ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ТЕЛ, НЕ ТРЕБУЮЩИЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Н. А. Алфутов, Л. И. Балабух

(Москва)

Показано, что если начальное напряженное состояние тела описывается линейной теорией упругости, то энергетический критерий нейтрального равновесия можно сформулировать непосредственно через внешние нагрузки и определяющие бифуркацию перемещения. Для этого при описании отклоненного положения равновесия тела вводятся кроме основных перемещений первого порядка малости дополнительные перемещения второго порядка малости, на которых совершают работу внешние потенциальные силы при потере устойчивости. Эти дополнительные квадратичные перемещения выражаются через перемещения первого порядка малости. Таким образом, оказывается, что задачу устойчивости упругого тела можно решать, не определяя предварительно его начального напряженного состояния. Полученный результат можно рассматривать как обоснование и обобщение энергетического критерия устойчивости в форме С. П. Тимошенко.

Энергетический критерий устойчивости, не требующий определения начальных напряжений, предпочтительнее обычного в тех случаях, когда начальное напряженное состояние не однородно. Такой путь решения был использован в работе [1] при рассмотрении устойчивости пластин.

1. Упругое тело объема V отнесем к прямоугольной системе координат x, y, z; компоненты, действующих на тело поверхностных и объемных потенциальных нагрузок обозначим соответственно $\overset{\circ}{p}_x$, $\overset{\circ}{p}_y$, $\overset{\circ}{p}_z$ и $F_x{}^\circ$, $F_y{}^\circ$, $F_z{}^\circ$. Предполагается, что начальное напряженно-деформированное состояние тела описывается уравнениями линейной теории упругости, т. е. начальные деформации ε° линейно выражаются через начальные перемещения u°, v°, w°

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial u^\circ}{\partial x}, \qquad \overset{\circ}{\varepsilon}_{xy} = \frac{\partial u^\circ}{\partial y} + \frac{\partial v^\circ}{\partial x} \qquad (xyz,\ uvw) \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем символ $(xyz,\ uvw)$ означает круговую перестановку указанных букв.

Начальные напряжения связаны с начальными деформациями законом Гука

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{xx} = \frac{1}{E}\left(\overset{\circ}{\sigma}_{xx} - \mu\overset{\circ}{\sigma}_{yy} - \mu\overset{\circ}{\sigma}_{zz}\right), \qquad \overset{\circ}{\varepsilon}_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\overset{\circ}{\sigma}_{xy} \qquad (xyz) \tag{1.2}$$

где E и μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Справедливы линейные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \overset{\circ}{\sigma}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \overset{\circ}{\sigma}_{xz}}{\partial z} + F^\circ{}_x = 0 \qquad (xyz) \tag{1.3}$$

при граничных условиях

$$\overset{\circ}{\sigma}_{xx} n_x + \overset{\circ}{\sigma}_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z = \overset{\circ}{p}_x \qquad (xyz) \tag{1.4}$$

на той части поверхности S_1, где заданы внешние нагрузки $p^\circ{}_x$, $p_y{}^\circ$, $p_z{}^\circ$; здесь n_x, n_y, n_z — компоненты вектора внешней нормали к поверхности тела в недеформированном состоянии, а также при граничных условиях

$$u^\circ = \bar{u}^\circ, \ v^\circ = \bar{v}^\circ, \ w^\circ = \bar{w}^\circ \tag{1.5}$$

на той части S_2 поверхности, где заданы начальные перемещения $\bar{u}^\circ$, $\bar{v}^\circ$, $\bar{w}^\circ$.

Новое, бесконечно близкое к начальному положение равновесия определим перемещениями в форме

$$u = u^\circ + \alpha u' + \alpha^2 u'', \ v = v^\circ + \alpha v' + \alpha^2 v'', \ w = w^\circ + \alpha w' + \alpha^2 w'' \tag{1.6}$$

Здесь u', v', w' и u'', v'', w'' считаются конечными функциями координат x, y, z, а параметр α бесконечно малой независимой от координат величиной.

Компоненты деформаций в новом отклоненном положении равновесия будем вычислять в виде разложения по параметру α с точностью до α^2 включительно

$$\varepsilon_{xx} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{xx} + \alpha\varepsilon_{xx}' + \alpha^2\varepsilon_{xx}'', \qquad \varepsilon_{xy} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{xy} + \alpha\varepsilon_{xy}' + \alpha^2\varepsilon_{xy}'' \qquad (xyz) \tag{1.7}$$

Здесь

$$\varepsilon_{xx}' = \frac{\partial u'}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{yx}' = \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \qquad (xyz,\ uvw) \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_{xx}'' = \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2\right] \qquad (xyz,\ uvw)$$

$$\varepsilon_{xy}'' = \frac{\partial u''}{\partial y} + \frac{\partial v''}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial x}\frac{\partial w'}{\partial y} \tag{1.9}$$

При вычислении ε' и ε'' опущены слагаемые с весьма малыми по сравнению с единицей множителями типа $\partial u^\circ / \partial x$, $\partial v^\circ / \partial z$ и т. д. Это соответствует сделанному ранее предположению, что начальное напряженно-деформированное состояние тела описывается линейной теорией упругости [2].

Напряжения в новом положении равновесия также представим в виде разложения по параметру α

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^\circ + \alpha\sigma'_{xx} + \alpha^2\sigma''_{xx}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}^\circ + \alpha\sigma'_{xy} + \alpha^2\sigma''_{xy} \tag{1.10}$$

Следуя В. В. Новожилову [2], считаем, что величины ε' и ε'' связаны с величинами σ' и σ'' подобно тому, как σ° связаны с ε°, г. е. считаем, что ε' и ε'' выражаются через σ' и σ'' при помощи зависимостей, полностью аналогичных закону Гука (1.2).

2. Полная потенциальная энергия рассматриваемого линейно-упругого тела, загруженного потенциальными силами, определяется выражением

$$Э = \frac{1}{2}\iiint [\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \ldots + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \ldots]\, dV -$$

$$-\iiint [F_x u + F_y v + F_z w]\, dV - \iint [p_x u + p_y v + p_z w]\, dS \tag{2.1}$$

Для отклоненного положения равновесия полную потенциальную энергию, ограничиваясь второй степенью параметра α, представим в виде

$$Э = Э^\circ + \alpha Э' + \alpha^2 Э'' \tag{2.2}$$

где слагаемое $Э^\circ$ — полная энергия начального невозмущенного состояния равновесия. Слагаемое $\alpha Э'$ — первая специальная вариация этой полной энергии, когда возможные перемещения совпадают с действительными перемещениями при бифуркации [3]. Слагаемое $\alpha^2 Э''$ соответственно пропорционально второй специальной вариации. Поскольку начальное состояние равновесное, то первая вариация энергии равна нулю и, следовательно, $Э' = 0$.

Приращение полной энергии при переходе к отклоненному положению равновесия равно

$$\Delta Э = Э - Э^\circ = \alpha^2 Э'' \tag{2.3}$$

Условию нейтрального равновесия, т. е. потере устойчивости, соответствует [4,5]

$$\Delta Э = Э'' = 0 \tag{2.4}$$

Выражение для $Э''$ согласно (1.6), (1.7), (1.10) представим в виде

$$Э'' = U_1 + U_2 + \Pi \tag{2.5}$$

$$U_1 = \frac{1}{2}\iiint \left[\sigma_{xx}'\varepsilon_{xx}' + \sigma_{xy}'\varepsilon_{xy}' + \ldots\right] dV \tag{2.6}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\iiint [\overset{\circ}{\sigma}_{xx}\varepsilon_{xx}'' + \overset{\circ}{\sigma}_{xy}\varepsilon_{xy}'' + \ldots + \sigma_{xx}''\overset{\circ}{\varepsilon}_{xx} + \sigma_{xy}''\overset{\circ}{\varepsilon}_{xy} + \ldots]\, dV \tag{2.7}$$

$$\Pi = -\iiint [F_x^\circ u'' + F_y^\circ v'' + F_z^\circ w'']\, dV - \iint [p_x^\circ u'' + p_y^\circ v'' + p_z^\circ v'']\, dS \tag{2.8}$$

Используя закон Гука (1.2) и аналогичные зависимости, связывающие σ'' и ε'', можно выражение для U_2 записать так:

$$U_2 = \iiint [\overset{\circ}{\sigma}_{xx}\varepsilon''_{xx} + \overset{\circ}{\sigma}_{xy}\varepsilon''_{xy} + \ldots]\, dV \tag{2.9}$$

Из общего выражения (2.5) для $Э''$, используя формулу (2.9) и зависимости (1.9), можно выделить слагаемые, в которые входят перемещения u'', v'', w''. Тогда

$$Э'' = A_1 + A_2 \tag{2.10}$$

$$A_2 = \iiint \left[\overset{\circ}{\sigma}_{xx} \frac{\partial u''}{\partial x} + \overset{\circ}{\sigma}_{xy}\left(\frac{\partial u''}{\partial y} + \frac{\partial v''}{\partial x}\right) + \ldots\right] dV -$$

$$- \iiint [F_x{}^\circ u'' + F_y{}^\circ v'' + F_z{}^\circ w'']\, dV - \iint [p_x{}^\circ u'' + p_y{}^\circ v'' + p_z{}^\circ w'']\, dS \tag{2.11}$$

В символ A_1 включены все остальные слагаемые.

Из выражения (2.11) следует, что A_2 можно рассматривать как новую специальную вариацию полной потенциальной энергии, когда возможные перемещения равны u'', v'', w''. Поэтому $A_2 = 0$ при любых совместимых со связями перемещениях u'', v'', w''. С учетом этого обстоятельства из условия (2.4) можно получить энергетический критерий нейтрального равновесия в форме Брайэна — Рейснера [4, 5]

$$Э'' = A_1 = U_1 + \iiint \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{xx} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2\right] + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \overset{\circ}{\sigma}_{xy}\left[\frac{\partial u'}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial x}\frac{\partial w'}{\partial y}\right] + \ldots \right\} dV \tag{2.12}$$

В этот критерий входят начальные напряжения σ° и бифуркационные перемещения u', v', w'; дополнительные квадратичные перемещения u'', v'', w'' в него не входят. В связи с этим интересно отметить, что сам Брайэн получил энергетический критерий устойчивости пластин в форме (2.12), сразу полагая квадратичные перемещения в плоскости пластины равными нулю [4]. Не считая этот вывод законным, Рейсснер ввел в рассмотрение такие перемещения, но в конечном итоге снова пришел к результату Брайэна. Причина такого совпадения Рейсснеру была не вполне ясна; так он пишет: «Очень странно, что при выводе Брайэна все же получился правильный конечный результат» [5].

3. Для получения энергетического критерия потери устойчивости, не требующего определения начальных напряжений и деформаций, преобразуем выражение (2.5) иначе. Так как $A_2 = 0$ при произвольных совместимых со связями перемещениях u'', v'', w'', то при преобразовании выражения для $Э''$ можно на эти перемещения наложить любые дополнительные условия; этим обстоятельством мы и воспользуемся.

В величину $Э''$ начальные напряжения σ° входят, согласно (2.5)—(2.8), только через выражение (2.7) для U_2. Используя принятые зависимости закона Гука между напряжениями и деформациями, выражение для U_2 можно привести как к виду (2.9), так и к виду

$$U_2 = \iiint [\sigma''_{xx}\overset{\circ}{\varepsilon}_{xx} + \sigma''_{xy}\overset{\circ}{\varepsilon}_{xy} + \ldots]\, dV \tag{3.1}$$

С учетом формул (1.1) для ε°, получим

$$U_2 = \iiint \left[\sigma''_{xx} \frac{\partial u^\circ}{\partial x} + \sigma''_{xy}\left(\frac{\partial u^\circ}{\partial y} + \frac{\partial v^\circ}{\partial x}\right) + \ldots\right] dV \tag{3.2}$$

Интегрируя теперь выражение для U_2 по частям, находим

$$U_2 = -\iiint \left[u^\circ\left(\frac{\partial \sigma''_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma''_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma''_{xz}}{\partial z}\right) + \ldots\right] dV + \iint [p_x{}'' u^\circ + p_y{}'' v^\circ + p_z{}'' w^\circ]\, dS \tag{3.3}$$

$$p_x{}'' = \sigma''_{xx} n_x + \sigma''_{yx} n_y + \sigma''_{zx} n_z \qquad (x\, y\, z) \tag{3.4}$$

Теперь распорядимся перемещениями u'', v'', w'' таким образом, чтобы в выражении (3.3) обратились бы в нуль тройной интеграл и двойной интеграл на части поверхности S_1, где заданы внешние нагрузки p_x°, p_y°, p_z°. Для этого достаточно потребовать, чтобы внутри объема тела выполнялись уравнения

$$\frac{\partial\sigma''_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma''_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma''_{xz}}{\partial z}=0 \qquad (x\,y\,z) \tag{3.5}$$

и на части поверхности S_1 выполнялись условия

$$p_x''=0,\ p_y''=0,\ p_z''=0 \tag{3.6}$$

На части поверхности S_2, где заданы начальные перемещения $\bar u^\circ$, $\bar v^\circ$, $\bar w^\circ$, должны выполняться граничные условия (для того, чтобы u'', v'', w'' были совместимы со связями)

$$u''=0,\ v''=0,\ w''=0 \tag{3.7}$$

При этих условиях из (3.2) получим

$$U_2=\iint\limits_{S_2}[p_x''\bar u^\circ+p_y''\bar v^\circ+p_z''\bar w^\circ]\,dS \tag{3.8}$$

Энергетический критерий нейтрального равновесия (2.4) теперь принимает вид

$$U_1+\iint\limits_{S_2}[p_x''\bar u^\circ+p_y''\bar v^\circ+p_z''\bar w^\circ]\,dS-\iint\limits_{S_1}[p_x^\circ u''+p_y^\circ v''+p_z^\circ w'']\,dS-$$
$$-\iiint[F_x^\circ u''+F_y^\circ v''+F_z^\circ w'']\,dV=0 \tag{3.9}$$

Условие (3.9) будет искомой формой энергетического критерия потери устойчивости, не содержащей начальных напряжений. Величина U_1 определяется по формуле (2.6) и зависит только от перемещений u', v', w'. Остальные слагаемые выражаются через заданные нагрузки p_x°, p_y°, p_z° и F_x°, F_y°, F_z° и заданные на части поверхности S_2 начальные перемещения $\bar u^\circ$, $\bar v^\circ$, $\bar w^\circ$. Входящие в условие (3.9) квадратичные перемещения u'', v'', w'' и квадратичные поверхностные нагрузки p_x'', p_y'', p_z'', выражаются через перемещения u', v', w' и от начальных напряжений и деформаций также не зависят.

Те условия, которые наложены на квадратичные перемещения u'', v'', w'' для исключения начальных напряжений из выражения для $Э''$, можно трактовать следующим образом. Выполнение уравнений (3.5) означает, что дополнительные квадратичные перемещения u'', v'', w'' выбраны так, чтобы квадратичные напряжения σ'', возникающие при потере устойчивости, были бы самоуравновешенными. Граничные условия (3.6) означают, что на той части поверхности, где заданы внешние поверхностные потенциальные нагрузки p_x°, p°_y, p°_z дополнительные квадратичные нагрузки p_x'' p_y'' p_z'' равны нулю. Наконец, входящие в условие (3.9) квадратичные нагрузки на части поверхности S_2 являются дополнительными квадратичными реакциями связей, возникающими при потере устойчивости.

4. Сформулированный выше критерий упругой устойчивости (3.9) позволяет при решении конкретных задач использовать прямые методы вариационного исчисления. В приближенных решениях можно, учитывая соответствующие граничные условия, задать определяющие бифуркацию функции перемещений u', v', w' в виде линейных агрегатов

$$u'=\sum a_i u_i'(x,y,z),\qquad v'=\sum b_i v'(x,y,z),\qquad w'=\sum c_i w_i'(x,y,z) \tag{4.1}$$

Выразив σ'' через ε'', использовав (1.9) и разрешив уравнения (3.5) относительно квадратичных перемещений u'', v'', w'', получим систему линейных дифференциальных уравнений, правые части которых будут зависеть от выбранных функций u', v', w'.

Решая точно или приближенно эту систему, находим с учетом граничных условий (3.6) и (3.7)

$$u'' = \sum A_i u_i'' (x, y, z), \quad v'' = \sum B_i v_i'' (x, y, z), \quad w'' = \sum C_i w_i'' (x, y, z) \tag{4.2}$$

где коэффициенты A_i, B_i C_i, зависят от параметров a_i, $в_i$, c_i. Теперь в критерий устойчивости (3.9) войдут, кроме параметров упругой системы, только величины внешних нагрузок и коэффициенты a_i, $в_i$, c_i; критические значения нагрузок можно определить, пользуясь далее известной процедурой С. П. Тимошенко.

Основное отличие предлагаемого варианта энергетического метода от обычного состоит в том, что определение начального напряженного состояния системы заменяется определением дополнительных квадратичных перемещений u'', v'', w''. Важно, что эта вспомогательная задача по определению u'', v'', w'' решается независимо от конкретного нагружения упругой системы; поэтому в случае сложного начального напряженного состояния предлагаемый путь решения может оказаться проще обычного. Кроме того, определив один раз перемещения u'', v'', w'' для данной системы при данных условиях ее закрепления, можно затем пользоваться этими перемещениями для других вариантов нагружения системы.

Обычный же путь решения связан с необходимостью каждый раз решать задачу определения начального напряженного состояния.

Примеры использования предлагаемого варианта энергетического метода для задач устойчивости прямоугольной пластины, нагруженной сосредоточенными силами, даны в работе [1].

Вместо примененного выше условия нейтрального равновесия $\Delta Э = 0$ и процедуры минимизации С. П. Тимошенко можно использовать и условие $\delta(Э'')=0$ из работы [2–4]. Оба эти пути решения, вообще говоря, эквивалентны [6]; и в том и в другом из них можно, следуя приведенным выше преобразованиям, избежать определения начального напряженного состояния упругой системы.

В заключение еще раз подчеркнем, что энергетический критерий устойчивости (3.9), не содержащий начальных напряжений, справедлив, когда начальное напряженно-деформированное состояние может быть с достаточной точностью описано уравнениями линейной теории упругости.

Поступила 4 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н. А., Балабух Л. И. О возможности решения задач устойчивости пластин без предварительного определения начального напряженного состояния. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
2. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
3. Болотин В. В. О сведении трехмерных задач теории упругой устойчивости к одномерным и двухмерным задачам. В сб.: Проблемы устойчивости в строительной механике, М., Стройиздат, 1965.
4. Bryan G. H. On the stability of plane plate under thrusts in its own plane. Proc. London Math. Soc., 1891, vol. 22.
5. Reissner H. Energiekriterium der Knicksicherheit Z. angew. Math. Mech., 1925, Bd. 5, Ht. 6, S. 475.
6. Лейбензон Л. С. Исследования по математической физике. ч. 2. О приближенном методе исследования устойчивости упругого равновесия, основанном на прямом приложении начала возможных перемещений, Уч. записки Юрьевск. ун-та, 1917, № 5, стр. 3—11.