ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА

Б. И. Сметанин (Ростов-на-Дону)

Рассматривается плоская смешанная задача теории упругости для бесконечного клина. На биссектрисе угла клина имеется щель конечной длины, к поверхности которой приложена нормальная нагрузка интенсивности $\sigma_\theta = -q(r)$.

В работах [1,2] исследовался случай, когда относительное расстояние μ щели от вершины клина равно нулю. В работе [3] найдено решение рассматриваемой задачи для больших значений параметра μ. Ниже излагается решение указанной задачи для всего диапазона изменения параметра $0 \leqslant \mu < \infty$. При решении используется метод, идея которого изложена в работе [4]. Метод позволяет свести задачу к определению функции $\gamma(r)$, описывающей форму поверхности щели, из интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Кроме того, здесь, в отличие от работ [1,2], получено приближенное решение задачи для случая $\mu = 0$ в виде простых по структуре формул. При этом используется математический аппарат метода Винера — Хопфа [5].

1. Постановка задачи. Пусть в упругом клине, ограниченном лучами $\theta = \pm\alpha$ $(0 \leqslant r < \infty)$, имеется щель, занимающая область: $\theta = 0$, $a \leqslant r \leqslant b$. Щель поддерживается в раскрытом состоянии нормальными усилиями $q(r)$, приложенными к ее поверхности. При этом на гранях клина могут быть выполнены следующие условия: (1) клин зажат между двумя гладкими жесткими основаниями, силы трения между основаниями и клином отсутствуют; (2) между клином и жесткими основаниями имеет место полное сцепление; (3) грани клина свободны от напряжений. Определить функцию $\gamma(r)$ и коэффициент интенсивности нормальных напряжений N при $r = a$ и $r = b$ $(\theta = 0)$.

Задача может быть приведена к определению $\gamma(r)$ из интегрального уравнения [3]

$$\int_a^b \frac{\gamma(\rho)}{\rho} Q\left(\ln\frac{\rho}{r}\right) d\rho = -\frac{\pi}{\Delta}[p(r) + R], \quad Q(t) = \int_0^\infty L(u, \alpha)\sin(ut)\,du, \quad \Delta = \frac{E}{2(1-\nu^2)}$$

$$(a \leqslant r \leqslant b) \tag{1.1}$$

Здесь R — постоянная, определяемая при решении уравнения, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, функция $p(r)$ связана с $q(r)$ соотношением

$$p(r) = \int q(r)dr \tag{1.2}$$

Функция $L(u, \alpha)$ для рассматриваемых условий на гранях клина имеет вид

$$(1) \quad L(u, \alpha) = \frac{\operatorname{sh} 2u\alpha + u\sin 2\alpha}{\operatorname{ch} 2u\alpha - \cos 2\alpha} \tag{1.3}$$

$$(2) \quad L(u, \alpha) = \frac{\varkappa \operatorname{ch} 2u\alpha + u^2(1-\cos 2\alpha) + 0.5(1+\varkappa^2)}{\varkappa \operatorname{sh} 2u\alpha - u\sin 2\alpha} \qquad (\varkappa = 3 - 4\nu)$$

$$(3) \quad L(u, \alpha) = 2\,\frac{\operatorname{sh}^2 u\alpha - u^2\sin^2\alpha}{\operatorname{sh} 2u\alpha + u\sin 2\alpha}$$

Отметим следующие свойства функции $L(u, \alpha)$:

$$\begin{gathered} L(u, \alpha) \to 1 + O(e^{-2u\alpha}) \text{ при } u \to \infty \text{ (для условий (1), (2), (3))} \\ L(u, \alpha) \to c^{-1}\pi u + O(u^3) \text{ при } u \to 0 \text{ (для условий (1), (3))} \\ L(u, \alpha) \to (\pi u)^{-1} d + O(u) \text{ при } u \to 0 \text{ (для условия (2))} \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} c = \pi\frac{1-\cos 2\alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} \quad \text{(для условия (1))}, \\ c = \pi\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha^2 - 2\sin^2\alpha} \quad \text{(для условия (3))}, \qquad d = \pi\frac{(1+\varkappa)^2}{4\varkappa\alpha - 2\sin 2\alpha} \end{gathered} \tag{1.5}$$

Случай $\alpha = \pi$ при условии на гранях клина (1), соответствующий задаче о щели в плоскости, в дальнейшем из рассмотрения исключаем.

2. Решение задачи для условий на гранях клина (1) и (3). Аппроксимируем функцию $L(u, \alpha)$ следующим выражением:

$$L(u, \alpha) \approx \operatorname{th}\frac{\pi u}{c} + \sum_{i=1}^{M_1} A_i \frac{u^3}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi u}{m_i}} \qquad (i = 1, \ldots, M_1) \tag{2.1}$$

Легко видеть, что аппроксимация (2.1) для рассматриваемых условий на гранях клина верно отражает поведение функции $L(u, \alpha)$ в нуле и на бесконечности. Приводим значения величин

$$\beta_j = \max\left[\frac{1}{L(u, \alpha)}\left|L(u, \alpha) - \operatorname{th}\frac{\pi u}{c}\right|\right] 100\%$$

для условий на гранях клина (1) ($j = 1$) и (3) ($j = 3$)

$\alpha =$	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	(°)
$\beta_1 =$	48	25	10	1.5	0	1	4	8	4	46	—	(%)
$\beta_3 =$	>50	>50	42	18	2.5	4.5	4	2	0.5	0.05	0	(%).

Подставив $L(u, \alpha)$ в форме (2.1) в (1.1) и взяв внутренний интеграл, найдем

$$c\int_a^b \frac{\gamma(\rho)\,\rho^{0.5c-1}}{\rho^c - r^c}\,d\rho = -\pi f(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant b) \tag{2.2}$$

$$f(r) = \frac{1}{\Delta\sqrt{r^c}}[p(r) + R] + \int_a^b \gamma(\tau)\,\omega(\tau, r)\,d\tau \tag{2.3}$$

$$\omega(\tau, r) = \frac{1}{8\pi}\sum_{i=1}^{M_1} A_i m_i^4 \frac{r^{0.5(m_i - c)}(\tau^{m_i} - r^{m_i})}{\tau^{1-0.5m_i}(\tau^{m_i} + r^{m_i})^4}\left[20(r\tau)^{m_i} - (\tau^{m_i} - r^{m_i})^2\right] \tag{2.4}$$

Применив к уравнению (2.2) формулу обращения, получим

$$\gamma(r) = \frac{c}{\pi}\sqrt{r^c(r^c - a^c)(b^c - r^c)}\left\{\frac{1}{\Delta}\int_a^b \frac{\sqrt{\rho^c}\,[p(\rho) + R]\,d\rho}{\rho\sqrt{(\rho^c - a^c)(b^c - \rho^c)}\,(\rho^c - r^c)} + \right.$$
$$\left. + \int_a^b \frac{\rho^{c-1}d\rho}{\sqrt{(\rho^c - a^c)(b^c - \rho^c)}\,(\rho^c - r^c)}\int_a^b \gamma(\tau)\,\omega(\tau, \rho)\,d\tau\right\} \tag{2.5}$$

При этом должно выполняться [6] условие ограниченности функции $\gamma(r)$

$$\int_a^b \frac{\rho^{c-1} f(\rho)\,d\rho}{\sqrt{(\rho^c - a^c)(b^c - \rho^c)}} = 0 \tag{2.6}$$

В соотношении (2.5) интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши. Кроме того, двойной интеграл в (2.5) допускает перестановку порядка интегрирования, так как $\gamma(\tau)$ и $\rho^{c-1}[(\rho^c - a^c)(b^c - \rho^c)]^{-1/2}\,\omega(\tau, \rho)$ — интегрируемые на $[a, b]$ функции.

Подставив $f(\rho)$ в форме (2.3) в (2.6) и исключив из полученного соотношения и уравнения (2.5) величину R, получим относительно функции $\gamma(r)$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\gamma(r) = \frac{c}{\pi\Delta}\sqrt{r^c(r^c - a^c)(b^c - r^c)}\left[T_{-1}(r) + \int_a^b \gamma(\tau)\,\Omega_1(\tau, r)\,d\tau\right] +$$
$$+ \frac{c\sqrt{b^c}}{\pi\Delta}\Lambda(r)\left[S_{-1} + \int_a^b \gamma(\tau)\,\Omega_2(\tau)\,d\tau\right] \tag{2.7}$$

$$T_{-1}(r)=\int_a^b \frac{\sqrt{\rho^c}\,p(\rho)\,d\rho}{\rho\sqrt{(\rho^c-a^c)(b^c-\rho^c)(\rho^c-r^c)}}, \qquad S_{-1}=\int_a^b \frac{\sqrt{\rho^c}\,p(\rho)\,d\rho}{\rho\sqrt{(\rho^c-a^c)(b^c-\rho^c)}}$$

$$\Omega_1(\tau, r)=\Delta\int_a^b \frac{\rho^{c-1}\omega(\tau, \rho)\,d\rho}{\sqrt{(\rho^c-a^c)(b^c-\rho^c)(\rho^c-r^c)}}, \qquad \Omega_2(\tau)=\Delta\int_a^b \frac{\rho^{c-1}\omega(\tau, \rho)\,d\rho}{\sqrt{(\rho^c-a^c)(b^c-\rho^c)}}$$

$$\Lambda(r)=\frac{F(\delta, k)}{K(k)}E(k)-E(\delta, k)+\frac{\sqrt{(r^c-a^c)(b^c-r^c)}}{\sqrt{r^cb^c}}$$

$$k=\sqrt{1-\varepsilon^c}, \qquad \varepsilon=a/b, \qquad \delta=\arcsin\{(r^c-a^c)^{1/2}[r^c(1-\varepsilon^c)]^{-1/2}\}$$

Здесь $F(\delta, k)$ и $E(\delta, k)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно; $K(k)$ и $E(k)$—полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно.

Решение уравнения (2.7) ищем методом последовательных приближений

$$\gamma(r)=\gamma_0(r)+\gamma_1(r)+\ldots+\gamma_n(r)+\ldots \tag{2.8}$$

В качестве нулевого приближения примем выражение, соответствующее первому члену аппроксимации (2.1). Нулевое и последующие приближения определяются по формулам

$$\gamma_n(r)=\frac{c}{\pi\Delta}\sqrt{r^c(r^c-a^c)(b^c-r^c)}\,T_{n-1}(r)+\frac{c\sqrt{b^c}}{\pi\Delta}\Lambda(r)\,S_{n-1} \qquad (n=0, 1, \ldots) \tag{2.9}$$

$$T_n(r)=\int_a^b \gamma_n(\tau)\,\Omega_1(\tau, r)\,d\tau, \qquad S_n=\int_a^b \gamma_n(\tau)\,\Omega_2(\tau)\,d\tau \qquad (n=0, 1, \ldots)$$

Коэффициент интенсивности нормальных напряжений N для $r=a$ и $r=b$ определяется из следующих условий:

$$N_a=\lim_{r\to a}\Delta\sqrt{r-a}\,\frac{d\gamma}{dr}, \qquad N_b=-\lim_{r\to b}\Delta\sqrt{b-r}\,\frac{d\gamma}{dr} \tag{2.10}$$

Подставив в (2.10) $\gamma(r)$ в форме (2.8) и учитывая (2.9), получим

$$N_a=\frac{c\sqrt{c}\sqrt{b^c}}{2\pi\sqrt{a}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[a^c\sqrt{1-\varepsilon^c}\,T_{n-1}(a)+\frac{E(k)-\varepsilon^cK(k)}{K(k)\sqrt{1-\varepsilon^c}}S_{n-1}\right] \tag{2.11}$$

$$N_b=\frac{c\sqrt{c}\sqrt{b^c}}{2\pi\sqrt{b}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[b^c\sqrt{1-\varepsilon^c}\,T_{n-1}(b)+\frac{K(k)-E(k)}{K(k)\sqrt{1-\varepsilon^c}}S_{n-1}\right] \tag{2.12}$$

3. Решение задачи для случая, когда на гранях клина выполнено условие (2). Аппроксимируем функцию $L(u, \alpha)$ выражением

$$L(u, \alpha)\approx \operatorname{cth}\frac{\pi u}{d}+\sum_{i=1}^{M_2}B_iu^2\operatorname{csch}\frac{\pi u}{n_i} \qquad (i=1, \ldots, M_2) \tag{3.1}$$

Из (3.1), (1.4) и (1.5) видно, что аппроксимация (3.1) при выполнении на гранях клина условия (2) верно отражает поведение функции $L(u, \alpha)$ в нуле и на бесконечности. Значения величины

$$\beta_2=\max\left[\frac{1}{L(u, \alpha)}\left|L(u, \alpha)-\operatorname{cth}\frac{\pi u}{d}\right|\right]100\% \qquad \text{при } \nu=0.3$$

приводятся ниже

α =	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180 (°)
β_2 =	10	5	7	10	10	8.5	5.5	3	1	0.5	1.5	1.5 (%)

Подставив $L(u, \alpha)$ в форме (3.1) в уравнение (1.1), найдем

$$d\int\limits_a^b \frac{\rho^{d-1}\gamma(\rho)\,d\rho}{\rho^d-r^d} = -\frac{\pi}{\Delta}[p(r)+R]-\frac{\pi}{\Delta}\int\limits_a^b \gamma(\tau)\,\varphi(\tau, r)\,d\tau \tag{3.2}$$

$$\varphi(\tau, r) = \frac{\Delta}{\pi}\sum_{i=1}^{M_2} B_i n_i^3 \frac{(\tau r)^{n_i}(\tau^{n_i}-r^{n_i})}{\tau(\tau^{n_i}+r^{n_i})^3} \tag{3.3}$$

Применив к уравнению (3.2) формулу обращения, получим относительно функции $\gamma(r)$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\gamma(r) = \frac{d}{\pi\Delta}\sqrt{(r^d-a^d)(b^d-r^d)}\left[P_{-1}(r)+\int\limits_a^b \gamma(\tau)\,\Phi(\tau, r)\,d\tau\right] \tag{3.4}$$

$$P_{-1}(r) = \int\limits_a^b \frac{\rho^{d-1}p(\rho)\,d\rho}{\sqrt{(\rho^d-a^d)(b^d-\rho^d)}\,(\rho^d-r^d)}, \quad \Phi(\tau, r) = \int\limits_a^b \frac{\rho^{d-1}\varphi(\tau, \rho)\,d\rho}{\sqrt{(\rho^d-a^d)(b^d-\rho^d)}\,(\rho^d-r^d)}$$

Интегралы в (3.4) понимаются в смысле главного значения по Коши. Решение уравнения (3.4) ищем в форме (2.8). Рассуждая далее, как и при решении уравнения (2.7). получим

$$\gamma_n(r) = \frac{d}{\pi\Delta}\sqrt{(r^d-a^d)(b^d-r^d)}\,P_{n-1}(r), \qquad P_n(r) = \int\limits_a^b \gamma_n(\tau)\,\Phi(\tau, r)\,d\tau \tag{3.5}$$

$$(n = 0,\ 1,\ \ldots)$$

$$N_a = \frac{d\sqrt{d}b^d\sqrt{\varepsilon^d(1-\varepsilon^d)}}{2\pi\sqrt{a}}\sum_{n=0}^{\infty} P_{n-1}(a), \qquad N_b = \frac{d\sqrt{d}b^d\sqrt{1-\varepsilon^d}}{2\pi\sqrt{b}}\sum_{n=0}^{\infty} P_{n-1}(b) \tag{3.6}$$

Заметим, что нулевое приближение решения уравнения (3.2) соответствует первому члену аппроксимации (3.1).

4. Решение задачи для случая, когда щель начинается из вершины угла клина ($a = 0$). Продифференцируем по r обе части уравнения (1.1). Произведя затем интегрирование полученного соотношения по частям, найдем

$$\int\limits_0^b \gamma'(\rho)\,Q\left(\ln\frac{\rho}{r}\right)d\rho = -\frac{\pi}{\Delta}rq(r) \qquad (0 \leqslant r \leqslant b) \tag{4.1}$$

Сделаем в уравнении (4.1) замену переменных по формулам

$$\tau = \ln b/\rho, \quad t = \ln b/r \tag{4.2}$$

и введем обозначения

$$e^{-\tau}\gamma'(be^{-\tau}) = \psi(\tau), \quad i/\Delta e^{-t}q(be^{-t}) = w_+(t) \tag{4.3}$$

Получим

$$i\int\limits_0^\infty \psi(\tau)\,Q(\tau-t)\,d\tau = \pi w_+(t) \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{4.4}$$

Применим к уравнению (4.4) преобразование Фурье по переменной t

$$\Psi_+(s)\ \ L(s, \ \alpha) = W_+(s) + W_-(s) \tag{4.5}$$

Здесь $W_+(s)$ и $\Psi_+(s)$ — преобразованные по Фурье функции $w_+(t)$ и $\psi(t)$; $W_-(s)$ — преобразование Фурье функции, соответствующей напряжению, возникающему в клине вне щели на ее продолжении. Далее рассмотрим случай, когда на гранях клина выполнены условия (1) и (3). Для проведения факторизации представим функцию L в следующем виде [7]:

$$L(s,\alpha)=\frac{s\sqrt{s^2+D_1^2}}{s^2+E_1^2}H(s)\qquad\left(\frac{D_1}{E_1^2}=\frac{\pi}{c}\right)\tag{4.6}$$

Из (4.6), (1.3) и (1.4) видно, что функция $H(s)$ — регулярная в полосе $\Pi_1(-E_1<\operatorname{Jm}s<E_1)$ $(E_1<D_1)$, четная по s, положительная на вещественной оси, причем $H(0)=1$ и $H(s)=1+O(s^{-2})$ при $|s|\to\infty$ в полосе регулярности. Отсюда следует, что функция $\chi(s)=\ln H(s)$ также регулярна в полосе Π_1, причем

$$\chi(s)=\chi_+(s)+\chi_-(s),\qquad \chi_\pm(s)=\pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty\mp i\tau_1}^{\infty\mp i\tau_1}\frac{\ln H(\zeta)}{\zeta-s}d\zeta\tag{4.7}$$

где $0<\tau_1<E_1$, функция $\chi_+(s)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Jm}s>-E_1$, функция $\chi_-(s)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Jm}s<E_1$. Уравнение (4.5) с учетом (4.6), (4.7) можно записать в виде

$$\Psi_+(s)H_+(s)\frac{\sqrt{s+iD_1}}{s+iE_1}-g_+(s)=g_-(s)+\frac{W_-(s)(s-iE_1)}{H_-(s)s\sqrt{s-iD_1}}\tag{4.8}$$

$$g_+(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+i\tau_2}^{\infty+i\tau_2}\frac{W_+(\zeta)(\zeta-iE_1)d\zeta}{\zeta H_-(\zeta)\sqrt{\zeta-iD_1}(\zeta-s)},\quad g_-(s)=\frac{W_+(s)}{L_-(s,\alpha)}-g_+(s)\tag{4.9}$$

$$H_+(s)=\exp\chi_+(s),\qquad H_-(s)=\exp\chi_-(s)\tag{4.10}$$

Пусть $q(r)=q=\mathrm{const}$. В этом случае

$$W_+(s)=-\frac{q}{\Delta\sqrt{2\pi}}\frac{1}{s+i}\tag{4.11}$$

Подставив (4.11) в (4.9) и используя теорию вычетов, найдем

$$g_+(s)=-\frac{q(1+E_1)}{\Delta\sqrt{2\pi}\sqrt{-i}\sqrt{1+D_1}H_-(-i)(i+s)}\tag{4.12}$$

Из (4.10) и (4.7) следует, что

$$H_-(-i)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\ln H(z)\,dz}{1+z^2}\right\}\tag{4.13}$$

Обе части уравнения (4.8) в общей полосе регулярности Π_2 $[\sup(-E_1,-1)<\operatorname{Jm}s<0]$ совпадают с некоторой функцией $G(s)$, регулярной во всей плоскости комплексной переменной s. Так как $\Psi(t)\sim1/\sqrt{t}$ при $t\to+0$, то $\Psi_+(s)\sim1/\sqrt{s}$ при $s\to\infty$ в верхней полуплоскости. Используя оценки функций $\Psi_+(s)$, $H_+(s)$ и $g_+(s)$ при $s\to\infty$, можно показать, что в силу теоремы Лиувилля $G(s)\equiv0$. Следовательно,

$$\Psi_+(s)=\frac{g_+(s)(s+iE_1)}{H_+(s)\sqrt{s+iD_1}}\tag{4.14}$$

Найдя оригинал функции $\Psi_+(s)$, получим точное решение задачи. Чтобы получить решение, пригодное для практического использования, далее будем считать, что $H_+(s)\equiv1$. Это соответствует тому, что функцию $L(s,\alpha)$ аппроксимируем выражением

$$L(s,\alpha)\approx\frac{s\sqrt{s^2+D_1^2}}{s^2+E_1^2}\tag{4.15}$$

Можно доказать, что погрешность полученного таким путем решения не превышает погрешности аппроксимации функции $L(u, \alpha)$ (4.15). Найдя функцию $\psi(t)$ и вернувшись затем к старым переменным и обозначениям, окончательно получим для случаев (1) и (3) (4.16)

$$\gamma(r)=\frac{qb(1+E_1)}{\Delta H_-(-i)\sqrt{1+D_1}}\left\{\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}}\operatorname{erf}\sqrt{D_1\ln(b/r)}+\frac{1-E_1}{\sqrt{D_1-1}}\frac{r}{b}\operatorname{erf}\sqrt{(D_1-1)\ln(b/r)}\right\}$$

Подставив $\gamma(r)$ в форме (4.16) во второе соотношение (2.10), найдем точное значение коэффициента интенсивности нормальных напряжений N при $r=b$, $\theta=0$

$$N_b=\frac{q\sqrt{b}(1+E_1)}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+D_1}H_-(-i)} \tag{4.17}$$

Аппроксимировав функцию $L(s, \alpha)$ для случая, когда на гранях клина выполняется условие (2), выражением

$$L(s,\alpha)\approx\frac{s^2+E_2^2}{s\sqrt{s^2+D_2^2}}\left(\frac{E_2^2}{D_2}=\frac{d}{\pi}\right) \tag{4.18}$$

можно получить соотношения для определения $\gamma(r)$ и N_b, аналогичные соотношениям (4.16) и (4.17). Опуская промежуточные вычисления, приводим окончательные выражения, определяющие $\gamma(r)$ и N_b для случая $a=0$ и условия на гранях клина (2)

$$\gamma(r)=\frac{qr\sqrt{1+D_2}}{\Delta H_-(-i)(1-E_2^2)}\left\{\left(\frac{r}{b}\right)^{E_2-1}\sqrt{D_2-E_2}\operatorname{erf}\left((D_2-E_2)\ln\frac{b}{r}\right)^{1/2}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{D_2-1}\operatorname{erf}\left((D_2-1)\ln\frac{b}{r}\right)^{1/2}\right\} \tag{4.19}$$

$$N_b=\frac{q\sqrt{b}\sqrt{1+D_2}}{\sqrt{\pi}(1+E_2)H_-(-i)} \tag{4.20}$$

Здесь $H_-(-i)$ вычисляется по формуле (4.13), причем $H(z)$ в данном случае имеет следующий вид:

$$H(z)=\frac{z\sqrt{z^2+D_2^2}}{z^2+E_2^2}L(z,\alpha) \tag{4.21}$$

5. **Численное исследование задачи.** Расчеты показывают, что для $0\leqslant\beta_i\leqslant 50\%$ при любых значениях $\mu=2(\ln b/a)^{-1}$ достаточно ограничиться вычислением $\gamma_0(r)$ и $\gamma_1(r)$. В двух случаях: $\alpha=1/2\,\pi$ и условии (1), $\alpha=\pi$ и условии (3) $\gamma_0(r)$ является точным решением задачи. Максимальные отклонения $\gamma_0(r)$ от точного решения получаются при $\mu\to 0$. При увеличении μ эти отклонения уменьшаются и $\gamma_0(r)$ при $\mu\to\infty$ стремится к точному решению соответствующей задачи о щели в плоскости.

Приводим значения величин $\gamma^*(r)=\Delta(qb)^{-1}\gamma(r)$, $N^*_a=2(q\sqrt{2b})^{-1}N_a$, $N^*_b=2(q\sqrt{2b})^{-1}N_b$,

вычисленные при $q(r)=q=\mathrm{const}$ ($p(r)=qr$) по формулам, полученным в п. п. 2,3 (метод последовательных приближений), в п. 4 (метод Винера — Хопфа) настоящей работы и по соответствующим формулам работы [3] (метод больших μ)

а) $\alpha=36{,}62°$, условие (1), $\beta_1=40\%$

$\gamma^*(\sqrt{ab})$	N_a^*	N_b^*	μ	
0.110	0.332	0.332	8	(нулевое приближение)
0.109	0.328	0.329	8	(метод больших μ)
0.216	0.469	0.469	3.5	(нулевое приближение)
0.200	0.433	0.441	3.5	(первое приближение)
0.202	0.435	0.443	3.5	(метод больших μ)
0.636	—	0.900	0	(нулевое приближение)
0.553	—	0.785	0	(первое приближение)
0.567	—	0.802	0	(метод Винера — Хопфа)

Для $\alpha = 36.62°$ и условия (1) были выбраны следующие значения постоянных при аппроксимациях функции $L(u,\alpha)$: $A_1 = 4.9, A_2 = 0.82$, $m_1 = 1, m_2 = 1.5$, $M_1 = 2$, $D_1 = 2.443$, $E_1 = 0.882$. При этом $H_-(-i) = 1.0089$, погрешность аппроксимации (2.1) не превышает 3%, погрешность аппроксимации (4.15) — 6.5%.

б) $\alpha = 90°$, условие (2), $\nu = 0.3$

$\gamma^* (\sqrt{ab})$	$\gamma^* (^1/_2 b)$	N_a^*	N_b^*	μ	
0.295	—	0.537	0.547	2	(нулевое приближение)
0.291	—	0.528	0.541	2	(метод больших μ)
0	0.407	—	0.626	0	(нулевое приближение)
0	0.390	—	0.613	0	(первое приближение)
0	0.392	—	0.616	0	(метод Винера — Хопфа)

в) $\alpha = 90°$, условие (3)

$\gamma^* (\sqrt{ab})$	$\gamma^* (^1/_2 b)$	N_a^*	N_b^*	μ	
0.326	—	0.607	0.590	2	(нулевое приближение)
0.326	—	0.607	0.590	2	(метод больших μ)
1.460	1.055	—	1.125	0	(нулевое приближение)
1.456	1.051	—	1.121	0	(метод Винера — Хопфа)

Для $\alpha = 90°$ и условий на гранях клина (2) и (3) были выбраны следующие значения постоянных при аппроксимациях функции $L(u, \alpha)$: $B_1 = 1$, $n_1 = 1$, $M_2 = 1$, $E_2 = 0.832$, $D_2 = 1$, $A_i = 0$ $(i = 1, 2,...)$, $D_1 = 2{,}549$, $E_1 = 1.652$. При этом $H_-(-i) = 0.9997$ для условия (2), $H_-(-i) = 1.0015$ для условия (3), погрешность аппроксимации (3.1) не превышает 0.5%, погрешность (4.15) и (4.18) не превышает 3% и 1.5 %.

В заключение отметим, что решение рассматриваемой задачи для малых значений параметра μ может быть получено при помощи метода, изложенного в работе [8].

Поступила 19 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Srivastav R. P., Narain Prem. Certain two—dimensional problems of stress distribution in wedge—shaped elastic solids under discontinuous load. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1965, vol. 61, p. 4.
2. Банцури Р. Д. Решение первой основной задачи теории упругости для клина, имеющего конечный разрез. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 6.
3. Сметанин Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое. Инж. ж., МТТ, 1968, № 2.
4. Александров В. М. О двух новых методах решения контактных задач для упругой полосы. Научн. сообщения за 1964 год (серия точных и естественных наук), 1965, изд. Ростовск. ун-та.
5. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.
7. Койтер В. Т. Бесконечный ряд параллельных трещин в неограниченной упругой пластинке. В сб.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.
8. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина. Инж. ж., МТТ, 1967, № 2.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ

В. В. Копасенко

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о действии штампа на упругую полубесконечную полосу жестко заделанную по короткому краю. Составлены интегральные уравнения относительно контактного давления и нормального напряжения в заделке. Методом Бубнова — Галеркина эти уравнения сводятся к двум системам линейных алгебраических уравнений. Обе системы оказываются хорошо обусловленными, а матрицы их коэффициентов — почти треугольными.

Численные расчеты были проведены для штампа с плоским дном, для наклонного штампа и для параболического и показали высокую эффективность метода.