МЕТОДЫ ОБОСНОВАНИЯ И УТОЧНЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

(Обзор последних результатов)

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

Рассматривается проблема сведения трехмерных уравнений теории упругости к двухмерным уравнениям теории оболочек, интерес к которой значительно возрос в последнее десятилетие.

Результаты, относящиеся к затронутому вопросу, весьма многочисленны и здесь они будут обсуждаться лишь с общих позиций, без подробностей. Более детальный анализ можно найти в обзорах [1–4].

1. Пусть в рамках линейной теории упругости задача об исследовании напряженного состояния упругой тонкой оболочки может быть поставлена как трехмерная краевая задача

$$M(\Phi) = 0, \quad M^f(\Phi) = M_0{}^f, \quad M^b(\Phi) = M_0{}^b \tag{1}$$

где выписанные равенства символизируют соответственно трехмерную систему уравнений теории упругости, условия на лицевых поверхностях и условия на краях оболочки, а Φ — совокупность искомых неизвестных, т. е. например, напряжений и перемещений. Тогда обсуждаемая проблема заключается в построении последовательности двухмерных краевых задач

$$\begin{gathered} L_j(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_j) = L_{j,0} \\ L_j{}^b(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_j) = L^b{}_{j,0} \quad (j = 1,2,\ldots) \end{gathered} \tag{2}$$

где первое равенство символизирует двухмерную систему уравнений, второе — краевые условия, а Ψ_j — некоторые новые группы искомых величин.

Связь между (1) и (2) заключается в том, что выражения H_j, составленные определенным образом из решений двухмерных задач Ψ_j, должны при $j \to \infty$ в некотором смысле приближаться к решению трехмерной задачи

$$H_j(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_j) \to \Phi$$

Для решения этой проблемы было испробовано много путей, которые здесь перечисляться не будут. Однако, если отвлечься от деталей, то подавляющее большинство этих подходов можно охватить, рассмотрев три группы методов: (a) метод гипотез; (b) метод разложений по толщине; (c) асимптотический метод.

2. Метод гипотез заключается в том, что относительно характера функций Φ принимаются некоторые предположения, выбираемые так, что они позволяют получить двухмерную краевую задачу

$$L(\Psi) = L_0, \quad L^b(\Psi) = L_0{}^b$$

в некотором смысле эквивалентную краевой задаче (1).

Метод гипотез приводит не к последовательности краевых задач, а к некоторой определенной краевой задаче, которая может варьироваться только во второстепенных членах за счет точности выкладок, реализующих принятую гипотезу.

Простейший и наиболее важный пример теории, построенной методом гипотез, представляет собой классическая теория, созданная еще в конце прошлого века и не потерявшая значения до сих пор. Она базируется на предположениях типа гипотез Кирхгофа — Лява, а под Ψ в ней подразумеваются, например, усилия, моменты и перемещения срединной поверхности.

Сформулированы также и другие гипотезы, менее жесткие, чем гипотезы типа Кирхгофа — Лява [5–9]. В дальнейшем в связи с этим будет говориться о методе ослабленных гипотез.

3. Преимущества и недостатки метода гипотез весьма существенны и очевидны: преимущества состоят в наглядности и относительной простоте окончательных рекомендаций; недостатки заключаются в невозможности повысить точность (без изменения гипотез) и в трудности получения оценки погрешности.

4. В последнее время большое внимание зарубежных ученых привлекли работы Койтера [10,11] и Джона [12], предпринявших новые попытки устранить второй из указанных недостатков для классической теории оболочек (из более ранних работ, посвященных этому вопросу, упомянем [13]).

Койтер и Джон модифицировали гипотезы типа Кирхгофа — Лява, заменив их, грубо говоря, предположением о плоскостном характере напряженного состояния (т. е. предположением об относительной малости всех напряжений, направления которых не параллельны касательной плоскости срединной поверхности). Опираясь на такую новую, но неменяющую сущности дела, формулировку, они получили оценку погрешностей (не только для линейных, но и для нелинейных задач) гипотезы типа Кирхгофа—Лява, которую, держась ближе к формулировкам Койтера, можно выразить формулой

$$\varepsilon = \max \{O(h^1{}_*), \quad O(h_*{}^{2-2t})\} \tag{3}$$

где h_* — относительная толщина, а t — показатель изменяемости.

Надо заметить, что Койтер и Джон оценивают только те погрешности, которые возникают при переходе от трехмерных уравнений теории упругости к двухмерным уравнениям теории оболочек, но не рассматривают погрешности, связанные с переходом от трехмерных граничных условий к двухмерным. Поэтому их результаты при всей их принципиальной важности, строго говоря, недостаточны для суждения о погрешностях, получающихся при расчете оболочек, т. е. при решении соответствующих двухмерных краевых задач. К этому еще предстоит вернуться.

5. Метод разложения по толщине заключается в том, что Φ представляется в виде

$$\Phi = \Sigma\varphi_n(\gamma)\ \Phi_n(\alpha, \beta)$$

где γ — поперечная координата, а α, β — координаты в срединной поверхности.

Под Ψ_j — неизвестными величинами теории оболочек — в этом методе подразумеваются коэффициенты Φ_n, для которых тем или иным способом составляется последовательность краевых задач (2).

Функции $\varphi_n(\gamma)$ чаще всего выбираются в виде степеней γ (см. работы [14—20]) или полиномов Лежандра [21—24].

6. Под асимптотическими подразумеваются методы, в которых наиболее полно используется малость толщины оболочки. Для этого подхода характерно стремление на каждом этапе вычислений иметь дело только с величинами одного порядка малости относительно степеней h_*. Поэтому в конечном итоге во всех работах, основанных на асимптотическом методе [25—37]

$$\Phi = h_*{}^a \sum_{s=0}^{S} h_*{}^s \Phi_s \tag{4}$$

Существенное различие асимптотического метода от метода разложения по толщине проявляется в структуре краевых задач (2).

В методе разложения получаются краевые задачи (2) общего вида, т. е. при фиксированном j все группы неизвестных $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_j$, надо определять одновременно, решая для этого краевую задачу тем более высокого порядка, чем больше j.

В асимптотическом методе последовательность краевых задач (2) принимает вид

$$L(\Psi_j) = F_j(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{j-1}), \; L^b(\Psi_j) = F_j{}^b(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{j-1})$$

где F_j и $F_j{}^b$ — известные выражения от перечисленных функций.

Это значит, что краевые задачи (2) в асимптотическом методе имеют итерационный характер, т. е. процесс их решения заключается в j-кратном решении краевых задач, различающихся между собой только смыслом известных функций, входящих в правые части уравнений и граничных условий.

7. Метод гипотез, метод разложений по толщине и асимптотический метод направлены на решение одной и той же проблемы и несмотря на кажущееся различие должны

вести к сходным результатам. С этой точки зрения и будут далее более детально обсуждаться различные схемы построения общей теории оболочек.

8. Наиболее простое, но вместе с тем и наиболее важное свойство напряженного состояния тонкой оболочки заключается в том, что оно складывается из внутреннего напряженного состояния, распространяющегося, как правило, на всю оболочку, и погранслоя — напряженного состояния, локализованного вблизи краев оболочки.

9. Дифференциальные уравнения классической теории не содержат интегралов, соответствующих погранслою. Отсюда вытекает, что предположения, положенные в основу классической теории, отсеивают все погранслои, сохраняя только внутреннее напряженное состояние. Это свойство можно считать определяющим для гипотез типа Кирхгофа — Лява (в этом смысле и говорилось ранее, что предположения Койтера — Джона не отличаются в сущности от гипотез типа Кирхгофа — Лява).

10. Метод разложений по толщине и метод ослабленных гипотез приводит к уравнениям более высокого порядка, чем уравнения классической теории. Повышение порядка получается за счет слагаемых, содержащих исчезающе малые (при $h_* \to 0$) коэффициенты. Асимптотический анализ дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих такого рода возмущения [38–40],показывает, что, если возмущающие члены приводят к повышению порядка уравнения, то их роль сводится к тому, что они, во-первых,вызывают малые изменения тех интегралов, которые имели и невозмущенные уравнения, а во-вторых,порождают принципиально новые интегралы с большой изменяемостью. Последние и соответствуют погранслоям (таким образом под смягченными гипотезами надо подразумевать предположения, сохраняющие в какой-то мере погранслои).

Замечание. Уравнения классической теории оболочек также содержат затухающие решения, соответствующие так называемым краевым эффектам, известным еще Ляву. Погранслой принципиально отличается от них тем, что имеет больший показатель изменяемости t (для краевых эффектов $t \leqslant 1/2$ для погранслоя $t = 1$).

11. Наиболее отчетливо обсуждаемое свойство напряженного состояния оболочки проявляется в асимптотическом методе.

Различные виды представления решений уравнений теории упругости в форме (4) отвечающие различному выбору показателей a_k, соответствуют различным интерационным процессам решения уравнений теории упругости. Они делятся на основные итерационные процессы, позволяющие строить внутренние напряженные состояния, и вспомогательные итерационные процессы, служащие для построения погранслоя.

Показано [28, 30], что для выполнения граничных условий, сформулированных в терминах трехмерной задачи теории упругости, надо использовать произволы как основного, так и вспомогательного итерационных процессов. Отсюда и вытекает, как правило, что напряженное состояние оболочки будет складываться из внутреннего напряженного состояния и погранслоя.

12. Итак, метод смягченных гипотез, метод разложений по толщине и асимптотический метод в отношении обсуждаемого свойства напряженного состояния тонких упругих тел качественно согласуются один с другим. Это общее утверждение проверено конкретным асимптотическим анализом дифференциальных уравнений теории изгиба пластинки. Оно проведено в [24] для уравнений, построенных методом разложения по толщине, и в [41] для уравнений, построенных методом смягченных гипотез. Однако не следует думать, что различие между асимптотическим методом, с одной стороны, и методом разложений или методом смягченных гипотез, с другой, — сводится только к тому, на каком этапе делать асимптотический анализ уравнений. На ребрах, отделяющих боковые поверхности оболочки от ее лицевых поверхностей, будут иметь место особенности решения трехмерных задач. В методе разложения или в методе смягченных гипотез они «размазываются», т. е. аппроксимируются при помощи непрерывных функций, а в асимптотическом методе они «выделяются», переходя в особенности решения уравнений погранслоя.

13. Остановимся на физическом содержании понятий внутреннего напряженного состояния и погранслоя.

Природа внутреннего напряженного состояния очевидна: это то напряженное состояние, которое в первом приближении получается при расчете оболочки по классической теории. Оно вызывается внешними поверхностными силами и некоторой несамоуравновешанной по толщине оболочки частью краевых сил (здесь и в дальнейшем в число краевых сил включаются и силы реакции опор).

Погранслой вызывается самоуравновешанной по толщине оболочки частью краевых сил. Отметим на краю оболочки некоторую нормаль к срединной поверхности n и выделим в теле оболочки искривленную полоску η, проведя через n плоское сечение ортогонально к краю (см. фигуру на стр. 692). Тогда, погранслой вблизи n, грубо говоря, можно трактовать, как напряженное состояние, возникающее в полоске η от действия на ее торец некоторой самоуравновешанной системы сил. Подчиняясь принципу Сен-Венана, погранслой быстро затухает от края в глубь области, и искривленную полоску в первом приближении можно заменить прямой полуполосой. Такое толкование выглядит поверхностным, но оно подтверждается тем, что построение погранслоя по асимптотическому методу в первом приближении сводится к отысканию затухающих решений плоской и антиплоской задач теории упругости в прямой полуполосе [23–37] (см. также приложение).

14. Внутреннее напряженное состояние и погранслой принципиально различаются одно от другого как по физическому содержанию, так и по математической постановке задач. Поэтому о любой уточненной теории оболочек надо судить по ее способности описывать как внутреннее напряженное состояние, так и погранслой. Такое испытание оказывается трудным почти для любой теории. В частности, с этой точки зрения не производят целостного впечатления ни метод разложений по толщине, ни метод смягченных гипотез. Ими хорошо описывается внутреннее напряженное состояние, в котором напряжения и перемещения меняются по толщине по простым законам, но для описания погранслоя, в котором графики перемещений имеют у края весьма причудливый вид, эти методы приспособлены плохо.

15. В связи с сказанным выше заслуживает внимания идея раздельного изучения теории внутреннего напряженного состояния и теории погранслоя.

Теория внутреннего напряженного состояния будет представлять собой прямое обобщение и уточнение классической теории. Об этом более обстоятельно будет говориться ниже. Теорию погранслоя, или, если угодно, теорию краевых явлений, надо строить заново. Эту проблему, по-видимому, надо трактовать как проблему построения затухающих решений плоской и антиплоской задач теории упругости для полуполосы.

16. Не для всякой задачи теории оболочек видны ясные пути использования идеи разделения основного напряженного состояния и погранслоя, но в линейных задачах статического равновесия оболочек подходы, основанные на этой идее, совершенно очевидны. Показано [23–37], что, если и для основного напряженного состояния и для погранслоя удовольствоваться первым приближением, то расчет оболочки разобъется на два этапа: первый из них заключается в расчете по классической теории, а второй — в построении погранслоя. При этом первый этап совершенно не зависит от второго, а это значит, что все расчеты, выполненные в рамках классической теории, не обесцениваются, а лишь по-новому освещаются, как расчеты, которые в некоторых случаях надо пополнить построением погранслоя.

17. Взаимосвязь между внутренним напряженным состоянием и погранслоем проявляется только в процессе наложения граничных условий на боковых краях. Образно говоря, она сводится к «распределению обязанностей»: внутреннее напряженное состояние реагирует на несамоуравновешанные по толщине активные и реактивные краевые силы, а погранслой берет на себя самоуравновешанную часть этих сил.

Таким образом, в формировании полного напряженного состояния оболочки погранслой играет двойную роль: во-первых, он вызывает локальное изменение полного напряженного состояния, накладываясь вблизи краев на внутреннее напряженное состояние; во-вторых, он влияет и на само внутреннее напряженное состояние, изменяя граничные условия, которым последнее должно подчиняться. Естественно, возникает вопрос, насколько существенно каждое из этих двух проявлений погранслоя.

18. Показано, что на краю погранслой по интенсивности наибольших напряжений соизмерим с внутренним напряженным состоянием [30,34,36,41]. Поэтому задачи, в которых важно обследовать напряженное состояние краевой зоны, например, задачи о концентрации напряжений, и принадлежат к тому классу задач, для которых расчет должен быть пополнен построением погранслоя.

19. Влияние погранслоя на внутреннее напряженное состояние уже не имеет краевого характера и приводит к тотальным изменениям. Один из способов оценить величину этого эффекта заключается в том, чтобы попытаться полностью выделить в самостоятельное рассмотрение задачу о внутреннем напряженном состоянии так, чтобы влияние погранслоя было выражено в виде поправок к граничным условиям. Со всей точностью это едва ли доступно, но в пределах некоторого числа исходных приближений этого достичь можно. Более того, как показал Фридрихс [25], влияние погранслоя учитывается уже в классической теории. А именно, известная модификация граничных условий теории изгиба пластинок за счет введения приведенного перерезывающего усилия и есть результат исключения погранслоя. В работе [42] показано, что такой же смысл имеют приведенные нормальные и сдвигающие усилия в граничных условиях теории оболочек.

Некоторые более подробные пояснения по поводу формулировки граничных условий классической теории оболочки и ее связи с погранслоем даются в приложении.

20. Учесть влияние погранслоя в граничных условиях внутреннего напряженного состояния можно и более точно, чем сделали Фридрихс, Грин и Лоос.

Для теории изгиба пластинок это сделано в работе [43], где выведены следующие граничные условия для внутреннего напряженного состояния:

свободный край ($\sigma = \tau_t = \tau_n = 0$)

$$M_\alpha + \left[Ah\frac{\partial H}{\partial s_\beta}\right] = 0, \qquad N_\alpha + \frac{\partial H}{\partial s_\beta} + \left[Ah\frac{\partial}{\partial s_\beta}(kH)\right] = 0$$

шарнирный край ($\sigma = \tau_t = w = 0$)

$$M_\alpha + \left[Ah\frac{\partial H}{\partial s_\beta} + BkhM_\beta\right] = 0, \qquad w = 0 \tag{5}$$

шарнирный край ($\sigma = v = w = 0$)

$$M_\alpha = 0, \quad w = 0$$

жестко заделанный край ($u = v = w = 0$)

$$D\frac{\partial w}{\partial s_\alpha} - \left[\frac{C\nu}{1-\nu^2}\frac{h}{2}(M_\alpha + M_\beta)\right] = 0$$

Здесь в левых частях равенств вне квадратных скобок выписаны члены, образующие хорошо известные граничные условия классической теории изгиба пластинок. В квадратные скобки заключены слагаемые, выражающие влияние погранслоя, в этих членах k — кривизна края, ν — число Пуассона, A, B, C — числа, для определения которых надо решить некоторые плоские и антиплоские задачи теории упругости:

$$A \approx 1.26, \qquad B \approx -0.0083, \qquad C \approx -0.0917 \quad \text{при} \quad \nu = 1/3$$

В круглых скобках после словесной характеристики условий закрепления указаны соответствующие им граничные условия трехмерной теории упругости (σ — нормальное напряжение, τ_t, τ_n — сдвигающее напряжение по касательной к краю и по нормали к срединной плоскости, соответственно).

21. Из формул (5) видно, что в теории изгиба пластинок влияние погранслоя выражается членами порядка h_*, где h_* — отношение полутолщины к типичному размеру очертания пластинки.

Если изменяемость искомого напряженного состояния вдоль края будет велика, то и влияние погранслоя за счет членов, содержащих производные, увеличится до величины порядка

$$\varepsilon = O(h_*^{1-t}) \tag{6}$$

В работах Койтера — Джона предположение о плоскостном характере напряженного состояния представляет собой гипотезу типа Кирхгофа — Лява: оно отсеивает погранслой. Это значит, что их оценку погрешностей уравнений теории оболочек (3) можно рассматривать как оценку погрешности краевых задач теории оболочек, только приняв дополнительное предположение, что влияние погранслоев не выходит за рамки величин (3). Такое предположение не всегда подтверждается, как видно из сопоставления формул (3) и (6).

22. При формулировке задачи о расчете оболочки как краевой задачи теории упругости часто допускается весьма грубая схематизация условий работы края оболочки. Выведенные выше уточненные граничные условия (5) позволяют судить о последствиях, к которым это может повести. Для сравнения даны два варианта трехмерных граничных условий, соответствующих так называемой шарнирной опоре. Оба они в рамках классической теории изгиба пластинок приводят к одинаковым граничным условиям, но поправочные члены оказываются для них совершенно разными. Это значит, что при решении проблемы уточнения теории оболочек надо проявлять достаточную аккуратность и при формулировке граничных условий.

23. Вернувшись еще раз к сравнению асимптотического метода с методом разложения по толщине, отметим, что второй из этих методов обладает большей общностью, чем первый.

Метод разложения по толщине применим и в том случае, когда толщина оболочки не мала. Кроме того, относительно характера искомого напряженного состояния в этом методе не делается заранее никаких предположений. Асимптотический метод существенно опирается на малость толщины оболочки и в нем, в скрытом виде, содержатся некоторые предположения относительно характера искомого напряженного состояния. Они принимаются, когда делается выбор чисел a в разложениях (4). Преимущества общности очевидны. Они — на стороне методов разложения по толщине, которые, вероятно, и заслуживают предпочтения, например, в такой проблеме, как построение теории оболочек немалой толщины. Однако эта общность достигается ценой повышения сложности, и часто бывает выгодно располагать достаточно простыми возможностями, ограничивать по своему усмотрению класс рассматриваемых задач. В этом смысле преимущество — на стороне асимптотического метода.

Пример использования этого преимущества был уже дан выше: надлежащим выбором a в разложениях (4) удается отделить внутреннее напряженное состояние от погранслоя.

24. Всякая строго построенная двухмерная теория тонких оболочек эквивалентна формулировке некоторых свойств решений трехмерных краевых задач теории упругости, поставленных для узких областей. Трудно надеяться, что такие свойства могут быть сформулированы достаточно просто, если в постановку этого вопроса не внесены некоторые ограничения. Поэтому можно ожидать, что достаточно простая двухмерная теория должна быть специализированной теорией, т. е. теорией, предназначенной только для решения определенного класса задач. Как будет показано ниже, асимптотический метод предоставляет для этого хорошие возможности.

25. Остановимся подробнее на теории внутреннего напряженного состояния, исходя из асимптотического метода и имея в виду уточнить взаимосвязь этой теории с классической теорией.

Один из возможных вариантов выбора показателей в формулах (4) заключается в том, что эти равенства в развернутом виде записываются так:

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_\alpha,\ \tau_{\alpha\beta},\ \sigma_\beta) = h_*^{-1}\sum h_*^{s/q}\,(\sigma_\alpha^{(s)},\ \tau_{\alpha\beta}^{(s)},\ \sigma_\beta^{(s)})\\
&(\tau_{\alpha\gamma},\ \tau_{\beta\gamma}) = h_*^{-t}\sum h_*^{s/q}\,(\tau_{\alpha\gamma}^{(s)},\ \tau_{\beta\gamma}^{(s)}), \qquad \sigma_\gamma = h_*^{c}\sum h_*^{s/q}\,\sigma_\gamma^{(s)}\\
&(u_\alpha,\ u_\beta) = h_*^{-1+t}\sum h_*^{s/q}\,(u_\alpha^{(s)},\ u_\beta^{(s)}), \qquad u_\gamma = h_*^{-1-c}\sum h_*^{s/q}\,u_\gamma^{(s)}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $c = 0$ при $t \leqslant 1/2$ и $c = 1 - 2t$ при $1/2 \leqslant t < 1$, число q — определяется из равенства $t = p/q$, в котором p и q — целые числа.

Выбором разложений (4) в виде (7) устанавливается некоторое ограничение класса рассматриваемых задач, так как формулы (7) предопределяют асимптотику искомых напряжений. В частности, асимптотика (7) не соответствует погранслою, и теорию, вытекающую из (7), следует рассматривать как теорию внутреннего напряженного состояния. Более того, ее надо считать специализированной теорией внутреннего напряженного состояния, так как класс внутренних напряженных состояний, согласующихся с формулами (7), хотя и весьма широк (подробнее об этом см. в работе [44]), но всех возможных случаев он не охватывает.

При помощи формул (7) двухмерные уравнения теории оболочек строятся следующим образом. Фиксируется число членов, сохраняемых в разложениях (7). Полученные формулы вносятся в трехмерные уравнения теории упругости и применяется обычная процедура приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях h_*. Это приводит к системам приближенных уравнений. В них легко выполнить интегрирование по поперечной координате и, исключив ее, перейти к двухмерным уравнениям. Далее, использовав такие понятия, как усилия, моменты, перемещения срединной поверхности и т. д., можно установить, что полученные уравнения эквивалентны тем или иным системам уравнений теории оболочек. Если в (7) сохранено мало членов, то получатся уравнения приближенных теорий (таких как безмоментная теория, теория приближенных состояний с большой измененностью и т. д.). Увеличению числа членов в разложениях (7) будет соответствовать переход к тем или иным вариантам уравнений полной теории оболочек. Эти варианты будут усложняться с увеличением числа членов в (7), и в некоторый момент произойдет качественное изменение теории (повышение порядка уравнений, необходимости введения новых понятий и т. д.).

Итак, каждому фиксированному числу членов, сохраняемых в разложениях (7), соответствует некоторая двухмерная теория оболочек, обладающая двумя важными свойствами.

а) Оценка ее формальной асимптотической точности получается сразу из рассмотрения порядка слагаемых, отброшенных в (7).

б) Такая теория оболочек может рассматриваться как исходное приближение некоторого итерационного процесса, позволяющего получить любую формальную асимптотическую точность.

26. Среди всех вариантов классической теории, получаемых способом, описанным в предыдущем пункте, естественно выделить асимптотически оптимальный вариант, под которым подразумевается такой вариант, который, с одной стороны, не выходит за рамки привычных понятий классической теории, а с другой стороны, соответствует удержанию в (7) наибольшего числа членов.

Такой вариант классической теории построен в [44].

Соответствующая система уравнений состоит из обычных чисто статических и чисто геометрических уравнений и из соотношений упругости, имеющих вид

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) - \frac{\nu h}{1-\nu} m, \qquad S_1 = \frac{Eh}{1+\nu}\omega$$

$$G_1 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[\varkappa_1 + \nu\varkappa_2 - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\varepsilon_1 - \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\right] - \frac{h^2\nu}{3(1-\nu)} Q_\gamma$$

$$H_1 = \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\left(\tau - \frac{\omega}{2R_1}\right) \tag{8}$$

(аналогично для величин с индексом 2).

Здесь Q_γ, m — интенсивность нормальной нагрузки и нормального сжатия.

Формальная асимптотическая погрешность теории (8) определяется формулой

$$\varepsilon = O(h_*^{2-2t}) \tag{9}$$

которая, конечно, относится только к погрешностям уравнений. Для оценки погрешности граничных условий надо располагать формулами вида (5), которые пока построены только для пластинки.

27. Оценочные формулы (9) и (3) формально согласуются между собой, но первая из них содержит больше информации.

Рассмотрим, например, оболочку положительной кривизны, загруженную и закрепленную таким образом, что в ней основное напряженное состояние имеет нулевую изменяемость. Для такой оболочки внутреннее напряженное состояние составляется из основного напряженного состояния, для которого по предположению $t = 0$, и из простого краевого эффекта, для которого всегда $t = {}^1/_2$. Поэтому формула (3) в данном случае даст

$$\varepsilon = O(h^1{}_*)$$

в то время как по формуле (9) получается для основного напряженного состояния

$$\varepsilon = O(h_*{}^{2-2t})$$

для простого краевого эффекта

$$\varepsilon = O(h^1{}_*)$$

Формально результаты совпадают, так как погрешность в целом равна наибольшей из возможных погрешностей. Однако для суждения о работе конструкции более важным является основное напряженное состояние и не следует пренебрегать возможностью добиться для него повышенной точности. Надо помнить, кроме того, что здесь идет речь о теории внутреннего напряженного состояния, в котором уже отброшены краевые напряжения, соответствующие погранслою. Было бы логически непоследовательно ставить в один ряд с основным напряженным состоянием другие краевые напряжения, соответствующие простому краевому эффекту (см. замечание в п. 10).

Приложение. В заключение поясним более подробнее, в чем заключается связь погранслоя с формулировкой граничных условий в теории внутреннего напряженного состояния. Для упрощения изложения используются некоторые предположения. Все они находят полное подтверждение при исследовании асимптотическими методами.

Пусть трехмерная среда, образующая оболочку, отнесена к триортогональной системе координат (α, β, γ), в которой α, β — параметры линий кривизны на срединной поверхности, A^2, B^2 — коэффициенты первой квадратичной формы, R_1, R_2 — главные радиусы кривизны. Введем несимметричные компоненты тензора напряжений, определив их равенствами (штрихами отмечены обычные компоненты напряжений)

$$\begin{gathered}\sigma_\alpha = \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)\sigma_\alpha', \quad \tau_{\alpha\beta} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)\tau_{\alpha\beta}', \quad \tau_{\alpha\gamma} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)\tau_{\alpha\gamma}' \\ \tau_{\beta\alpha} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)\tau_{\beta\alpha}', \quad \sigma_\beta = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)\sigma_\beta', \quad \tau_{\beta\gamma} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)\tau_{\beta\gamma}' \\ \sigma_\gamma = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)\sigma_\gamma'\end{gathered} \tag{10}$$

Будем считать, что координатная поверхность $\alpha = \alpha_0$ представляет собой свободный край оболочки. На нем граничные условия можно записать так.

$$\sigma_\alpha + S_\alpha = 0, \ \tau_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta} = 0, \ \tau_{\alpha\gamma} + T_{\alpha\gamma} = 0 \tag{11}$$

Здесь σ_α, $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\gamma}$ — несимметричные компоненты напряжений внутреннего напряженного состояния, а S_α, $T_{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\gamma}$ — несимметричные компоненты напряжений погранслоя, которые также определяются по формулам вида (10).

Задача, о которой говорилось в п.17, заключается в том, чтобы передать на погран слой часть краевых напряжений, не нарушив при этом его свойства затухания.

Выпишем уравнения теории упругости для напряжений и перемещений погранслоя. Им можно придать вид

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial \rho} + \frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial \gamma} + X = 0, \qquad \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \rho} + \frac{\partial T_{\beta\gamma}}{\partial \gamma} + Y = 0$$

$$\frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial \rho} + \frac{\partial S_\gamma}{\partial \gamma} + Z = 0$$

$$E\frac{\partial V_\alpha}{\partial\rho} = S_\alpha - \nu(S_\beta + S_\gamma) + s_\alpha, \qquad 0 = S_\beta - \nu(S_\alpha + S_\gamma) + s_\beta \tag{12}$$

$$E\frac{\partial U_\gamma}{\partial\gamma} = S_\gamma - \nu(S_\alpha + S_\beta)$$

$$E\frac{\partial V_\beta}{\partial\rho} = 2(1+\nu)T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}, \qquad E\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial\gamma} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial\rho}\right) = 2(1+\nu)T_{\alpha\gamma} + t_{\alpha\gamma}$$

$$E\frac{\partial V_\beta}{\partial\gamma} = 2(1+\nu)T_{\beta\gamma} + t_{\beta\gamma}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$$

Здесь приняты следующие обозначения: S_α, $T_{\alpha\beta}$, S_β, $T_{\alpha\gamma}$, $T_{\beta\gamma}$, S_γ — не симметричные компоненты напряжений, V_α, V_β, V_γ — перемещения под X, Y, Z,подразумеваются следующие выражения:

$$X = k_\beta(S_\alpha - S_\beta) + k_\alpha(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}) + \frac{\partial T\beta\alpha}{\partial\mu} + \gamma/R_1\frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial\gamma} + \frac{2}{R_1}T_{\alpha\gamma}$$

$$Y = k_\alpha(S_\beta - S_\alpha) + k_\beta(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}) + \frac{\partial S_\beta}{\partial\mu} + \gamma/R_2\frac{T_{\beta\gamma}}{\partial\beta_\mu} + \frac{2}{R_2}T_{\beta\gamma} \tag{13}$$

$$Z = k_\beta T_{\alpha\gamma} + k_\alpha T_{\beta\gamma} - \frac{S_\alpha}{R_1} - \frac{S_\beta}{R_2} + \frac{\partial T_{\beta\gamma}}{\partial\mu}$$

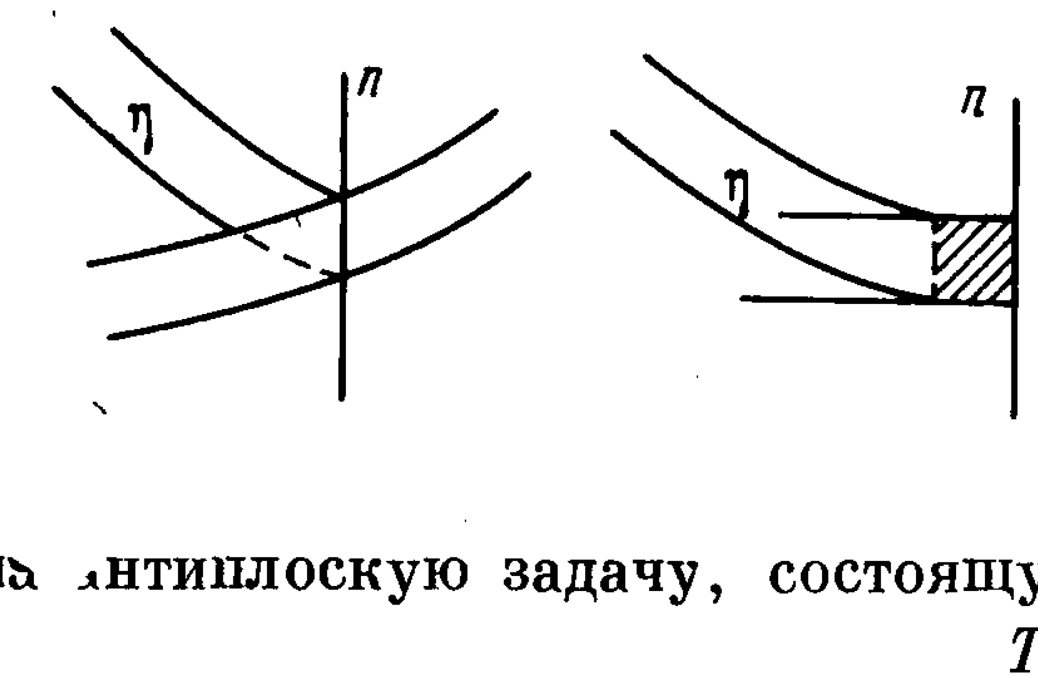
$$\frac{\partial}{\partial\mu} = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}, \qquad k_\alpha = \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}, \qquad k_\beta = \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}$$

s_α, s_β, $t_{\alpha\beta}$, $t_{\alpha\gamma}$, $t_{\beta\gamma}$ — некоторые выражения, которые не понадобятся в дальнейшем.

Погранслой должен быстро затухать. Поэтому искомые величины в (12) должны быстро меняться по α, γ, а это значит, что главными в (12) будут те члены, которые выписаны явно.

Сказанное легко проверить, просмотрев выражения (13). В них входят либо выражения, не дифференцирующиеся по α, γ, либо члены, содержащие малые множители γ/R_1, γ/R_2; также можно убедиться и в том, что роль s_α, s_β, $t_{\alpha\beta}$, $t_{\alpha\gamma}$, $t_{\beta\gamma}$ второстепенна.

Отбросив в (12) все не выписанные явно слагаемые, получим уравнения, совпадающие по форме с уравнениями теории упругости для тела, отнесенного к декартовым координатам ρ, γ, μ, напряжения и перемещения которого не зависят от координаты μ. Задача о построении такого напряженно-деформированного состояния разбивается на плоскую задачу, состоящую в определении величин



$$S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, T_{\alpha\gamma}, V_{\alpha\gamma}, V \tag{14}$$

удовлетворяющих первому, третьему, четвертому, пятому, шестому и восьмому уравнениям (12), и на антиплоскую задачу, состоящую в определении величин

$$T_{\alpha\beta}, T_{\beta\gamma}, V_\beta \tag{15}$$

удовлетворяющих второму, седьмому и девятому уравнениям (12).

Физическая интерпретация этого результата описана в п. 13. Уравнения (12) после отбрасывания второстепенных членов превращаются в уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние распрямленной полосы η (фигура). Лицевые стороны $\gamma = \pm h$ этой полосы свободны от нагрузок, так как поверхностные силы учитываются в теории внутреннего напряженного состояния. На бесконечности напряжения также отсутствуют (так как напряжения должны затухать по предположению). Учитывая это, можно составить условия уравновешенности в целом полуполосы $\rho_0 \leqslant \rho < < -\infty$, $-h \leqslant \gamma \leqslant +h$ (ρ_0 соответствует $\alpha = \alpha_0$), рассматривая X, Y, Z, как компоненты массовых сил, получим шесть следующих равенств

$$\int_{-h}^{+h} S_\alpha \big|_{\rho=\rho_0} d\gamma + \int_{-h}^{+h} d\gamma \int_{-\infty}^{\rho_0} X d\rho = 0, \qquad \int_{-h}^{+h} T_{\alpha\beta} \big|_{\rho=\rho_0} d\gamma + \int_{-h}^{+h} d\gamma \int_{-\infty}^{\rho_0} Y d\rho = 0$$

$$\int_{-h}^{+h} T_{\alpha\gamma} \big|_{\rho=\rho_0} d\gamma + \int_{-h}^{+h} d\gamma \int_{-\infty}^{\rho_0} Z d\rho = 0, \qquad \int_{-h}^{+h} S_\alpha \big|_{\rho=\rho_0} \gamma d\gamma + \int_{-h}^{+h} d\gamma \int_{-\infty}^{\rho_0} [X\gamma - Z\rho] d\rho = 0 \tag{16}$$

$$\int_{-h}^{+h} T_{\alpha\beta} \big|_{\rho=\rho_0} \gamma d\gamma - \int_{-h}^{+h} d\gamma \int_{-\infty}^{\rho_0} T_{\beta\gamma}\, d\rho + \int_{-h}^{+h} \gamma d\gamma \int_{-\infty}^{\rho_0} Y\, d\rho = 0$$

$$\int_{-h}^{+h} d\gamma \int_{-\infty}^{\rho_0} T_{\alpha\beta} d\rho - \int_{-h}^{+h} d\gamma \int_{-\infty}^{\rho_0} Y\rho d\rho = 0$$

которые представляют собой необходимые и (как можно надеяться) достаточные условия существования затухающего погранслоя.

В (16) контурные значения S_α, $T_{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\gamma}$ можно заменить контурными значениями σ_α, $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\gamma}$. Тогда получатся соотношения, из которых и должна вытекать естественная формулировка граничных условий теории внутреннего напряженного состояния. Это будут условия, при выполнении которых внутреннее напряженное состояние оправдывает свое название, т. е. правильно отражает упругие явления, происходящие вдали от краев.

Равенства (16) зависят от величин, связанных с погранслоем, и, чтобы расшифровать их, как граничные условия теории внутреннего напряженного состояния, надо принимать те или иные предположения о характере решения задачи о погранслое. Простейшее из них состоит в предположении о возможности в равенствах (16) положить всюду X, Y, Z равными нулю.

Тогда, после замены в первых четырех равенствах (16) граничных значений S_α, $T_{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\gamma}$ на граничные значения σ_α, $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\gamma}$ с помощью (11), получим

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_\alpha \big|_{\rho=\rho_0} d\gamma = \int_{-h}^{+h} \tau_{\alpha\beta} \big|_{\rho=\rho_0} d\gamma = \int_{-h}^{+h} \tau_{\alpha\gamma} \big|_{\rho=\rho_0} d\gamma = \int_{-h}^{+h} \sigma_\alpha \big|_{\rho=\rho_0} \gamma d\gamma = 0 \tag{17}$$

Эти четыре равенства и представляют собой простейший вариант граничных условий теории внутреннего напряженного состояния (для свободного края). Они обозначают требование обращения в нуль на краю всех трех усилий и изгибающего момента. Крутящий момент, как видно из пятого равенства (16), в нуль обращаться не должен, так как он в рамках принятого предположения воспринимается внутренними напряжениями погранслоя.

Простейшего уточнения граничных равенств (17) можно достичь, заменив принятое выше предположение двумя другими:

(*a*) в пятом и шестом равенствах (16) можно отбросить члены с X, Y;

(*b*) для первых четырех равенств (16) в формулах (13) для X, Y, Z можно сохранить только величины (15), относящиеся к антиплоской задаче и отбросить все величины (14), относящиеся к плоской задаче.

В силу предположения (*b*) из формул (13) получим

$$Z = \frac{\partial T_{\beta\gamma}}{\partial\mu} + k_\alpha T_{\beta\gamma} = \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}(AT_{\beta\gamma})$$

Внесем этот результат в третье равенство (16), заменим в нем $T_{\alpha\gamma}$ на $\tau_{\alpha\gamma}$ и посмотрим, что теперь даст это условие.

Имеем

$$-\int_{-h}^{+h}\tau_{\alpha\gamma}d\gamma+\int_{-h}^{+h}d\gamma\int_{-\infty}^{\rho_0}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}(AT_{\beta\gamma})\,d\rho=0$$

Заметив, что $d\rho = Ad\alpha$ и что $T_{\beta\gamma}$ быстро затухает по переменной ρ, и заменив на этом основании B на его контурное значение B_0, получим

$$\int_{-h}^{+h}d\gamma\int_{-\infty}^{\rho_0}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}(AT_{\beta\gamma})\,d\rho=\frac{1}{B_0}\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\int_{-h}^{+h}d\gamma\int_{-\infty}^{\rho_0}T_{\beta\gamma}d\rho\right\}$$

Вместе с тем из пятого равенства (16), учтя предположение (a), можно интеграл, заключенный в фигурные скобки, выразить сначала через контурное значение $T_{\alpha\beta}$, а затем и через контурное значение $\tau_{\alpha\beta}$. Отсюда и получается хорошо известное условие

$$N_1+\frac{1}{B}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}=0$$

как результат простейшего уточнения одного из четырех граничных условий (17). Пятое равенство (16) здесь также не выступает в качестве самостоятельного условия, а используется лишь для упрощения полученных результатов.

Приведенные выше граничные условия теории изгиба пластинки (5) являются результатом дальнейшего уточнения вышеописанных рассуждений.

Поступила 10 IV 1968

Институт проблем механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Кильчевский Н. А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двухмерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек. В сб.: Теория пластин и оболочек. Тр. 2-ой Всесоюз. конференц., Киев, Изд-во АН УССР, 1962, стр. 58—69.
2. Айнола Л. Я. и Нигул У. К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек. Изв. Акад. наук Эст. ССР, 1965, № 1.
3. Ворович И. И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек. Механика твердого тела. Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теоретич. и прикл. механ., вып. 3. М., «Наука», 1966.
4. Ворович И. И. Общие проблемы теории пластин и оболочек. Тр. 6-ой Всесоюз. конференц. по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1966.
5. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. J. Math and Phys., 1944, vol. 23, p. 184—191.
6. Naghdi P. M. On the theory of thin elastic shells. Quart. Appl. Math., 1957, vol. 14, No. 4.
7. Власов Б. Ф. Об уравнениях теории изгиба пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 12.
8. Амбарцумян С. А. К теории изгиба анизотропных пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 5.
9. Айнола Л. Я. Об уточненных теориях пластинок типа Рейсснера. В сб.: Теория оболочек и пластин. Тр. 4-ой Всесоюз. конференц. по теории оболочек и пластин. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1964.
10. Koiter W. T. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells, Proc. Symp. on the Theory of thin Shells, 1959, Amsterdam North—Holland Publishing CO (1960).
11. Koiter W. T. On the nonlinear theory of thin elastic shells. Proc. Koninkl, Neder. Akad. von Wetenschappen, 1966, Bd. 69, No. 1.
12. John F. Estimates for the derivatives of the stress in a thin shells and interior shell equations, Comm. Pure and Appl. Math., 1965, vol. 18, No. 12.
13. Новожилов В. В., Финкельштейн Р. О. О погрешности гипотез Кирхгоффа в теории оболочек. ПММ, 1943, т. 7, вып. 5.
14. Cauchy A. L. Exercices de Math. т. 3. Paris, 1828, p. 328—355.
15. Poisson S. D. Memoire sur l'Equilibre et le Mouvement des Corps Elastiques. Memoires de l'Academie des Sciences, Ser. 2, 1829, т. 8, p. 357—570.
16. Krauss F. Über die Gerundgleichungen der Elastitätstheorie, Schwachdeformierten Schalen, Math. Ann., 1929, Bd. 101, No. 1.

17. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек, ПММ, 1939, т. 2, вып. 4.
18. Муштари Х. М., Терегулов И. Г. К теории оболочек средней толщины. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 6.
19. Нигул У. К. Линейные уравнения динамики упругой круговой цилиндрической оболочки, свободные от гипотез. Тр. Таллинского политехн. ин-та, 1960, № 176.
20. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
21. Векуа Н. И. Об одном методе расчета призматических оболочек. Тр. Тбилисского матем. ин-та, 1955, т. 21.
22. Cicala P. Consistent approximations in shell theory. J. Engin. Mech. Div. Proc. Amer, Soc. Civil Engis, 1962, vol. 88, No. 4, pt. 1.
23. Понятовский В. В. К теории пластин средней толщины. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
24. Понятовский В. В. К теории изгиба анизотропных пластинок. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
25. Friedrichs K. O. Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates. Proc. Symp. Appl. Math. 3. Amer. Math. Soc., N. Y., 1950.
26. Johnson M. W. and Reissner E. On the foundations of the theory of thin elastic shells. J. Math. Phys., 1959, vol. 37, No. 4.
27. Reiss E. L. A theory for the small ratationaly symmetric deformation of cylindrical shells. Comm. Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13, No. 3.
28. Friedrichs K. O., Dressler R. F. A boundary—layer theory for elastic plates. Comm. Pure and Appl. Math., 1961, vol. 14, No. 1.
29. Reiss E. L. On the theory of cylindrical shells, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1962, vol. 15, No. 3.
30. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
31. Green A. E. On the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soci., A, 1962, vol. 266, No. 1325.
32. Green A. E. Boundary layer equations in the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc. A, 1962, vol. 269, No. 1339.
33. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
34. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
35. Reissner E. On the derivation of the theory of elastic shells. J. Math and Phys., 1963, vol. 42, No. 4.
36. Базаренко Н. А., Ворович И. И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
37. Виленская Т. В., Ворович И. И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
38. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М. Гостехиздат, 1953.
39. Гольденвейзер А. Л. Некоторые математические проблемы линейной теории упругих тонких оболочек. Усп. матем. наук, 1960, т. 15, вып. 5 (95).
40. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. наук, 1957, т. 12, № 5 (77).
41. Колос А. В. Об области применения приближенных теорий изгиба пластин типа теории Рейсснера. Тр. 6-ой Всесоюз. конференц. по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1966.
42. Green A. E., Laws N. Further remarks on the boundary conditions for thin elastic shells. Proc. Roy. Soc., A, 1966, vol. 289, No. 1417.
43. Колос А. В. Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
44. Гольденвейзер А. Л. О двухмерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек. Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1968.