УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ МОМЕНТНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Е. М. Королева

(Ростов-на-Дону)

Исследуется устойчивость цилиндрической оболочки бесконечной длины под действием кольцевой нагрузки. Решение задачи дается на основе линеаризации около — моментного напряженного состояния с дальнейшим применением метода Бубнова — Галеркина. Численный анализ производится на ЭЦВМ. Рассмотрен случай действия кольцевой нагрузки на оболочку бесконечной длины (фиг. 1), случай действий кольцевой нагрузки на полубесконечную оболочку (фиг. 2) и случай действия равномерно распределенной по торцу системы моментов (фиг. 3). Во всех этих задачах определены критическая нагрузка и число волн при потере устойчивости.

1. Будем исходить из следующих соотношений для компонентов деформации

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2,\qquad \varepsilon_2=\frac{\partial v}{\partial\beta}-\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2,\qquad \gamma=\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{\partial w}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}$$

$$\varkappa_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2},\qquad \varkappa_2=-\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2},\qquad \tau=-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta} \tag{1.1}$$

Здесь u, v — перемещения вдоль координатных линий α, β; w — по нормали, причем w положительно, если перемещение направлено к центру кривизны; R — радиус оболочки.

Как известно, потенциальная энергия деформации оболочки складывается из энергии деформации в срединной поверхности и энергии изгиба

$$U_1=\frac{E_1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+2\sigma\varepsilon_1\varepsilon_2+\frac{1-\sigma}{2}\gamma^2\right)d\alpha\,d\beta\qquad\left(E_1=\frac{Eh}{1-\sigma^2}\right) \tag{1.2}$$

$$U_2=\frac{E_2}{2}\int\limits_{\Omega}\left[\varkappa_1^2+\varkappa_2^2+2\sigma\varkappa_1\varkappa_2-2(1-\sigma)\tau^2\right]d\alpha\,d\beta\qquad\left(E_2=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\right)$$

Здесь h — толщина, σ — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

В соответствии с (1.2) усилия T_1, T_2, S и моменты M_1, M_2, M связаны с компонентами деформации законом Гука

$$T_1=E_1(\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2),\quad T_2=E_1(\varepsilon_2+\sigma\varepsilon_1),\quad S={}^1/_2\,E_1(1-\sigma)\gamma$$

$$M_1=E_2(\varkappa_1+\sigma\varkappa_2),\quad M_2=E_2(\varkappa_2+\sigma\varkappa_1),\quad M=E_2(1-\sigma)\tau \tag{1.3}$$

На основании вариационного принципа Лагранжа получим уравнения равновесия

$$\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial S}{\partial\beta}=0,\qquad \frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{\partial S}{\partial\alpha}=0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2 M}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial\beta^2}+\frac{T_2}{R}+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}T_1+2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}S+\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}T_2=0 \tag{1.5}$$

Данные уравнения справедливы на участках оболочки, где отсутствует нагрузка. Если ввести безразмерные параметры

$$u_1=\frac{u}{h},\qquad v_1=\frac{v}{h},\qquad w_1=\frac{w}{h},\qquad \lambda^2=\sqrt{3(1-\sigma^2)}\,\frac{R}{h},\qquad \xi=\frac{\alpha}{R},\qquad \eta=\frac{\beta}{R}$$

то учитывая (1.1), (1.3) запишем систему (1.4), (1.5) в перемещениях

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)u_1+\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}v_1-\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}w_1+\frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\lambda^2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial\xi}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial w_1}{\partial\xi}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\eta^2}+\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial w_1}{\partial\eta}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)=0$$

$$\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}u_1+\left(\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)v_1-\frac{\partial}{\partial\eta}w_1+\frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\lambda^2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial\eta}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\eta^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial w_1}{\partial\eta}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}+\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial w_1}{\partial\xi}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)=0 \tag{1.6}$$

$$\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}u_1+\frac{\partial}{\partial\eta}v_1-\left(1-\frac{1-\sigma^2}{4\lambda^4}\nabla^4\right)w_1+\frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\lambda^2}\left[\frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial\xi}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial\eta}\right)^2+\right.$$

$$+\sigma w_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}+w_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial\eta^2}-\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}-\sigma\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\eta^2}-(1-\sigma)\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi\,\partial\eta}-\sigma\frac{\partial v_1}{\partial\eta}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}-$$

$$\left.-\frac{\partial v_1}{\partial\eta}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\eta^2}-(1-\sigma)\frac{\partial v_1}{\partial\xi}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi\partial\eta}\right]-\frac{3(1-\sigma^2)}{\lambda^4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial\eta}\right)^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial\eta}\right)^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial\eta^2}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial\eta^2}+(1-\sigma)\frac{\partial w_1}{\partial\xi}\frac{\partial w_1}{\partial\eta}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi\,\partial\eta}\right]=0$$

$$\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\eta^4}$$

Выразив T_1, T_2, S через функцию напряжений Φ по известным формулам

$$T_1=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2},\qquad T_2=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2},\qquad S=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\,\partial\beta} \tag{1.7}$$

придем к системе уравнений относительно прогиба и функции напряжений

$$\frac{1}{12(1-\sigma^2)}\nabla^4 w_1-\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi\,\partial\eta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^2 w_1}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-\frac{\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}=0$$

$$\nabla^4\varphi-\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2+\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\eta^2}+\frac{\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2}=0\qquad\left(\varphi=\frac{\Phi}{Eh^3}\right) \tag{1.8}$$

Первое уравнение системы (1.8) получается из (1.5) с учетом (1.7), а второе выражает условие совместности деформаций.

2. В осесимметричном случае (1.6) и (1.8), соответственно, примет вид

$$\frac{d^2u_0}{d\xi^2}-\sigma\frac{dw_0}{d\xi}+\frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\lambda^2}\frac{dw_0}{d\xi}\frac{d^2w_0}{d\xi^2}=0 \tag{2.1}$$

$$\sigma\frac{du_0}{d\xi}-\left(1-\frac{1-\sigma^2}{4\lambda^4}\frac{d^4}{d\xi^4}\right)w_0+\frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\lambda^2}\left[\frac{\sigma}{2}\left(\frac{dw_0}{d\xi}\right)^2-\sigma w_0\frac{d^2w_0}{d\xi^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{du_0}{d\xi}\frac{d^2w_0}{d\xi^2}\right]-\frac{3(1-\sigma^2)}{2\lambda^4}\left(\frac{dw_0}{d\xi}\right)^2\frac{d^2w_0}{d\xi^2}=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{d^4\varphi_0}{d\xi^4}+\frac{\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\frac{d^2w_0}{d\xi^2}=0 \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{12(1-\sigma^2)}\frac{d^4w_0}{d\xi^4}-\frac{\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2}=0 \tag{2.4}$$

Исключив u_0 из (2.1), (2.2), φ_0 из (2.3), (2.4), получим уравнение

$$\frac{d^4w_0}{d\xi^4}+4\lambda^4w_0=0 \tag{2.5}$$

Как известно, общее решение уравнения (2.5) имеет вид

$$w_0=e^{\lambda\xi}(C_1\cos\lambda\xi+C_2\sin\lambda\xi)+e^{-\lambda\xi}(C_3\cos\lambda\xi+C_4\sin\lambda\xi) \tag{2.6}$$

Так как приложенные на $\xi=0$ силы производят местную деформацию, быстро исчезающую по мере увеличения расстояния ξ, то первый член в правой части (2.6) должен исчезнуть. Поэтому $C_1=C_2=0$ и w_0 окончательно запишем в виде

$$w_0=b\chi+\overline{b\chi}\quad(\chi=e^{-\mu\lambda\xi},\ \overline{\chi}=e^{\overline{\mu}\lambda\xi},\ \mu=1+i,\ \overline{\mu}=1-i)$$

Постоянные b и $\bar{b}$ определяются из граничных условий при $\xi = 0$. Из уравнений (2.1), (2.4) находим

$$\frac{du_0}{d\xi} = \sigma(b\chi + \bar{b}\bar{\chi}) - \frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{2\lambda^2}(b\mu\chi + \bar{b}\bar{\mu}\bar{\chi})^2 \tag{2.8}$$

$$\frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2} = -\frac{\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}(b\chi + \bar{b}\bar{\chi}) \tag{2.9}$$

Таким образом, получено точное решение осесимметричной задачи.

3. Общее решение системы (1.6) ищем в виде

$$u_1 = u_0 + u^*, \qquad v_1 = v_0 + v^*, \quad w_1 = w_0 + w^* \tag{3.1}$$

и общее решение (1.8) запишем в виде

$$w_1 = w_0 + w^*, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi^* \tag{3.2}$$

Здесь u_0, v_0, w_0, φ_0 соответствуют осесимметричному случаю.

После подстановки (3.1) и (3.2) с учетом (2.7), (2.8), (2.9) в системы (1.6) и (1.8), линеаризации полученных уравнений около моментного осесимметричного напряженного состояния приходим к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами относительно u^*, v^*, w^*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)u^* + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}v^* - \sigma\frac{\partial}{\partial\xi}w^* +$$
$$+\frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\lambda}\left[\lambda(b\mu^2\chi + \bar{b}\bar{\mu}^2\bar{\chi})\frac{\partial w^*}{\partial\xi} - (b\mu\chi + \bar{b}\bar{\mu}\bar{\chi})\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi^2} + \frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 w^*}{\partial\eta^2}\right)\right] = 0$$

$$\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}u^* + \left(\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)v^* - \frac{\partial}{\partial\eta}w^* +$$
$$+\frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{2\lambda}\left[(1-\sigma)\lambda(b\mu^2\chi + \bar{b}\bar{\mu}^2\bar{\chi})\frac{\partial w^*}{\partial\eta} - (1+\sigma)(b\mu\chi + \bar{b}\bar{\mu}\bar{\chi})\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi\,\partial\eta}\right] = 0 \tag{3.3}$$

$$\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}u^* + \frac{\partial}{\partial\eta}v^* - \left(1 - \frac{1-\sigma^2}{4\lambda^4}\nabla^4\right)w^* +$$
$$+\frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\lambda^2}\left[\lambda^2(b\mu^2\chi + \bar{b}\bar{\mu}^2\bar{\chi})\left(\sigma w^* - \frac{\partial u^*}{\partial\xi} - \sigma\frac{\partial v^*}{\partial\eta}\right) - \right.$$
$$-\sigma\lambda(b\mu\chi + \bar{b}\bar{\mu}\bar{\chi})\frac{\partial w^*}{\partial\xi} + (b\chi + \bar{b}\bar{\chi})(1-\sigma^2)\frac{\partial^2 w^*}{\partial\eta^2} +$$
$$\left.+\frac{3(1-\sigma^2)}{2\lambda}(b\mu^2\chi + \bar{b}\bar{\mu}^2\bar{\chi})(b\mu\chi + \bar{b}\bar{\mu}\bar{\chi})\frac{\partial w^*}{\partial\xi}\right] = 0$$

и системе относительно w^*, φ^*

$$\nabla^4\varphi^* + \lambda^2(b\mu^2\chi + \bar{b}\bar{\mu}^2\bar{\chi})\frac{\partial^2 w^*}{\partial\eta^2} + \frac{\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi^2} = 0$$

$$\frac{1}{12(1-\sigma^2)}\nabla^4 w^* - \lambda^2(b\mu^2\chi + \bar{b}\bar{\mu}^2\bar{\chi})\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial\eta^2} + \frac{\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}(b\chi + \bar{b}\bar{\chi})\frac{\partial^2 w^*}{\partial\eta^2} - \tag{3.4}$$
$$-\frac{\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial\xi^2} = 0$$

Итак, задача свелась к решению либо системы (3.3), либо системы (3.4) при соответствующих граничных условиях.

Для решения системы уравнений (3.3) и (3.4) применим метод Бубнова — Галеркина. Берем u^*, v^*, w^*, φ^* в виде $u^* = f_1(\xi)\cos n\eta$, $v^* = f_2(\xi)\sin n\eta$, $w^* = f_3(\xi)\cos n\eta$, $\varphi^* = f_4(\xi)\cos n\eta$, где n — число полных волн по окружности.

Тогда уравнения (3.3) примут вид

$$f_1'' - \frac{1-\sigma}{2} n^2 f_1 + \frac{1+\sigma}{2} n f_2' - \sigma f_3' + \frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\lambda} [\lambda (b\mu^2\chi + \bar{b}\bar{\mu}^2\bar{\chi}) f_3' -$$
$$- (b\mu\chi + \bar{b}\bar{\mu}\bar{\chi}) \left(f_3'' - \frac{1-\sigma}{2} n^2 f_3\right)\Big] = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{1+\sigma}{2} n f_1' + n^2 f_2 - \frac{1-\sigma}{2} f_2'' - n f_3 + \frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{2\lambda} [(1-\sigma)\lambda (b\mu^2\chi + \bar{b}\bar{\mu}^2\bar{\chi}) n f_3 -$$
$$- (1+\sigma)(b\mu\chi + \bar{b}\bar{\mu}\bar{\chi}) n f_3'] = 0 \tag{3.6}$$

$$\sigma f_1' + n f_2 - f_3 + \frac{1-\sigma^2}{4\lambda^4} (f_3^{IV} - 2n^2 f_3'' + n^4 f_3) + \frac{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\lambda^2} [\lambda^2 (b\mu^2\chi + \bar{b}\bar{\mu}^2\bar{\chi}) \times$$
$$\times (\sigma f_3 - f_1' - \sigma n f_2) - \sigma\lambda (b\mu\chi + \bar{b}\bar{\mu}\bar{\chi}) f_3' - (1-\sigma^2)(b\chi + \bar{b}\bar{\chi}) n^2 f_3] +$$
$$+ \frac{3(1-\sigma^2)}{2\lambda} (b\mu^2\chi + \bar{b}\bar{\mu}^2\bar{\chi})(b\mu\chi + \bar{b}\bar{\mu}\bar{\chi}) f_3' = 0 \tag{3.7}$$

и уравнения (3.4) переходят в следующие:

$$f_4^{IV} - 2n^2 f_4'' + n^4 f_4 - \lambda^2 (b\mu^2\chi + \bar{b}\bar{\mu}^2\bar{\chi}) n^2 f_4 + \frac{\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}} f_3'' = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{12(1-\sigma^2)} (f_3^{IV} - 2n^2 f''_3 + n^4 f_3) + \lambda^2 (b\mu^2\chi + \bar{b}\bar{\mu}^2\bar{\chi}) n^2 f_4 - \frac{\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}} (b\chi + \bar{b}\bar{\chi}) n^2 f_3 -$$
$$- \frac{\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}} f_4'' = 0 \tag{3.9}$$

Функции $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $f_3(\xi)$, $f_4(\xi)$ должны удовлетворять заданным граничным условиям. Выберем для $f_3(\xi)$ следующее аппроксимирующее выражение:

$$f_3(\xi) = a_1\chi + \bar{a}_1\bar{\chi} + a_2\chi^2 + \bar{a}_2\bar{\chi}^2 + a_3\chi\bar{\chi}$$

где a_i — некоторые постоянные.

При этом из граничных условий можно выразить a_1, $\bar{a}_1$ через a_2, $\bar{a}^2$, a_3

$$a_1 = \gamma_1 a_2 + \gamma_2 \bar{a}_2 + \gamma_3 a_3, \quad \bar{a}_1 = \bar{\gamma}_2 a_2 + \bar{\gamma}_1 \bar{a}_2 + \bar{\gamma}_3 a_3$$

Таким образом $f_3(\xi)$ зависит от трех параметров a_2, $\bar{a}^2$, a_3

$$f_3(\xi) = (\bar{\gamma}_1\bar{\chi} + \gamma_2\chi + \chi^2) a_2 + (\bar{\gamma}_2\bar{\chi} + \gamma_1\chi + \chi^2) \bar{a}_2 + (\gamma_3\chi + \bar{\gamma}_3\bar{\chi} + \chi\bar{\chi}) a_3 \tag{3.10}$$

После подстановки (3.10) в уравнения (3.5), (3.6) и (3.8), получим систему для определения $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$

$$f_1'' - {}^1\!/_2 (1-\sigma) n^2 f_1 + {}^1\!/_2 (1+\sigma) n f_2' = A_1\chi + \bar{A}_1\bar{\chi} + B_1\chi^2 + \bar{B}_1\bar{\chi}^2 + K_1\chi\bar{\chi} + L_1\chi^3 +$$
$$+ \bar{L}_1\bar{\chi}^3 + N_1\chi^2\bar{\chi} + \bar{N}_1\bar{\chi}^2\chi$$
$$\tag{3.11}$$
$${}^1\!/_2 (1+\sigma) n f_1' - {}^1\!/_2 (1-\sigma) f_2'' + n^2 f_2 = A_2\chi + \bar{A}_2\bar{\chi} + B_2\chi^2 + \bar{B}_2\bar{\chi}^2 + K_2\chi\bar{\chi} +$$
$$+ L_2\chi^3 + \bar{L}_2\bar{\chi}^3 + N_2\chi^2\bar{\chi} + \bar{N}_2\bar{\chi}^2\chi$$

и уравнение для определения $f_4(\xi)$ (3.12)

$$f_4^{IV} - 2n^2 f_4'' + n^4 f_4 = A_3\chi + \bar{A}_3\bar{\chi} + B_3\chi^2 + \bar{B}_3\bar{\chi}^2 + K_3\chi\bar{\chi} + L_3\chi^3 + \bar{L}_3\bar{\chi}^3 + N_3\chi^2\bar{\chi} + \bar{N}_3\bar{\chi}^2\chi$$

Находим общее решение системы (3.11) и уравнения (3.12)

$$f_1(\xi) = {}^1\!/_2 (1+\sigma) n [nC_1 + (\xi n - 1) C_2] e^{-n\xi} + A_1^*\chi + \bar{A}_1^*\bar{\chi} + B_1^*\chi^2 + \bar{B}_1^*\bar{\chi}^2 + K_1^*\chi\bar{\chi} +$$
$$+ L_1^*\chi^3 + \bar{L}_1^*\bar{\chi}^3 + N_1^*\chi^2\bar{\chi} + \bar{N}_1^*\bar{\chi}^2\chi \tag{3.13}$$

$$f_2(\xi) = {}^1\!/_2 n \{(1+\sigma) nC_3 + [(1+\sigma) n\xi - 4] C_4\} e^{-n\xi} + A_2^*\chi + \bar{A}_2^*\bar{\chi} + B_2^*\chi^2 + \bar{B}_2^*\bar{\chi}^2 +$$
$$+ K_2^*\chi\bar{\chi} + L_2^*\chi^3 + \bar{L}_2^*\bar{\chi}^3 + N_2^*\chi^2\bar{\chi} + \bar{N}_2^*\bar{\chi}^2\chi \tag{3.14}$$

$$f_4(\xi) = (C_5 + C_6\xi) e^{-n\xi} + A_3^*\chi + \bar{A}_3^*\bar{\chi} + B_3^*\chi^2 + \bar{B}_3^*\bar{\chi}^2 + K_3^*\chi\bar{\chi} + L_3^*\chi^3 + \bar{L}_3^*\bar{\chi}^3 +$$
$$+ N_3^*\chi^2\bar{\chi} + \bar{N}_3^*\bar{\chi}^2\chi \tag{3.15}$$

Постоянные C_i определяются из граничных условий; многочлены, A_i^*, B_i^*, K_i^*, L_i^*, N_i^* ($i = 1, 2, 3$) зависят от q, n, λ, σ, a_2, a_2, $\bar{a}_3$; черта означает комплексные сопряженные.

Подставляя (3.10), (3.13), (3.14) в (3.7) или подставляя (3.10), (3.15) в (3.9) поочередно умножая полученное уравнение на $(\gamma_1\chi + \overline{\gamma_2\chi} + \chi_2)d\xi$, $(\gamma_2\chi + \overline{\gamma_1\chi} + \bar{\chi}^2)\, d\xi$, $(\gamma_3\chi + \gamma_3\chi + \chi\bar{\chi})d\xi$ и интегрируя от нуля до бесконечности, получим в каждом случае три уравнения относительно a_2, $\bar{a}_2$, a_3

$$\begin{gathered}S_1(q, n, \lambda, \sigma)a_2 + S_2(q, n, \lambda, \sigma)\bar{a}_2 + S_3(q, n, \lambda, \sigma)\, a_3 = 0 \\ \bar{S}_2, (q, n, \lambda, \sigma)\, a_2 + \bar{S}_1(q, n, \lambda, \sigma)\, \bar{a}_2 + \bar{S}_3(q, n, \lambda, \sigma)a_3 = 0 \\ S_4(q, n, \lambda, \sigma)a^2 + \bar{S}_4(q, n, \lambda, \sigma)\bar{a}_2 + S_5(q, n, \lambda, \sigma)\, a_3 = 0\end{gathered} \tag{3.16}$$

причем S_i ($i = 1,2,3,4,5$) — многочлены второй степени относительно q — параметра нагрузки. Так как $a_2 \neq \bar{a}_2 \neq a_3 \neq 0$, то для получения нетривиального решения системы (3.16) определитель ее должен быть равен нулю

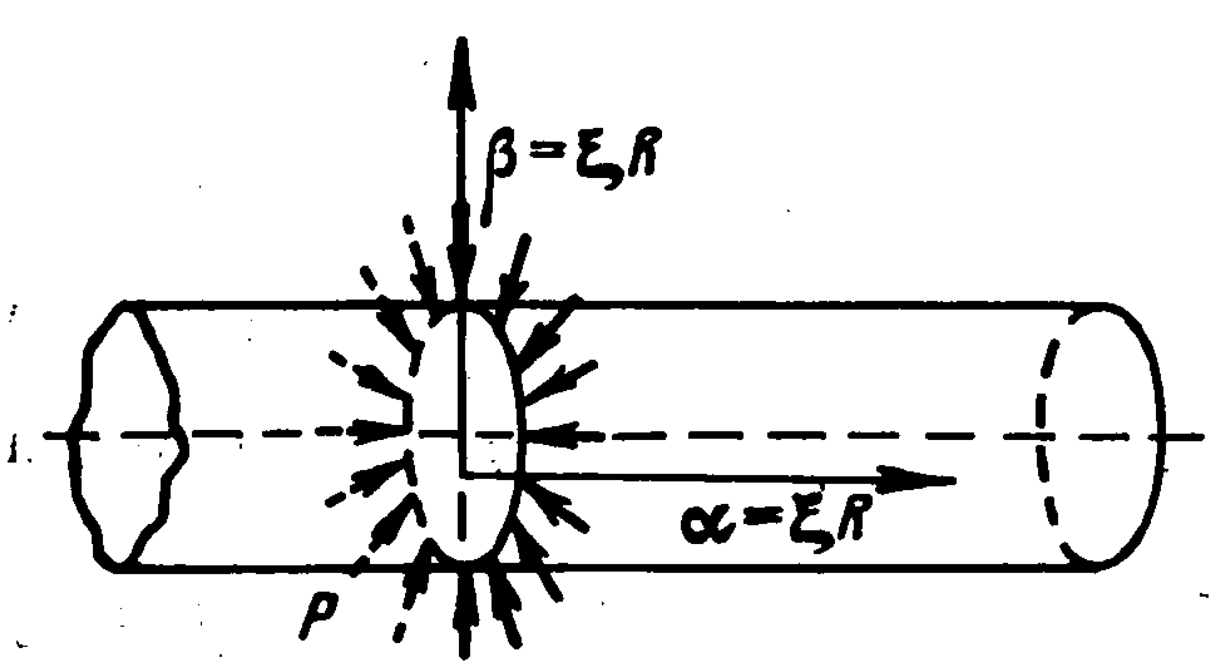
$$\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ \bar{S}_2 & \bar{S}_1 & \bar{S}_3 \\ S_4 & \bar{S}_4 & S_5 \end{vmatrix} = 0$$

Приходим при данном σ к алгебраическому уравнению шестой степени относительно q, зависящему от $k = n/\lambda$,

$$F_1(k)q^6 + F_2(k)q^5 + F_3(k)q^4 + F_4(k)q^3 + F_5(k)q^2 + F_6(k)q + F_7(k) = 0 \tag{3.17}$$

Уравнение (3.17) решалось численно с использованием ЭЦВМ «Минск-12» при $\sigma = 0.3$. Были составлены программы для вычисления коэффициентов и корней уравнения. Для каждого заданного λ находилось n, при котором q принимало минимальное значение, в дальнейшем обозначенное через q_0.

4. Рассмотрим цилиндрическую оболочку бесконечной длины, подверженную действию равномерной (осесимметричной) кольцевой нагрузки (фиг. 1). Для решения задачи устойчивости будем пользоваться уравнениями равновесия в перемещениях.



Фиг. 1

В осесимметричном случае w_0 удовлетворяет граничным условиям при $\xi = 0$:

$$\frac{dw_0}{d\xi} = 0, \qquad \frac{d^3w_0}{d\xi^3} = q \qquad \left(q = \frac{6P(1-\sigma^2)R^3}{Eh^4}\right) \tag{4.1}$$

Тогда с учетом (4.1) формулы (2.7), (2,8) примут вид

$$w_0 = \frac{q}{8\lambda^3}(\mu\chi + \overline{\mu\chi}), \qquad \frac{du_0}{d\xi} = \frac{\sigma q}{8\lambda^3}(\mu\chi + \overline{\mu\chi}) - \frac{q^2\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{128\lambda^6}(\mu^2\chi + \overline{\mu^2\chi})^2 \tag{4.2}$$

Общее решение задачи берем в форме (3.1), при этом u^*, v^*, w^* удовлетворяют условиям при $\xi = 0$

$$Q = \frac{\partial w^*}{\partial\xi} = u^* = \frac{\partial v^*}{\partial\xi} = 0$$

где Q — перерезывающая сила. Отсюда

$$f_1 = f_2' = 0, \quad f_3' = f'''_3 = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \tag{4.3}$$

Функции $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $f_3(\xi)$ берем в виде (3.10), (3.13), (3.14). Учитывая (4.3), находим

$$\begin{gathered}\gamma_1 = -5, \quad \gamma_2 = 3i, \quad \gamma_3 = {}^1/_2(1 + 3i) \\ C_1 = {}^1/_4[4 + (1+\sigma)\eta\xi]H, \; C_2 = {}^1/_4\, \xi\, (1+\sigma)T \\ C_3 = {}^1/_4(1+\sigma)\, (1 + n\xi)H, \; C_4 = {}^1/_4[(3-\sigma) + (1-\sigma)\eta\xi]T/n\end{gathered} \tag{4.4}$$

$$H = -A_1^* - \bar{A}_1^* - B_1^* - \bar{B}_1^* - K_1^* - L_1^* - \bar{L}_1^* - N_1^* - \bar{N}_1^*$$

$$\Gamma = \lambda\,[\mu A_2^* + \bar{\mu}\bar{A}_2^* + 2\mu B_2^* + 2\bar{\mu}\bar{B}_2^* + (\mu + \bar{\mu})K_2^* + 3\mu L_2^* + 3\bar{\mu}\bar{L}_2^* + (2\mu + \bar{\mu})N_2^* + (2\bar{\mu} + \mu)\bar{N}_2^*]$$

На основе этих соотношений вычисляются коэффициенты уравнения (3.17) которые не приводятся ввиду громоздкости.

Приводим результаты вычислений q_0 для ряда значений R/h

$R/h =$	10	20	50	100	200	400	600	800	1000	5000	10 000
$n =$	3	4	5	7	9	13	16	19	22	43	61
$q_0 =$	0.76	0.53	0.42	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38.	0.38

При этом критическая нагрузка определяется по формуле

$$P_* = q_0 \frac{Eh}{(1-\sigma^2)^{0.75}} \left(\frac{h}{R}\right)^{1.5} \tag{4.5}$$

5. Рассмотрим полубесконечную цилиндрическую оболочку, под действием равномерной (осесимметричной) кольцевой нагрузки, приложенной на торце (фиг. 2).

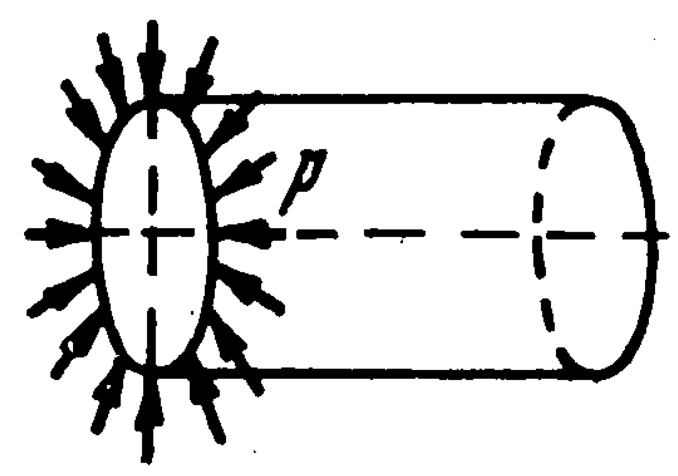
Для решения данной задачи удобнее пользоваться уравнениями равновесия относительно прогиба и функции напряжений.

В осесимметричном случае w_0 удовлетворяет граничным условиям при $\xi = 0$

$$\frac{d^2 w_0}{d\xi^2} = 0, \qquad \frac{d^3 w_0}{d\xi^3} = q \qquad \left(q = \frac{12P(1-\sigma^2)R^3}{Eh^4}\right) \tag{5.1}$$

Учитывая (5.1), формулы (2.7), (2.9) примут вид

$$w_0 = \frac{q}{4\lambda^3}(\chi + \bar{\chi}), \qquad \frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2} = -\frac{q}{4\lambda\sqrt{3(1-\sigma^2)}}(\chi + \bar{\chi}) \tag{5.2}$$



Фиг. 2

Общее решение задачи берем в форме (3.2), при этом должны выполняться следующие условия при $\xi = 0$:

$$T_1 = S = Q = M = 0 \tag{5.3}$$

Отсюда имеем при $\xi = 0$

$$f_4 = f_4^1 = 0$$

$$f_3''' - (2-\sigma)n^2 f_3' = 0, \qquad f_3'' - \sigma n^2 f_3 = 0 \tag{5.4}$$

Функции $f_3(\xi)$ и $f_4(\xi)$ берем в виде (3.10) и (3.15). Учитывая (5.3) и (5.4), находим

$$\gamma_1 = \frac{\lambda}{\Delta}\{2\mu\,[4\mu^2\lambda^2 - (2-\sigma)n^2](\bar{\mu}^2\lambda^2 - \sigma n^2) - \bar{\mu}\,[\bar{\mu}^2\lambda^2 - (2-\sigma)n^2](4\mu^2\lambda^2 - \sigma n^2)\}$$

$$\gamma_2 = \frac{\lambda}{\Delta}\{2\bar{\mu}\,[4\bar{\mu}^2\lambda^2 - (2-\sigma)n^2](\mu^2\lambda^2 - \sigma n^2) - \mu\,[\mu^2\lambda^2 - (2-\sigma)n^2](4\bar{\mu}^2\lambda^2 - \sigma n^2)\}$$

$$\gamma_3 = \frac{\lambda}{\Delta}\{(\mu + \bar{\mu})\,[(\mu + \bar{\mu})^2\lambda^2 - (2-\sigma)n^2](\bar{\mu}^2\lambda^2 - \sigma n^2) - \bar{\mu}\,[\bar{\mu}^2\lambda^2 - (2-\sigma)n^2] \times [(\mu + \bar{\mu})^2\lambda^2 - \sigma n^2]\}$$

$$\Delta = \lambda\,\{\bar{\mu}\,[\bar{\mu}^2\lambda^2 - (2-\sigma)n^2](\mu^2\lambda^2 - \sigma n^2) - \mu\,[\mu^2\lambda^2 - (2-\sigma)n^2](\bar{\mu}^2\lambda^2 - \sigma n^2)\}$$

$$C_5 = -A_3^* - A_3^* - B_3^* - \bar{B}_3^* - K_3^* - L_3^* - \bar{L}_3^* - N_3^* - \bar{N}_3^*$$

$$C_6 = (\mu\lambda - n)\bar{A}_3^* + (\bar{\mu}\lambda - n)\bar{A}_3^* + (2\mu\lambda - n)B_3^* + (2\bar{\mu}\lambda - n)\bar{B}_3^* + [(\mu + \bar{\mu})\lambda - n]K_3^* + (3\mu\lambda - n)L_3^* + (3\mu\lambda - n)L_3^* + [(2\mu + \bar{\mu})\lambda - n]N_3^* + [(2\bar{\mu} + \mu)\lambda - n]\bar{N}_3^*$$

Здесь

$$A_3^* = -\frac{\mu^2\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}\,(\mu^2\lambda^2 - n^2)^2}\,a_1, \qquad B_3^* = \frac{qn^2\mu^2}{4\lambda\,(4\mu^2\lambda^2 - n^2)^2}\,a_1 - \frac{4\mu^2\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}\,(4\mu^2\lambda^2 - n^2)^2}\cdot a_2$$

$$K_3^* = \frac{qn^2}{4\lambda\,[(\mu+\bar{\mu})^2\lambda^2 - n^2]^2}(\bar{\mu}^2 a_1 + \mu^2 \bar{a}_1) - \frac{(\mu+\bar{\mu})^2\lambda^2}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}\,[(\mu+\bar{\mu})^2\lambda^2 - n^2]^2} a_3$$

$$L_3^* = \frac{qn^2\mu^2}{4\lambda\,(9\mu^2\lambda^2 - n^2)^2} a_2, \qquad N_3^* = \frac{qn^2}{4\lambda\,[(2\mu+\bar{\mu})^2\lambda^2 - n^2]^2}(\bar{\mu}^2 a_2 + \mu^2\bar{a}_2)$$

На основе этих соотношений вычисляются коэффициенты уравнения (3.17); которые не приводятся ввиду громоздкости.

Приводим результаты вычислений q_0 для ряда значений R / h

$R / h =$	10	20	50	100	200	400	600	800	1000	5000	10 000
$n =$	3	4	5	7	10	13	15	19	21	44	61
$q_0 =$	0.35	0.27	0.22	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18

Критическая нагрузка определяется по формуле

$$P_* = q_0 \frac{Eh}{(1-\sigma^2)^{0.5}} \left(\frac{h}{R}\right)^{1.5} \tag{5.5}$$

6. Рассмотрим полубесконечную цилиндрическую оболочку под действием системы, моментов, равномерно распределенных по торцу (фиг. 3).

Задача решается аналогично предыдущей с использованием уравнений равновесия относительно прогиба и функции напряжений.

Приводим результаты вычислений q_0 для ряда значений R / h

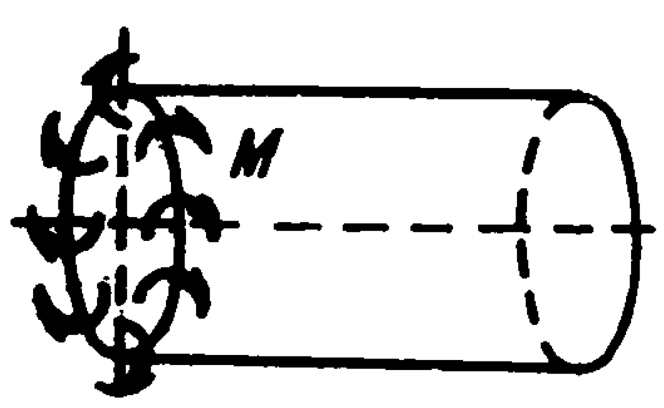
$R / h =$	10	20	50	100	200	400	600	800	1000	5000	10 000
$n =$	2	4	5	6	9	13	16	19	22	43	62
$q_0 =$	0.42	0.33	0.29	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21

Причем

$$M_* = \frac{Eh^2}{(1-\sigma^2)^{0.75}} \frac{h}{R} \tag{6.1}$$

3. Для определения n при $R / h \geqslant 100$ можно пользоваться формулой

$$n = \left(\frac{R}{eh}\right)^{1/2}, \qquad e = 2.718$$



Фиг. 3

4. При достаточно больших R / h величина q_0 не зависит от толщины, и в случае действия кольцевой нагрузки на бесконечную и полубесконечную оболочки согласно вычислений по формулам (4.5) и (5.5) соответственно будут равны $q_0 = 0{,}38$ и $q_0 = 0.18$.

В случае действия системы моментов, равномерно распределенной по торцу согласно формулам (6.1) вычисления дают $q_0 = 0.21$.

Поступила 31 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н. А., Балабух Л. И. О возможности решения задач устойчивости пластин без предварительного определения начального напряженного состояния. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
3. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.