 = 0.832$ ,  $D_2 = 1$ ,  $A_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ),  $D_1 = 2,549$ ,  $E_1 = 1.652$ . При этом  $H_-(-i) = 0.9997$  для условия (2),  $H_-(-i) = 1.0015$  для условия (3), погрешность аппроксимации (3.1) не превышает 0.5%, погрешность (4.15) и (4.18) не превышает 3% и 1.5%.

В заключение отметим, что решение рассматриваемой задачи для малых значений параметра  $\mu$  может быть получено при помощи метода, изложенного в работе [8].

Поступила 19 I 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Srivastava R. P., Narain Prem. Certain two-dimensional problems of stress distribution in wedge-shaped elastic solids under discontinuous load. Proc. Camb. Philos. Soc., 1965, vol. 61, p. 4.
2. Б а н ц у р и Р. Д. Решение первой основной задачи теории упругости для клина, имеющего конечный разрез. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 6.
3. С м е т а н и н Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое. Инж. ж., МТТ, 1968, № 2.
4. А л е к с а н д р о в В. М. О двух новых методах решения контактных задач для упругой полосы. Научн. сообщения за 1964 год (серия точных и естественных наук), 1965, изд. Ростовск. ун-та.
5. Н о б л Б. Метод Винера — Хопфа. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Ш т а е р м а н И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.
7. К о й т е р В. Т. Бесконечный ряд параллельных трещин в неограниченной упругой пластинке. В сб.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.
8. А л е к с а н д р о в В. М. Контактные задачи для упругого клина. Инж. ж., МТТ, 1967, № 2.

### КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ

В. В. К о п а с е н к о

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о действии штампа на упругую полубесконечную полосу жестко заделанную по короткому краю. Составлены интегральные уравнения относительно контактного давления и нормального напряжения в заделке. Методом Бубнова — Галеркина эти уравнения сводятся к двум системам линейных алгебраических уравнений. Обе системы оказываются хорошо обусловленными, а матрицы их коэффициентов — почти треугольными.

Численные расчеты были проведены для штампа с плоским дном, для наклонного штампа и для параболического и показали высокую эффективность метода.

1. Рассмотрим задачу сжатия полуполосы двумя симметрично расположенными жесткими штампами при следующих граничных условиях (фиг. 1):

$$u = v = 0, \quad x = x_1/h = 0$$

$$|y| = h^{-1} |y_1| \leq 1 \quad (1.1)$$

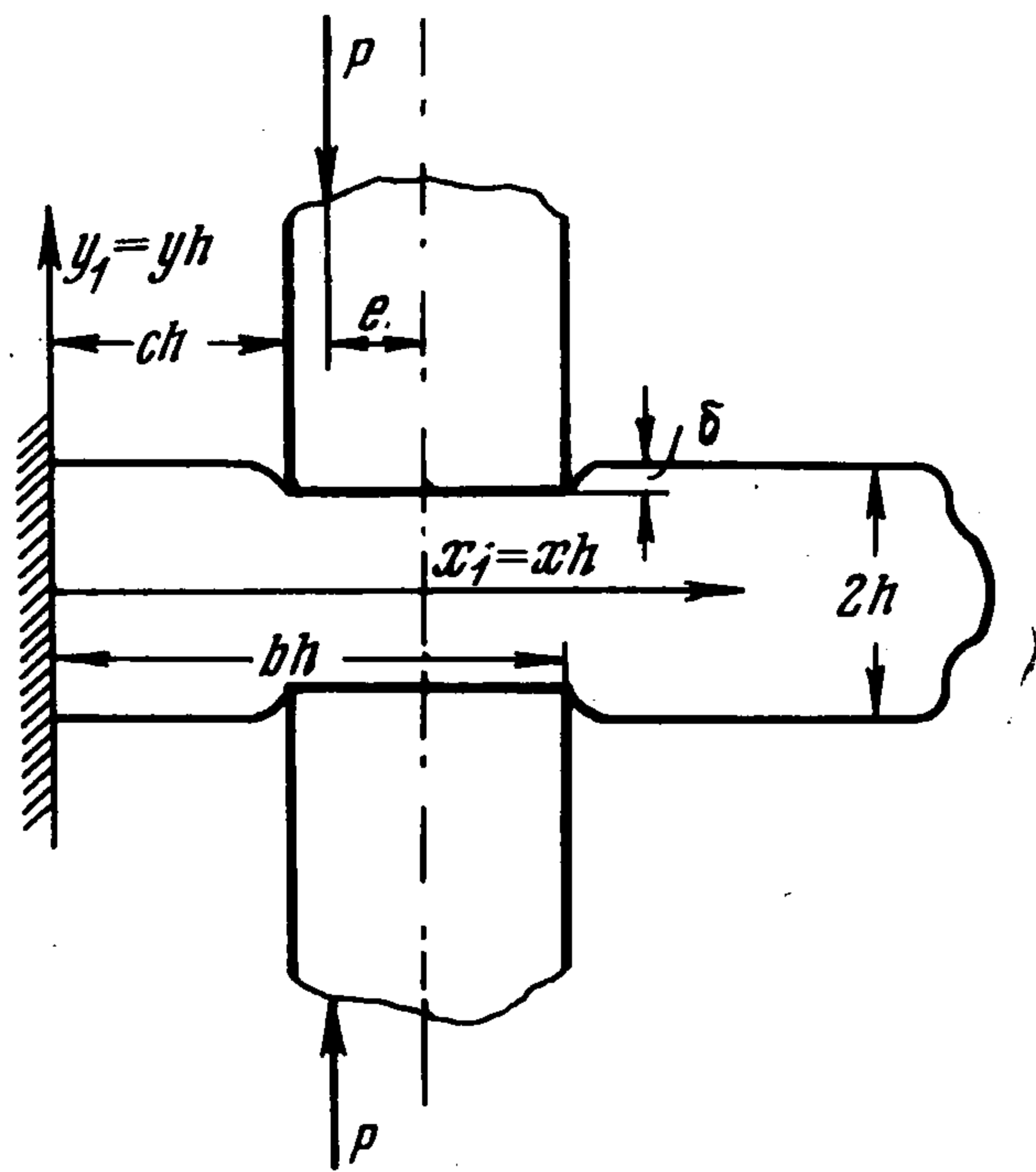
$$\tau_{x_1 y_1} = 0, \quad y = \pm 1, \quad 0 \leq x < \infty \quad (1.2)$$

$$\sigma_{y_1} = 0, \quad y = \pm 1, \quad 0 \leq x \leq c \quad x \geq b \quad (1.3)$$

$$-v = [\delta - f^*(x)] \operatorname{sgn} y, \quad y = \pm 1$$

$$c \leq x \leq b \quad (1.4)$$

Здесь  $u, v$  — перемещения вдоль осей  $x_1$  и  $y_1$  соответственно, а  $\tau_{x_1 y_1}, \sigma_{y_1}$  — касательное и нормальное напряжения;  $f^*(x)$  — уравнение поверхности штампа;  $\delta$  — общее перемещение штампа под действием силы  $P$ . Задача для полуполосы при граничных условиях (1.1), (1.3) в работе [1] сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно нормального напряжения в заделке  $\sigma(\eta)$ . После несложных преобразований данное уравнение принимает вид



$$\int_{-1}^1 \sigma(\eta) \Phi(\eta, y) d\eta + \int_c^b \sigma_{y_1}(r) \omega^*(r, y) dr + C_2 = 0 \quad (1.5)$$

$$\Phi(\eta, y) = \frac{\Phi^*(\eta, y) + \Phi^*(-\eta, y)}{2}; \quad \Phi^*(\eta, y) = \ln |\eta - y| +$$

$$+ \frac{v^2 + 2v + 2}{v(v+2)} \ln [(2 - \eta)^2 - y^2] - \frac{2v}{(v+2)} (1 - \eta) \left[ \frac{(1 - y)}{(2 - y - \eta)^2} + \frac{(1 + y)}{(2 + y - \eta)^2} \right] +$$

$$+ \ln [(4 - \eta)^2 - y^2] - \frac{4v}{(v+2)} \left[ \frac{1}{4 - y - \eta} + \frac{1}{4 + y - \eta} \right] -$$

$$- \frac{v}{4(v+2)} \sum_{s=0}^{\infty} L_s(y) \eta^{2s+2} - \Pi(y), \quad v = \frac{1}{1 - 2\mu}$$

$$L_s(y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{2k+2} \left(\frac{1}{4}\right)^{k+s} \frac{\Gamma(2k+2s+4)}{\Gamma(2k+3)\Gamma(2s+3)} \left[ - \left(k+s+2.5 + \frac{1}{v}\right) I_{2k+2s+3} + \right.$$

$$\left. + \left(2s+2 + \frac{1}{v}\right) \left(2k+2 + \frac{1}{v}\right) Q_{2k+2s+3} + (k+s+2)(k+s+2.5) Q_{2k+2s+5} \right]$$

$$Q_n = \frac{1}{2\Gamma(n+1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} (2\lambda - e^{-\lambda}) \lambda^n d\lambda}{(\operatorname{sh} \lambda + \lambda)}, \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (1.6)$$

$$I_n = \frac{1}{2\Gamma(n+1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} (2\lambda - e^{-\lambda}) (\lambda - 1 - e^{-\lambda}) \lambda^n d\lambda}{(\operatorname{sh} \lambda + \lambda)} \quad (1.7)$$

$$\Pi(y) = \frac{2}{(v+2)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^2}{4}\right)^{k+1} \left\{ - \left(v + \frac{2+v}{2+2k}\right) I_{2k+1} + \right.$$

$$\left. + \left[ 2 + \frac{1}{v(k+1)} \right] Q_{2k+1} + v(k+1.5) Q_{2k+3} \right\}$$

$$\omega^*(r, y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda r}{\Delta_+} \left[ (\operatorname{ch} \lambda \operatorname{ch} \lambda y - y \operatorname{sh} \lambda \operatorname{sh} \lambda y) - \frac{1}{\nu} \operatorname{ch} \lambda y \frac{\operatorname{sh} \lambda}{\lambda} \right] d\lambda \quad (1.8)$$

$$\Delta_+ = \operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda \quad (1.9)$$

Здесь  $C_3$  — произвольная постоянная,  $\mu$  — коэффициент Пуассона. Воспользуемся формулами для перемещения  $v$ , полученными в работе [1].

Тогда контактное условие (1.4) запишется в следующей форме:

$$\int_c^b \sigma_{y_1}(z) N(z, x) dz - \frac{4\nu}{(1+\nu)} \int_{-1}^1 \sigma(\alpha) \omega^*(x, \alpha) d\alpha = -[\delta - f^*(x)] \frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{\pi}{h}, \quad c \leq x \leq b \quad (1.10)$$

$$N(z, x) = K(z-x) - K(z+x), \quad K(k) = \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{ch} 2\lambda - 1) \cos \lambda k d\lambda}{\lambda \Delta_+} \quad (1.11)$$

Здесь  $\omega^*(x, \alpha)$ ,  $\Delta_+$  — функции, заданные формулами (1.8) и (1.9), Полагая

$$x = c_0 + a\zeta, \quad r = c_0 + ap, \quad z = c_0 + at, \quad c_0 = 1/2(b+c), \quad a = 1/2(b-c)$$

$$f^*(x) = f(\zeta), \quad \omega^*(r, y) = \omega(p, y), \quad \sigma_{y_1}(r) = -Q(p), \quad N^*(z, x) = N(t, \zeta)$$

перепишем соотношения (1.5), (1.10) в следующем виде:

$$\int_{-1}^1 \sigma(\eta) \Phi(\eta, y) d\eta - a \int_{-1}^1 Q(p) \omega(p, y) dp + C_3 = 0, \quad |y| \leq 1 \quad (1.12)$$

$$\int_{-1}^1 Q(t) N(t, \zeta) dt + \frac{4\nu}{(1+\nu)} \frac{1}{a} \int_{-1}^1 \sigma(x) \omega(\zeta, \alpha) d\alpha - \frac{\pi}{ha} [\delta - f(\zeta)] \Delta_0 = 0$$

$$\Delta_0 = \frac{E}{2(1-\mu^2)}, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (1.13)$$

Таким образом, проблема сведена к решению системы интегральных уравнений (1.12) — (1.13) относительно двух неизвестных: нормального напряжения в заделке  $\sigma(\eta)$  и контактного давления под штампом  $Q(t)$ .

Следует отметить, что рассматриваемая задача является двухпараметрической с безразмерными параметрами  $c_0 = 1/2(c+b)$ ,  $a = 1/2(b-c)$  (фигура).

Переходим к определению контактного давления  $Q(t)$ .

2. Вначале положим в (1.12)  $Q(p) = \delta(p-t)$ , где  $\delta(p-t)$  — дельта-функция Дирака. Из полученного соотношения определим  $\sigma_0(\eta, t)$ .

Изучив в работе [1] характер особенности напряжения в заделке, выберем в качестве численного метода решения уравнения (1.12) метод Бубнова — Галеркина. Принимаем

$$\sigma_0(\eta, t) = a \left[ (1-\eta^2)^{p_0-1} E_0(t) + \sum_{n=0}^{n=m} F_n(t) T_{2n}(\eta) \right] \quad (2.1)$$

Здесь  $T_{2n}(\eta)$  — четный полином Чебышева первого рода;  $E_0(t)$ ,  $F_n(t)$  — неизвестные коэффициенты,  $p_0$  — наименьший положительный корень характеристического уравнения

$$2\kappa \cos \pi p_0 - 4p_0^2 + 1 + \kappa^2 = 0, \quad \kappa = 3 - 4\mu \quad (2.2)$$

Подставим (2.1) в интегральное уравнение (1.12) и потребуем, чтобы получившееся выражение было ортогонально к  $(1-y^2)^{-1/2} T_{2k}(y)$  на отрезке  $[-1, 1]$ . В результате по-

лучим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $E_0(t)$ ,  $F_n(t)$ ,  $C_3(t)$ . Произвольная постоянная  $C_3(t)$  определяется из условия статического равновесия

$$\int_{-1}^1 \sigma_0(\eta, t) d\eta = 0 \quad (2.3)$$

Исходя из асимптотического разложения интеграла  $\omega(t, y)$  по вычетах подынтегральной функции, представим  $E_0(t)$ ,  $F_n(t)$ ,  $C_3(t)$  в виде

$$E_0(t) = \frac{2(1+\nu)}{(\nu+2)} \sum_{k=0}^{k=l} e^{-\beta_k \gamma} (\cos \alpha_k \gamma B_{k,1} - \sin \alpha_k \gamma B_{k,2}) \quad (2.4)$$

$$F_n(t) = \frac{2(1+\nu)}{(\nu+2)} \sum_{k=0}^{k=l} e^{-\beta_k \gamma} [\cos \alpha_k \gamma A_{n1}(k) - \sin \alpha_k \gamma A_{n2}(k)] \quad (2.5)$$

$$C_3(t) = \frac{2(1+\nu)}{(\nu+2)} \sum_{k=0}^{k=l} e^{-\beta_k \gamma} [\cos \alpha_k \gamma C_{k,1} - \sin \alpha_k \gamma C_{k,2}]$$

$$\alpha_k + i\beta_k = \lambda_k, \operatorname{sh} \lambda_k + \lambda_k = 0, \alpha_k > 0, \beta_k > 0, \gamma = 1/2(c_0 + at) \geq \gamma_0 \neq 0 \quad (2.6)$$

Здесь  $\gamma_0$  — нижняя граница переменной  $\gamma$ . Тогда система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $E_0(t)$ ,  $F_n(t)$ ,  $C_3(t)$  переходит в системы линейных алгебраических уравнений относительно новых неизвестных  $B_{k1}$ ,  $A_{n1}(k)$ ,  $C_{k1}$  и  $B_{k2}$ ,  $A_{n2}(k)$ ,  $C_{k2}$ . Для произвольного контактного давления  $Q(t)$  напряжение в заделке определится из соотношения

$$\sigma(\eta) = \int_{-1}^1 Q(t) \sigma_0(\eta, t) dt \quad (2.7)$$

где  $\sigma_0(\eta, t)$  задано формулой (2.1).

3. Подставим (2.7) в уравнение (1.11). В результате получим интегральное уравнение относительно контактного давления

$$\int_{-1}^1 Q(t) \Omega(t, \zeta) dt - [\delta - f(\zeta)] \Delta_0 \frac{\pi}{ha} = 0 \quad (3.1)$$

$$\Omega(t, \zeta) = K[a(\zeta - t)] - K[2c_0 + a(\zeta + t)] + \frac{4\nu}{(1+\nu)a} \Psi(t, \zeta) \quad (3.2)$$

$$\Psi(t, \zeta) = \int_{-1}^1 \sigma_0(\alpha, t) \omega(\zeta, \alpha) d\alpha$$

В работе [2] установлены следующие свойства ядра:

а) при  $k \in (-\infty, \infty)$

$$K(k) = -\ln k + F(k) \quad (3.3)$$

где  $F(k)$  — четная непрерывная функция со всеми своими производными по  $k$ ;

б) при  $k \rightarrow \infty$  ядро  $K(k)$  экспоненциально стремится к нулю.

Очевидно, что ядро  $K[2c_0 + a(\zeta + t)]$  в случае  $1/2(c_0 + at) \geq \gamma_0$ ,  $1/2(c_0 + a\zeta) \geq \gamma_0$ ,  $\gamma_0 \neq 0$  есть непрерывная функция со всеми своими производными по  $\zeta$  и  $t$ .

Исследуем свойства функции  $\Psi(t, \zeta)$ . Из уравнения (1.12) имеем

$$a\omega(\zeta, \alpha) = C_3(\zeta) + \int_{-1}^1 \sigma_0(\eta, \zeta) \Phi(\eta, \alpha) d\eta \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.2) при условии (2.3), получим

$$\psi(t, \zeta) = \frac{1}{a^2} \int_{-1}^1 d\alpha \int_{-1}^1 \sigma_0(\alpha, t) \sigma_0(\eta, \zeta) \Phi(\eta, \alpha) d\eta \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует:

- а) функция  $\psi(t, \zeta) = \psi(\zeta, t)$ , в силу того, что  $\Phi(\eta, \alpha)$  — ядро симметричное;  
 б) функция  $\psi(t, \zeta)$  — непрерывно дифференцируемая любое число раз по  $t$  и  $\zeta$ , так как  $\sigma_0(\alpha, t)$  и  $\sigma_0(\eta, \zeta)$  являются непрерывными функциями со всеми своими производными соответственно по  $t$  и по  $\zeta$  в области  $1/2(c_0 + at) \geq \gamma_0$ ,  $1/2(c_0 + a\zeta) \geq \gamma_0$ ,  $\gamma_0 \neq 0$ ;  
 в) при  $1/2(c_0 + at) \rightarrow \infty$ ,  $1/2(c_0 + a\zeta) \geq \gamma_0$  функция  $\psi(t, \zeta)$  экспоненциально убывает.

Так как свободный член уравнения (3.1) предполагается непрерывным и непрерывно дифференцируемым любое число раз, то в результате особенность решения этого уравнения будет определяться логарифмическим ядром, содержащимся в  $K[a(\zeta - t)]$ . Тогда из работы [3] следует, что решение уравнения (3.1) может быть представлено в виде

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=0}^{k=N} G_k T_k(t) \quad (3.6)$$

где  $T_k(t)$  — полиномы Чебышева первого рода.

Исходя из представления (3.6), методом Бубнова — Галеркина сведем интегральное уравнение (3.1) к системе линейных алгебраических уравнений относительно  $G_k$  аналогично тому, как это было сделано в работе [4]. Эта система может быть записана в виде

$$G_0 \left( R_{00} + \ln \frac{2}{a} - C_{00} \right) + \sum_{s=1}^{s=N} \frac{(R_{0s} - C_{0s})}{2} G_s = \frac{\Delta_0}{\pi} p_0 \quad (3.7)$$

$$G_0 (R_{m0} - C_{m0}) + \sum_{s=1}^{s=N} \frac{(R_{ms} - C_{ms})}{2} G_s + \frac{G_m}{m} = \frac{\Delta_0 p_m}{\pi}, \quad 1 \leq m \leq N \quad (3.8)$$

где  $R_{ms}$ ,  $C_{ms}$  — коэффициенты следующих разложений:

$$F[a(\zeta - t)] = K[a(\zeta - t)] + \ln a(\zeta - t) = \sum_{\substack{m=0 \\ s=0}}^{\infty} R_{ms} T_m(\zeta) T_s(t) \quad (3.9)$$

$$C_{ms} = \delta_{ms} + a_{ms}, \quad K[2C_0 + a(\zeta + t)] = \sum_{\substack{m=0 \\ s=0}}^{\infty} a_{ms} T_m(\zeta) T_s(t) \quad (3.10)$$

$$\psi(t, \zeta) = \sum_{\substack{m=0 \\ s=0}}^{\infty} \delta_{ms} T_m(\zeta) T_s(t) \quad (3.11)$$

$$\frac{\pi}{ha} [\delta - f(\zeta)] \Delta_0 = \sum_{m=0}^{m=M} p_m \Delta_0 T_m(\zeta) \quad (3.12)$$

4. Расчеты были проведены при  $\mu = 0.317408$ ,  $p_0 = 0.700000$ . Для вычисления  $Q_n$ ,  $I_n$ , заданных формулами (1.6), (1.7), были использованы их представления через интегралы Гоуланда [5]. Расширенная матрица системы относительно неизвестных  $E_0(t)$ ,  $F_n(t)$ ,  $C_3(t)$  считалась методом механических квадратур [6].

Значения напряжений в заделке рассчитаны по формуле (2.1) при  $m = 5$  практически точно. Так, в случае  $\gamma = 0.25$  и  $l = 1$  в формулах (2.4) — (2.6) пятое приближение ( $m = 5$ ) отличается от шестого ( $m = 6$ ) не более чем на 0.5%. Однако погрешность, с которой определяются коэффициенты  $E_0(t)$ ,  $F_n(t)$  по формулам (2.4), (2.5), возникаю-

щая за счет отброшенных в них членов ( $l \geq 2$ ), вносит дополнительную ошибку в найденные напряжения, не превышающую 3,5%. Следовательно, общая погрешность решения  $\sigma_0(\eta, t)$  при  $\gamma = 0.25, l = 1$  не превышает 4%.

Этот случай соответствует весьма близкому расположению штампа от заделки.

В случае  $\gamma \geq 0.5, l = 1$  общая погрешность решения составляет меньше 1%.

Для вычисления коэффициентов  $R_{ms}$  разложения (3.9) использовалось представление

$$F[a(\zeta - t)] = \sum_{k=0}^{k=7} d_{2k}(a) T_{2k}\left(\frac{\zeta - t}{2}\right) \quad (4.1)$$

$$d_0(a) = -0.3516754 + 2 \left\{ \ln(1+r) + \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}(1+\sqrt{1+a^2})} - \frac{a^2}{\sqrt{4+a^2}} \left[ \frac{1}{(4+a^2)} + \frac{1.5}{(2+\sqrt{4+a^2})} \right] \right\} + \sum_{p=0}^{\infty} B_{p+1} \Phi_p \quad (4.2)$$

$$r = \frac{3a^2}{(2+\sqrt{4+a^2})(2\sqrt{1+a^2}+\sqrt{4+a^2})}, \quad \Phi_0 = a^2$$

$$\Phi_p = \Phi_{p-1} \frac{(-a^2)(p+0.5)}{(p+1)}, \quad p \geq 1$$

$$d_{2m}(a) = 4(-1)^{m+1} \left\{ \Gamma_m(1) \left( \frac{1}{2m} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right) - \Gamma_m(2) \left[ \frac{1}{2m} + \frac{2}{\sqrt{4+a^2}} \left( 1 + \frac{2m}{\sqrt{4+a^2}} + \frac{2}{4+a^2} \right) \right] + \sum_{p=0}^{\infty} B_{p+m} \Psi_p \right\} \quad (4.3)$$

$$m \geq 1, \Gamma_m(k) = \left[ \frac{a}{k + \sqrt{k^2 + a^2}} \right]^{2m}, \quad \Psi_0 = \left( \frac{a}{2} \right)^{2m}, \quad \Psi_p = \Psi_{p-1} \frac{(-a^2)(m+p)(m+p-0.5)}{p(p+2m)}$$

Значения  $B_p$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

p	$B_p$	m	$d_{2m}(a)$		
			a = 0.5	a = 1	a = 1.5
1	0.2920749	0	-0.1328900	0.2512295	0.5711618
2	0.6397242 (-1)	1	0.2061846	0.4977991	0.6636256
3	0.1270032 (-1)	2	-0.1187582 (-1)	-0.8623488 (-1)	-0.1811443
4	0.2272334 (-2)	3	0.6844342 (-3)	0.1557360 (-1)	0.5494941 (-1)
5	0.374256 (-3)	4	-0.3833251 (-4)	-0.2731640 (-2)	-0.1641086 (-1)
6	0.57821 (-4)	5	0.2119323 (-5)	0.4694238 (-3)	0.4785882 (-2)
7	0.85047 (-5)	6	-0.1168139 (-6)	-0.7995242 (-4)	-0.1374129 (-2)
8	0.12040 (-5)	7	0.6443156 (-8)	0.1358443 (-4)	0.391576 (-3)
9	0.1656 (-6)	8		-0.2308797 (-5)	-0.111254 (-3)
10	0.222 (-7)	9		0.39286 (-6)	0.315990 (-4)
11	0.29 (-8)	10		-0.6693 (-7)	-0.897 (-5)
12	0.34 (-9)	11		0.1141 (-7)	0.255 (-5)
13	0.44 (-10)				

Примечание: -0.1187582 (-1) означает -0.01187582.

При выводе формул (4.2), (4.3) было использовано представление  $F[a(\zeta - t)]$  через интегралы Гоуланда [5]. Значения  $d_{2m}(a)$  для  $a=0.5, 1.0, 1.5$  помещены в табл. 1

Разложения

$$T_2(1/2[\zeta - t]) = \sum_{\substack{s+m \leq 2k \\ s=0 \\ m=0}} b_{sm}(k) T_s(t) T_m(\zeta) \quad (4.4)$$

для произвольного индекса  $k$  получались последовательным применением соотношения

$$T_{k+1}(1/2[\zeta - t]) = -T_{k-1}(1/2[\zeta - t]) + T_k(1/2[\zeta - t])[T_1(\zeta) - T_1(t)] \quad (4.5)$$

Подставляя (4.4) в (4.1) и собирая подобные, на основании разложения (3.9) получаем значения коэффициентов  $R_{ms}$ . При определении коэффициентов  $C_{ms}$  использовались представления (3.10), (3.11) через функции Бесселя от комплексного аргумента. В результате решение уравнения (3.1), когда в разложении (3.12) удерживаются три члена ( $M = 2$ ), имеет вид

$$Q(t) = \frac{\Delta_0}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{m=0}^{m=2} P_m g_m, \quad g_m = \sum_{k=0}^{k=N} G_{mk} T_k(t) \quad (4.6)$$

Значения коэффициентов  $G_{mk}$  выражения (4.6) для случаев  $a = 0.5, c_0 = 1, N = 4$  и  $a = 1, c_0 = 1.5, N = 6$  приведены в табл. 2.

Таблица 2

a)	m	$G_{m0}$	$G_{m1}$	$G_{m2}$	$G_{m3}$	$G_{m4}$	$G_{m5}$	$G_{m6}$
0.5	0	0.29454	-0.01713	-0.02699	0.00094	0.00023		
	1	-0.00856	0.36922	-0.00422	-0.00251	0.00002		
	2	-0.01350	-0.00423	0.64774	-0.00124	-0.00024		
1	0	0.49539	-0.02532	-0.11647	0.00035	0.00405	0.00093	-0.00031
	1	-0.01266	0.47230	-0.00886	-0.02916	0.00011	0.00206	0.00020
	2	-0.05822	-0.00886	0.71427	-0.00456	-0.01000	-0.00037	0.00102

Найденные приближения  $N = 4$  ( $a = 0.5$ ) и  $N = 6$  ( $a = 1$ ) являются практически точными, так как отличаются от последующих  $N = 6$  ( $a = 0.5$ ) и  $N = 8$  ( $a = 1$ ) не более чем на 0.02%.

Таблица 3

t	$Q(t) \frac{h}{\pi \delta} \frac{1}{\Delta_0}$	
	a = 0.5	a = 1
-0.95105	1.8673	1.3798
-0.90631	1.3839	1.0494
-0.80901	1.0213	0.81303
-0.58779	0.77542	0.67127
-0.42261	0.70616	0.63948
-0.17365	0.65704	0.62140
0.00000	0.64354	0.61623
0.17365	0.64306	0.61355
0.42261	0.67022	0.61679
0.58779	0.72122	0.63364
0.80901	0.92506	0.73980
0.90631	1.2392	0.93867
0.95105	1.6635	1.2253

Таблица 4

t	$\sigma(t) h / C$	
	a = 0.5	a = 1
0.02079	-0.14009	-0.09276
0.12050	-0.14088	-0.09263
0.21901	-0.14231	-0.09208
0.40849	-0.13876	-0.08545
0.58168	-0.09590	-0.05466
0.79608	0.11657	0.07768
0.95534	0.52336	0.31954

Если при этом учесть, что нормальные напряжения в заделке подсчитаны с ошибкой не более 4%, то общая погрешность найденных решений  $N = 4$  ( $a = 0.5$ ) и  $N = 6$  ( $a = 1$ ) не превысит 1%.

Выбирая соответствующие значения  $p_0, p_1, p_2$ , можно рассчитать контактные давления для трех видов штампов: для штампа с плоским дном, для наклонного штампа и для параболического.

В табл. 3 приведены значения контактных давлений, подсчитанных по формуле (4.6) для случаев  $N = 4$  ( $a = 0.5$ ) и  $N = 6$  ( $a = 1$ ), когда  $p_0 = \pi \delta / ha, p_1 = p_2 = 0$  (штамп с плоским дном).

Из рассмотрения табл. 3 следует, что контактные давления возрастают по мере приближения рассматриваемой точки к заделке, в результате чего появляется опрокидывающий момент, действующий на штамп.

Следовательно, силу  $P$  необходимо прикладывать на расстоянии  $e/h = 1/2 a G_{01}/G_{00}$  (фигура) от оси симметрии штампа (фигура).

Значения  $Q(t)$ , полученные в данной работе для  $N = 6, a = 1, c_0 = 1.5$ , отличаются от значений контактных давлений, рассчитанных в работе [4] при отсутствии заделки, не более чем на 14%.

Значения напряжений в заделке, рассчитанные по формулам (2.1) и (2.7), приведены в табл. 4. При этом коэффициенты  $E_0(t)$ ,  $F_n(t)$  представлялись в виде

$$E_0(t) = \sum_{s=0}^{s=9} l_s T_s(t), \quad F_n(t) = \sum_{s=0}^{s=9} e_s(n) T_s(t)$$

Для определения коэффициентов  $l_s$  и  $e_s(n)$  использовались представления (2.4), (2.5) через функции Бесселя от комплексного аргумента.

Из табл. 4 видно, что напряжения в заделке уменьшаются с увеличением зоны контакта. Все расчеты были выполнены на ЭЦВМ «Минск-12».

Автор благодарит И. И. Воровича за постановку задачи и ценные указания при ее выполнении.

Поступила 25 I 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В о р о в и ч И. И., К о п а с е н к о В. В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, стр. 109—115.
2. А л е к с а н д р о в В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5, стр. 934—943.
3. Ш т а е р м а н И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
4. А л е к с а н д р о в В. М. О приближенном решении одного класса интегральных уравнений. Изв. АН АрмССР, серия физ.-матем. наук, 1961, т. 14, № 3.
5. N e l s o n C. W. New Tables of Howland's and Related Integrals. Math. Comput., 1961, vol. 15, No. 73, p. 12—18.
6. К р ы л о в В. И., Ш у л ь г и н а Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., «Наука», 1966.

### О ВЫПУЧИВАНИИ ГИБКИХ ПЛАСТИН

Л. С. Срубщик, В. А. Треногин

(Ростов-на-Дону, Москва)

Рассматривается задача о поведении тонкой гибкой пластины произвольной формы под действием малой нормальной нагрузки  $\varepsilon Q$  и внешнего краевого усилия, составляющие которого вдоль осей  $x$  и  $y$  равны, соответственно,  $p$  и  $q$ . В случае, когда нормальная нагрузка отсутствует,  $p = p_0$  и  $q = q_0$ , эта задача, как известно, имеет тривиальное решение

$$w = 0, \quad F = 1/2 (p_0 x^2 + q_0 y^2)$$

где  $w$  — прогиб пластины, а  $F$  — функция напряжений. Вблизи этого решения при малых отклонениях  $p$ ,  $q$  от  $p_0$ ,  $q_0$  и при малой нормальной нагрузке существует одна или несколько равновесных форм пластины. Если  $p_0$ ,  $q_0$  не являются критическими, то существует единственная форма равновесия, аналитически зависящая от указанных параметров. Метод определения решения для этого случая в виде ряда по степеням малого параметра был предложен П. Я. Полубариновой-Кочиной [1] и позднее обоснован И. И. Воровичем [2].

Случай критических значений  $p_0$ ,  $q_0$  более сложен (хорошо известное явление «выпучивания» пластины).

Первое исследование для круглой пластины при наличии радиальной симметрии ( $p = q$ ) и при отсутствии нормальной нагрузки было проведено Фридрихсом и Стоккером [3], которые при помощи вариационного метода показали рождение пары новых решений при переходе через критическое значение. Совсем недавно Бергер и Файф [4] перенесли эти результаты на случай пластины произвольной формы при отсутствии нормальной нагрузки и в предположении, что краевые усилия зависят от одного параметра, воспользовавшись при этом топологической теоремой М. А. Красносельского о бифуркации [5]. Гораздо раньше, в 1955—1958 гг. И. И. Ворович [6] для исследования общих задач нелинейной теории пологих оболочек, наряду с вариационными и топологически-