АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. М. Александров

(Ростов-на-Дону)

Примерно в тридцатых годах потребности практики привели к необходимости изучения ряда контактных задач теории упругости, значительно отличающихся по своей постановке от классических задач Буссинеска, Герца, Садовского. Первые исследования такого рода задач, именно контактных задач для упругой полосы, слоя и цилиндра, выполнены в работах [1–5]. Однако бурное развитие этой проблемы, которую условимся называть «проблемой неклассических контактных задач», наблюдается лишь с начала 60-х годов, когда появились соответствующие математические возможности для эффективного решения сложных смешанных задач математической физики.

Опыт последнего времени убедительно показал, что наиболее эффективным аппаратом для получения практически приемлемых приближенных решений неклассических контактных задач, являются асимптотические методы. Первыми работами в этом направлении были [6,7].

В большинстве случаев неклассические контактные задачи теории упругости приводятся к исследованию специальных типов интегральных уравнений первого рода с симметричными нерегулярными ядрами сложной структуры. Поэтому ниже речь пойдет об эффективных асимптотических методах решения таких интегральных уравнений.

Важным достоинством указанных методов является то, что они могут быть использованы как при решении плоских, так и пространственных (осесимметричных и неосесимметричных) контактных задач. С учетом этого ниже будет достаточно подробно изложена суть разработанных асимптотических методов на примере плоских контактных задач, и лишь упомянуто о применении этих методов к пространственным задачам.

Следует отметить, что изложенные здесь асимптотические методы могут быть с успехом использованы при решении не только контактных задач теории упругости, а и целого ряда смешанных задач математической физики, в частности многих смешанных задач гидроаэромеханики.

§ 1. Общие свойства ядра и решения основного интегрального уравнения плоских неклассических контактных задач. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x), \qquad |x| \leqslant 1 \tag{1.1}$$

где λ — некоторый характерный для той или иной контактной задачи безразмерный параметр, причем $\lambda \in (0, \infty)$. Ядро интегрального уравнения имеет вид

$$K(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos ut \, du \tag{1.2}$$

где в плоскости комплексного переменного $z = u + iv$ функция $L(z)z^{-1}$ будет четной и мероморфной (отношение двух квазиполиномов одинакового порядка), при $v = 0$ — действительной и регулярной, $\lim L(z)z^{-1} = A > 0$ при $z \to 0$. Как известно, такая функция может быть представлена в виде

$$\frac{L(z)}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(z^2 + \delta_n^2)}{(z^2 + \gamma_n^2)}, \qquad \delta_n = -iz_n, \qquad \gamma_n = -i\zeta_n \tag{1.3}$$

Здесь z_n и ζ_n — нули и полюса, лежащие в полуплоскости $v > 0$. Будем еще предполагать, что на действительной оси при $|u| \to \infty$ имеет место оценка

$$\frac{L(u)}{u} = \frac{1}{|u|} [1 + O(e^{-\nu |u|})], \qquad \nu > 0 \tag{1.4}$$

Ядро $K(t)$ вида (1.2) с описанной функцией $L(u)u^{-1}$ будем называть «главным вариантом». К интегральному уравнению (1.1) с таким ядром сводится ряд смешанных задач для упругой полосы и упругого клина [8,9]. Для главного варианта излагаемая ниже теория носит наиболее полный и законченный характер. В других случаях контактных задач, когда некоторые из перечисленных свойств функции $L(u)u^{-1}$ не выполнены, излагаемые ниже результаты либо остаются в силе, либо, как правило, могут быть соответствующим образом видоизменены. Более подробно об этом пойдет речь в § 6.

На основании свойства (1.4) ядро $K(t)$ при всех $0 \leqslant |t| < \infty$ может быть представлено в виде [8]

$$K(t) = -\ln|t| + F(t), \qquad F(t) = \int_0^\infty \frac{[L(u)-1]\cos ut + e^{-u}}{u}\,du \tag{1.5}$$

причем функция $F(t)$ на указанном участке изменения t непрерывна со всеми своими производными.

Будем предполагать, что функция $f(x)$, входящая в правую часть уравнения (1.1), принадлежит классу H_1^α $(-1,1)$ (см. например [8]), тогда на основании (1.5) можно представить интегральное уравнение (1.1) в виде эквивалентного ему в $L(-1,1)$ при $\lambda > 0$ интегрального уравнения второго рода [8]

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \frac{1}{\pi^2\lambda\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - x}\,d\tau \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\,F'\left(\frac{\tau-\xi}{\lambda}\right) d\xi$$

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left[P - \int_{-1}^{1} \frac{f'(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - x}\,d\tau\right] \tag{1.6}$$

при дополнительном условии

$$P = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\ln 2\lambda}\left[\int_{-1}^{1} \frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\,F\left(\frac{\tau-\xi}{\lambda}\right) d\xi\right] \tag{1.7}$$

Базируясь на (1.6), можно доказать следующие две теоремы

Теорема 1.1. Если решение интегрального уравнения (1.1) в классе $L(-1,1)$ существует, при всех $\lambda > 0$, то оно имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \omega(x)(1-x^2)^{-1/2} \tag{1.8}$$

причем функция $\omega(x)$ непрерывна со всеми производными при $x \in [-1,1]$.

Чтобы сформулировать вторую теорему, введем в рассмотрение норму в пространстве функций H_n^α $(-\beta,\beta)$ следующим соотношением:

$$\|f(x)\| = \sum_{m=0}^{n} \max|f^{(m)}(x)| + \sup\frac{|f^{(m)}(t) - f^{(m)}(x)|}{|t-x|^\alpha}, \qquad (x,\ t) \in [-\beta,\ \beta] \tag{1.9}$$

Теорема 1.2 Если решения интегральных уравнений (1.1) и

$$\int_{-1}^{1} \varphi_*(\xi)\,K_*\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x), \qquad |x| \leqslant 1 \tag{1.10}$$

в классе функций $L(-1,1)$ существуют и единственны при $\lambda > \lambda_0$, причем

$$\|F(t) - F_*(t)\|_{H_n^\alpha(-2/\lambda,\ 2/\lambda)} \leqslant \varepsilon \tag{1.11}$$

то справедлива оценка

$$\|\varphi(x) - \varphi_*(x)\|\ C_{n-1(-1,1)} \leqslant \lambda_0^{-1} D\varepsilon(1-x^2)^{-1/2}, \quad D = \text{const} \tag{1.12}$$

В свете теоремы 1.2 представляет интерес еще следующая лемма.

Лемма 1.1 Если $K_*(t)$ имеет вид (1.2) и

$$|L(u)u^{-1} - L^*(u)u^{-1}| < \delta(u^2 + C^2)^{-3/2} \quad \begin{pmatrix}\delta,\ C\text{-const}\\ |u| \in [0, \infty]\end{pmatrix} \tag{1.13}$$

то справедливо соотношение (1.11) при $n = 1$.

Теоремы 1.1, 1.2 и лемма 1.1 открывают широкие возможности для приближенного решения интегрального уравнения (1.1)

Дальше для простоты изложения материала ограничимся рассмотрением случая $f(x) \equiv 1$, тем более, что по известному решению при $f(x) \equiv 1$ может быть найдено решение интегрального уравнения (1.1) и для общего случая [10].

§ 2. Асимптотическое решение интегрального уравнения (1.1) при больших значениях параметра λ. Заметим, что при больших λ переменная $t = (\xi - x)/\lambda \leqslant 2/\lambda$ мала, и представим $F(t)$ в форме следующего ряда [8]:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n} \tag{2.1}$$

где коэффициенты a_n имеют вид

$$a_0 = \int_0^{\infty} \frac{L(u) - 1 + e^{-u}}{u}\,du, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^{\infty}[L(u) - 1]\,u^{2n-1}\,du \tag{2.2}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

На основании (1.4) не представляет труда показать, что при больших n имеет место для a_n следующая оценка:

$$|a_n| = O(\nu^{-2n}) \tag{2.3}$$

Отсюда следует, что ряд (2.1) абсолютно сходится при $\lambda > 2/\nu$. Эта оценка устанавливает теоретические границы использования приближенных решений уравнения (1.1), которые могут быть получены на базе разложения (2.1).

Будем теперь искать решение интегрального уравнения (1.1) в виде [8]

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\,\lambda^{-2n} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.1) и (2.4) в уравнение (1.6) и приравнивая члены правой и левой частей при одинаковых степенях λ, получим

$$\varphi_0(x) = \frac{P}{\pi}(1 - x^2)^{-1/2}, \qquad \varphi_1(x) = \frac{2a_1}{\pi^2\sqrt{1 - x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1 - \tau^2}}{\tau - x}\,d\tau\int_{-1}^{1}\varphi_0(\xi)(\tau - \xi)\,d\xi$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{1 - x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1 - \tau^2}}{\tau - x}\,d\tau\int_{-1}^{1}[\varphi_0(\xi)\,4a_2(\tau - \xi)^3 + \varphi_1(\xi)\,2a_1(\tau - \xi)]\,d\xi \quad \text{и т. д.} \tag{2.5}$$

Из формул (2.5) последовательное определение $\varphi_n(x)$ не вызывает затруднений, после чего из соотношения (1.7) может быть найдена величина P. Ограничиваясь членами порядка λ^{-4}, получим [8]

$$\varphi(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{1 - x^2}}\left[1 + \frac{2a_1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{2} - x^2\right) + \frac{4a_2}{\lambda^4}\left(\frac{7}{8} - x^2 - x^4\right) + O(\lambda^{-6})\right]$$

$$P = \pi\left[\ln 2\lambda + a_0 + \frac{a_1}{\lambda^2} - \frac{a_1^2}{4\lambda^4} + \frac{9a_2}{4\lambda^4} + O(\lambda^{-6})\right]^{-1} \tag{2.6}$$

Формулы (2.6), как правило, дают достаточную для практики точность при $\lambda \geqslant 4/\nu$.

Изложенный метод разработан и использован для решения ряда конкретных плоских смешанных задач теории упругости в работах [8, 11–19].

§ 3. Первый метод сведения интегрального уравнения (1.1) к бесконечной алгебраической системе. Представим функцию $F(t)$ вида (1.5) в форме следующего двойного ряда по полиномам Чебышева [20]:

$$F\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(\lambda) T_i(\xi) T_j(x) \tag{3.1}$$

Функцию $\omega(x)$, входящую в соотношение (1.8), также разложим в ряд по полиномам Чебышева

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i T_{2i}(x) \tag{3.2}$$

В силу указанных выше свойств функций $F(t)$ и $\omega(x)$ ряды (3.1) и (3.2) сходятся равномерно, соответственно, к $F(t)$ по совокупности переменных $(\xi, x) \in [-1,1]$ и при любых значениях параметра $\lambda > 0$, к $\omega(x)$ при всех $x \in [-1,1]$.

Подставляя теперь (1.5), (3.1), (1.8) и (3.2) в интегральное уравнение (1.1), после ряда преобразований получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов S_i ряда (3.2):

$$x_i = R_i + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

при дополнительном условии

$$P\pi^{-1}(\ln 2\lambda + c_{00}) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_{0j} x_j \tag{3.4}$$

Здесь

$$x_i = S_i(2i)^{-1}, \quad a_{ij} = -jc_{2i,2j}, \quad R_i = -Pc_{2i,0}\pi^{-1} \tag{3.5}$$

После решения бесконечной системы (3.3) условие (3.4) служит для определения величины P.

Коэффициенты a_{ij} бесконечной системы (3.3) можно на основании второй формулы (1.5) и (3.1), (3.5) представить в виде

$$\begin{gathered} a_{ij} = (-1)^{i+j+1} j\beta_{ij} \int_0^{\infty} \frac{[L(u) - 1]}{u} J_{2i}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{2j}\left(\frac{u}{\lambda}\right) du \qquad (i + j > 0) \\ \beta_{00} = 1, \qquad \beta_{i0} = \beta_{0j} = 2, \qquad \beta_{ij} = 4 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Постоянная $c_{00}(\lambda)$ дается выражением

$$c_{00}(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{[L(u) - 1] J_0^2(u/\lambda) + e^{-u}}{u} du \tag{3.7}$$

При больших i, j и λ для коэффициентов a_{ij} на основании (1.4) может быть получена следующая оценка

$$a_{ij} = O\left[\frac{p^{2p+3/2}}{(4\lambda)^{2p} i^{2i+1/2} j^{2j-1/2}}\right], \quad p = i + j \tag{3.8}$$

При малых значениях λ, на основании того, что $L(u) \sim Au$ при $u \to 0$, для коэффициентов a_{ij} найдем

$$a_{ij} \sim 0 \text{ при } i \neq j, \; a_{ii} \sim 1 \tag{3.9}$$

Теперь можно доказать, что бесконечная система (3.3) при $\lambda > {}_{1/2\nu}$ квази вполне регулярна. При малых значениях λ она становится неустойчивой.

Таким образом, изложенный метод решения интегрального уравнения (1.1) сведением к бесконечной системе (3.3) будет эффективным лишь при достаточно больших значениях параметра λ.

Бесконечную систему удобно решать методом редукции, ибо урезанная система имеет почти треугольную матрицу. Конкретные примеры показывают, что предложенный метод решения действительно эффективен при достаточно больших λ, так как необходимая для практики точность в этом случае достигается уже при решении урезанной системы, состоящей из двух — четырех уравнений.

Изложенный метод разработан и использован для решения ряда конкретных плоских смешанных задач теории упругости в работах [20–23]. Однако зачатки его уже имеются в [2,5,8].

§ 4. Асимптотическое решение интегрального уравнения (1.1) при малых значениях параметра λ. Помимо свойств функции $L(z)\, z^{-1}$, указанных в начале § 1, будем далее предполагать, что на любой правильной [24] системе контуров C_k имеет место оценка

$$L(z)z^{-1} = O\,(z^{-1}) \qquad \text{при } k \to \infty \tag{4.1}$$

Используя (1.3), и (4.1), представим ядро $K(t)$ в виде суммы вычетов по полюсам ζ_n

$$K\,(t) = \sum_{m=1}^{\infty} s_m e^{i\zeta_m t}, \qquad s_m = \pi i \left\{\left[\frac{\zeta_m}{L\,(\zeta_m)}\right]'\right\}^{-1} \tag{4.2}$$

Отсюда видно, что при $|t| \to \infty$

$$K(t) \sim \exp\,(-\varkappa\,|t|), \quad Re \varkappa = \mathrm{Inf}\,(\mathrm{Re}\ \gamma_m) \tag{4.3}$$

Обычно оказывается, что $\varkappa = \gamma_1$.

Представим теперь интегральное уравнение (1.1) в виде эквивалентной ему системы трех интегральных уравнений (4.4)

$$\int_{-1}^{\infty} \omega\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi + \int_{-\infty}^{-1} \left[\omega\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) - v\,(\xi)\right] K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \qquad (-1 \leqslant x < \infty)$$

$$\int_{-\infty}^{1} \omega\,\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) K\,\frac{\xi-x}{\lambda}\, d\xi = \pi + \int_{-1}^{\infty} \left[\omega\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) - v\,(\xi)\right] K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \qquad (-\infty < x \leqslant 1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v\,(\xi)\, K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{4.5}$$

при условии

$$\varphi\,(\xi) = \omega\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) + \omega\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) - v\,(\xi), \qquad |\,\xi\,| \leqslant 1 \tag{4.6}$$

Решение уравнения (4.5) находится без труда и имеет вид

$$v(\xi) = (A\lambda)^{-1} \tag{4.7}$$

Интегральные уравнения (4.4), (4.5) заменами переменных приводятся к одному

$$\int_{0}^{\infty} \omega\,(\tau)\, K\,(\tau - t)\, d\tau = \frac{\pi}{\lambda} + \int_{2/\lambda}^{\infty} [\omega\,(\tau) - (A\lambda)^{-1}]\, K\,\left(\frac{2}{\lambda} - \tau - t\right) d\tau \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{4.8}$$

Асимптотическое при малых λ решение интегрального уравнения (4.8) может быть получено методом последовательных приближений. При этом на каждом этапе необходимо находить решение одного и того же интегрального уравнения Винера — Хопфа, но с различными правыми частями. Нулевое приближение находится из уравнения

$$\int_0^\infty \omega_0(\tau) K(\tau - t)\, d\tau = \frac{\pi}{\lambda} \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{4.9}$$

Получим решение $\psi(\tau)$ интегрального уравнения вида (4.9), но с более общей правой частью $\pi e^{-\mu t}$. Для этого, прежде всего, факторизуем [25] функцию $L(z)z^{-1}$

$$\frac{L(z)}{z} = K_+(z) K_-(z), \qquad K_+(z) = \prod_{n=1}^\infty \frac{(z + i\delta_n)}{(z + i\gamma_n)}, \qquad K_-(z) = \prod_{n=1}^\infty \frac{(z - i\delta_n)}{(z - i\gamma_n)} \tag{4.10}$$

Из (4.10) видно, что для существования полосы регулярности [25] комплексная постоянная μ должна удовлетворять неравенству $-$ Re $\mu < \tau_+ = \inf$ (Reγ_n, Re δ_n).

Основываясь на (4.1) и других свойствах $L(z)\, z^{-1}$, можно показать, что на любой правильной [24] системе контуров C_k имеет место оценка

$$K_+(z) = O(z^{-1/2}) \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{4.11}$$

Если еще предположить, что трансформанта Фурье $\Omega_+(z)$ функции $1/2(1 + \operatorname{sgn} t)\, \omega_0(t)$ стремится к нулю, когда $z \to \infty$, то, опуская традиционные выкладки, сопровождающие использование метода Винера — Хопфа [25], получим

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i K_-(-i\mu)} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\alpha t} d\alpha}{K_+(\alpha)(\alpha + i\mu)} = \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant t < \infty \\ \mu \neq \delta_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^{-\mu t}(-i\mu)}{L(-i\mu)} + \frac{1}{iK_-(-i\mu)} \sum_{m=1}^\infty \frac{e^{-\delta_m t}}{(\mu - \delta_m) K_+'(-i\delta_m)} \tag{4.12}$$

Заметим, что в силу (4.11) функция $\psi(t)$ при $t \to 0$ имеет, в полном соответствии с теоремой 1.1, особенность вида $t^{-1/2}$. В выражении (4.12) эта особенность разложена в ряд.

Из (4.12) следует, что при $\mu = \gamma_k$ и $t \to \infty$

$$\psi(t) \sim \exp(-\chi t), \quad \text{Re}\ \chi = \inf\ (\text{Re}\ \delta_n) \tag{4.13}$$

Обычно оказывается, что $\chi = \delta_1$.

Решая интегральное уравнение (4.8) методом последовательных приближений и оценивая на основании (4.3), (4.13) каждое приближение, получим, что решение интегрального уравнения (1.1) для главного варианта ядра $K(t)$ и $f(x) \equiv 1$ при малых λ представимо в форме

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \sum_{n=1}^\infty \left[\omega_n^*\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \omega_n^*\left(\frac{1-x}{\lambda}\right)\right] \exp\left(-\frac{2n\chi}{\lambda}\right) \tag{4.14}$$

где $\Phi(x)$ имеет вид

$$\Phi(x) = \omega_0\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \omega_0\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) - (A\lambda)^{-1} \tag{4.15}$$

Функция $\omega_0(t)$ — решение уравнения (4.9), а функции $\omega_n^*(t)$ последовательно определяются из уравнений

$$\int_0^\infty \omega_n^*(\tau) K(\tau - t)\, d\tau = e^{2\chi\lambda/\lambda} \int_{2/\lambda}^\infty \omega_{n-1}^*(\tau) K\left(\frac{2}{\lambda} - \tau - t\right) d\tau \tag{4.16}$$

$$\omega_0^*(\tau) = \omega_0(\tau) - (A\ \lambda)^{-1}, \quad 0 \leqslant t < \infty$$

при $t \to 0$ функции $\omega_n^*(t)$ имеют особенности вида $t^{-1/2}$, при $t \to \infty$ убывают как $\exp(-\chi t)$, а при $\lambda \to 0$ и фиксированном t ведут себя, как $O(1)$.

Для практики, как показывают конкретные примеры, в (4.14) вполне достаточно ограничиться первым членом $\Phi(x)$. Это, как правило, обеспечивает необходимую для практики точность при всех $\lambda \leqslant 4/\nu$.

Заметим, что иногда удобнее вместо $\Phi(x)$ использовать

$$\varphi_0^*(x) = A\lambda\omega_0\left(\frac{1+x}{\lambda}\right)\omega_0\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) \tag{4.17}$$

ибо разница между ними, как не трудно показать, имеет порядок $\exp(-2\chi/\lambda)$.

Изложенный метод дан в работе [20]. Главный член асимптотики решения $\Phi(x)$ или $\varphi_0^*(x)$) интегрального уравнения (1.1) при малых λ получен и использован для решения ряда конкретных плоских смешанных задач теории упругости в работах [18, 26–29]. Главный член «симметричной» асимптотики решения интегрального уравнения (1.1) при малых λ получен в [30, 31]. В ряде работ [14, 19, 32, 33] исследовались задачи, для которых функция $L(u)u^{-1}$ по своим свойствам отлична от главного варианта, описанного в § 1, несмотря на это также удалось построить главный член асимптотики их решений при малых λ.

§ 5. Второй метод сведения интегрального уравнения (1.1) к бесконечной алгебраической системе. Подставляя $K(t)$ в форме (4.2) в интегральное уравнение (4.8), представим его в виде

$$\int_0^\infty \omega(\tau)K(\tau-t)\,d\tau = \frac{\pi}{\lambda}\left(1+\sum_{m=1}^\infty s_m C_m e^{-t\gamma_m}\right) \tag{5.1}$$

$$C_m = \frac{\lambda e^{2\gamma_m/\lambda}}{\pi}\int_{2/\lambda}^\infty \left[\omega(\tau)-(A\lambda)^{-1}\right]e^{-\tau\gamma_m}\,d\tau \tag{5.2}$$

Обращая правую часть (5.1), на основании (4.12) получим

$$\omega(t) = \frac{1}{A\lambda}+\frac{1}{i\lambda}\sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-\delta_k t}}{K'_+(-i\delta_k)}\left[-\frac{1}{K_-(0)\delta_k}+\sum_{n=1}^\infty \frac{s_n C_n}{K_-(-i\gamma_n)(\gamma_n-\delta_k)}\right] \tag{5.3}$$

Подставляя (5.3) в (5.2) и интегрируя, придем к бесконечной алгебраической системе относительно C_m вида

$$X = A_* X + B \tag{5.4}$$

Можно доказать [34], что система (5.4) вполне регулярна при достаточно малых λ и квази вполне регулярна при всех $\lambda < \infty$.

Ясно, что изложенный метод эффективен при достаточно малых λ. Систему (5.4) удобно решать последовательными приближениями. Как правило, с достаточной для практики точностью можно ограничиться нулевым приближением, именно $C_m = 0$.

Изложенный метод разработан и использован для решения ряда конкретных плоских смешанных задач теории упругости в работах [34, 35], но зачатки его уже имеются в [25, 36, 37].

В заключение отметим, что методы §§ 2—5 в комплексе позволяют, как правило, полностью исследовать ту или иную смешанную задачу и представить ее решение в форме, пригодной для практического использования.

§ 6. Некоторые обобщения. Пример. Пространственные (осесимметричные и неосесимметричные) неклассические контактные задачи. Как отмечалось выше, для нахождения главной части асимптотики решения интегрального уравнения (1.1) при малых λ необходимо знать решение интегрального уравнения Винера — Хопфа (4.9). Решение в форме (4.12) не приспособлено для практического использования, так как представлено рядом и не содержит явно особенности $t^{-1/2}$ в окрестности $t = 0$. Для получения практически приемлемых решений уравнения (4.9) можно воспользоваться идеей приближенной факторизации [38].

Апроксимируем, например, функцию $L(u)u^{-1}$, описанную в § 1, выражением

$$\frac{L^*(u)}{u} = \frac{\sqrt{u^2+B^2}}{u^2+c^2}\prod_{n=1}^{N}\frac{(u^2+D_n^2)}{(u^2+E_n^2)}, \qquad A = \frac{B}{C^2}\prod_{n=1}^{N}\frac{D_n^2}{E_n^2} \tag{6.1}$$

где числа B, C, D_n, E_n — все различные, действительные и положительные. Для случая (6.1) решение интегрального уравнения (4.9) находится достаточно просто и содержит в явном виде указанную выше особенность.

Следует отметить, что к интегральному уравнению (1.1) с ядром типа (1.2), (6.1) также приводится целый ряд неклассических контактных задач теории упругости. Поэтому случай (1.2), (6.1) заслуживает большого внимания.

Рассмотрим, далее, для простоты самый несложный вариант

$$L^*(u)u^{-1} = (u^2+1)^{-1/2} \tag{6.2}$$

однако заметим, что он полностью отражает характер общего случая (6.1).

Ядро $K(t)$ для варианта (6.2) есть функция Макдональда $K_0(t)$.

К интегральному уравнению с таким ядром сводится задача о вдавливании бесконечного полосового штампа с основанием $\delta(x, y) = \delta e^{i\beta y}$ в упругое полупространство. При этом $\lambda = (a\beta)^{-1}$, $f(x) = \delta G(1-\nu)^{-1}a^{-1}$, a — полуширина штампа, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. Контактные давления даются соотношением

$$q(x, y) = \varphi(x)e^{i\beta y} \tag{6.3}$$

Кроме того, к интегральному уравнению (1.1) с ядром $K_0(t)$ приводится еще одна динамическая смешанная задача. Именно, пусть с поверхностью упругого полупространства жестко сцеплена бесконечная недеформируемая полоса шириной $2a$, на каждую единицу длины которой действует параллельное полосе касательное усилие $T = T_0e^{\varkappa t}$, t — время. Под действием этих усилий полоса сдвигается на величину $\gamma(t) = \gamma_0e^{\varkappa t}$. Функция распределения контактных касательных напряжений имеет вид

$$\tau(x, t) = \varphi(x)\, e^{\varkappa t} \tag{6.4}$$

где $\varphi(x)$ — решение уравнения (1.1). При этом

$$\lambda = (a\varkappa)^{-1}\rho^{-1/2}G^{1/2}, \quad f(x) = G\gamma_0a^{-1},$$

Здесь ρ — плотность упругого полупространства.

Интегральное уравнение (1.1) с ядром $K_0(t)$ исследовалось ранее в работах [39, 40]. Здесь для его решения применяются изложенные выше методы.

Асимптотическое решение для больших λ вида (2.6) не применимо в рассматриваемом случае, так как асимптотика функции $F(t)$ при малых t в отличие от (2.1) имеет вид

$$F(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^{2i}(a_i + b_i \ln|t|) \tag{6.5}$$

Однако, несколько видоизменив схему, изложенную в § 2, именно, разыскивая решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения (1.6) в виде двойного ряда по степеням λ^{-2} и $\ln\lambda$, получим

$$\varphi(x)=\frac{P}{\pi\sqrt{1-x^2}}\left[1+\left(a_1+\frac{3}{2}b_1-b_1\ln 2\lambda\right)(1-2x^2)\lambda^{-2}+O(\lambda^{-4}\ln^2 2\lambda)\right]$$
$$P=\pi f(0)\left[a_0+\ln 2\lambda+(a_1+b_1-b_1\ln 2\lambda)\lambda^{-2}+O(\lambda^{-4}\ln^2 2\lambda)\right]^{-1} \tag{6.6}$$

Для рассматриваемого случая $K(t) = K_0(t)$ постоянные в (6.6) имеют значения

$$a_0=0{,}1159,\quad a_1=0.2790,\quad b_1=-0.2500 \tag{6.7}$$

Отметим, что степенно-логарифмическая асимптотика решения неклассических плоских контактных задач при больших λ вида (6.6) впервые получена и использована для изучения конкретных задач в работах [41, 42].

Главный член асимптотики решения рассматриваемой задачи при малых λ получим по формуле (4.15), решив предварительно для варианта (6.2) интегральное уравнение Винера — Хопфа (4.9). Приведем окончательный результат

$$\omega_0(t)=\frac{f(0)}{\lambda}\left(\operatorname{erf}\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-t}\right)\qquad\left(\begin{matrix}\operatorname{erf}x\text{ — интеграл}\\ \text{вероятности}\end{matrix}\right) \tag{6.8}$$

Более точное решение интегрального уравнения (1.1) для рассматриваемой задачи при малых λ добавляет к (6.8), как можно показать на основании (4.8), члены порядка $\exp(-2/\lambda)$ и выше.

На базе (6.8) для величины P получим выражение

$$P=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,d\xi=f(0)\left[(2s+1)\operatorname{erf}\sqrt{s}-s+2\sqrt{\frac{s}{\pi}}e^{-s}\right],\qquad s=\frac{2}{\lambda} \tag{6.9}$$

Ниже даны некоторые результаты вычислений при $\lambda = 2$ по формулам (6.6) (верхние значения) и формулам (4.15), (6.8) и (6.9) (нижние значения)

$$\frac{\varphi(0)}{f(0)}=\begin{cases}0.669,\\0.667,\end{cases}\qquad \frac{\psi}{f(0)}=\begin{cases}0.411,\\0.407,\end{cases}\qquad \frac{P}{f(0)}=\begin{cases}1.96\\1.94\end{cases}$$

Величина ψ дается соотношением

$$\psi=\lim\ \varphi(\xi)(1+\xi)^{1/2},\quad \xi\to 1 \tag{6.10}$$

Отсюда видно, что с достаточной для практики степенью точности происходит смыкание асимптотических решений при больших и малых λ.

Следует отметить, что первый метод бесконечных алгебраических систем сохраняет силу для случая (6.1), однако второй метод систем пока еще на случай (6.1) распространить не удалось.

В заключение коротко остановимся на пространственных неклассических контактных задачах.

Большую группу здесь составляют неклассические контактные задачи для упругого полупространства и слоя с круговой зоной раздела граничных условий. Такого сорта задачи, как правило, могут быть приведены к решению следующего интегрального уравнения первого рода с симметричным нерегулярным ядром

$$\int_0^1\varphi_n(\rho)\,\rho K_n(\rho/\lambda,\ r/\lambda)\,d\rho=\lambda f_n(r)\qquad(0\leqslant r\leqslant 1)$$
$$K_n(\mu,\ \nu)=\int_0^\infty L(u)\,J_n(u\mu)\,J_n(u\nu)\,du \tag{6.11}$$

где $L_n(x)$ — функции Бесселя, а функция $L(u)$ имеет вид (1.3), (1.4), либо (6.1).

Все методы приближенного решения интегрального уравнения (1.1), описанные в §§ 2—5, могут быть с соответствующими видоизменениями применены для исследования интегрального уравнения (6.11). Именно, в работах [6, 13, 20, 43–53] получена и использована для решения конкретных неклассических контактных задач асимптотика интегрального уравнения (6.11) при больших λ.

Первый метод бесконечных алгебраических систем разработан и использован при решении интегрального уравнения (6.11) в работах [20,54].

Главный член асимптотики решения уравнения (6.11) при малых λ получен в работах [20,31].

Второй метод бесконечных алгебраических систем разработан для уравнения (6.11) в работе [35].

Если зона раздела граничных условий на поверхности полупространства или слоя не является круговой, то соответствующие неклассические контактные задачи приводятся к решению следующего интегрального уравнения первого рода с разностным нерегулярным ядром

$$\iint\limits_{\Omega} \varphi(P) K\left(\frac{R_{PQ}}{\lambda}\right) dP = 2\pi f(Q) \qquad (Q \in \Omega), \qquad K(t) = \int_0^\infty L(u) J_0(ut)\, du \tag{6.12}$$

где Ω — область контакта, R_{PQ} — расстояние между точками P и Q. Функция $L(u)$ имеет вид (1.3), (1.4), либо (6.1).

Для приближенного решения интегрального уравнения (6.12) пока удалось применить с соответствующими видоизменениями лишь методы, изложенные в § 2,4. Именно, в работах [7, 55, 56] получено и использовано для решения конкретных задач асимптотическое решение уравнения (6.12) при больших λ. В работе [57] построен главный член асимптотики решения уравнения (6.12) при малых λ. По-видимому, не вызовет препятствий и перенесение на случай (6.12) первого метода бесконечных алгебраических систем.

Наконец, отметим, что методы §§ 2—4 могут быть с успехом использованы и при исследовании интегрального уравнения

$$\int_a^b \varphi_n(\rho)\, \rho d\rho \int_0^\infty J_n(u\rho) J_n(ur)\, du = f_n(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant b) \tag{6.13}$$

к которому приводятся смешанные задачи для упругого полупространства с кольцевой зоной раздела граничных условий. Именно, в работе [41] получена асимптотика решения уравнения (6.13) при больших λ, в работах [41,58–61] с помощью методов, аналогичных изложенному в § 4, получены асимптотические решения уравнения (6.13) при малых λ больших $\varepsilon = a/b$).

Поступила 12 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Шехтер О. Я. О влиянии мощности упругого слоя грунта на распределение напряжений в фундаментной балке. «Свайные и естественные основания», М.— Л., Госстройиздат, 1939.
2. Беленький М.Я. Смешанная задача теории упругости для бесконечно длинной полосы. ПММ, 1952, т. 16, вып. 3.
3. Бирман С. Е. Об осадке жесткого штампа на слое грунта, подстилаемом скальным основанием. Инж. сб., 1954, т. 20.
4. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
5. Воронин Т. А. Контактные напряжения, возникающие при тугой посадке жесткой втулки на бесконечный цилиндр. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 8.
6. Ворович И. И., Устинов Ю. А. О давлении штампа на слой конечной толщины. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.

7. Александров В. М., Ворович И. И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
8. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
9. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина. Изв. АН АрмССР, Механика, 1967, т. 20, № 1.
10. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, 1955, т. 100, № 3.
11. Александров В. М., Устинов Ю. А. Некоторые контактные задачи теории упругости. Аннотации докл. I Всес. съезда по теорет. и прикладн. механ., М., 1960.
12. Александров В. М., Александрова Г. П. Контактная задача теории упругости для упругой полосы. Материалы второй научной конференции аспирантов. Изд-во Ростовск. ун-та, 1960.
13. Маркузон И. А. Равновесные трещины в полосе конечной ширины. ПМТФ, 1963, № 5.
14. Соловьев А. С. Некоторые смешанные задачи теории упругости. Материалы XVII научной студенческой конференции. Серия точных и естественных наук. Изд-во Ростовск. ун-та, 1965.
15. Александров В. М., Александрова Г. П. Об изгибе штампом плиты, лежащей на упругом основании. Аннот. докл. 5-й Всес. конференции по теории пластин и оболочек. М., 1965.
16. Александров В. М. К теории равновесных трещин в упругом слое. Тр. I Всес. симпозиума по концентрации напряжений. Киев, 1965.
17. Lowengrub M. A. A two—dimensional crack problem. Int. J. Engng Sci., 1966, vol. 4, № 3.
18. Александров В. М., Ворович И. И. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Тезисы докл. на IV Всес. конференц. по прочности и пластичности. М., «Наука», 1967.
19. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина. Инж. ж., МТТ, 1967, № 2.
20. Александров В. М. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
21. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Изв. АН АрмССР, физ.-матем. науки, 1961, т. 14, № 3.
22. Александров В. М. О приближенном решении одного класса интегральных уравнений. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. н., 1964, т. 17, № 2.
23. Лутченко С. А. О вдавливании штампа в боковую поверхность упругого основания в виде клина. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 12.
24. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
25. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. Изд-во иностр. лит., 1962.
26. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
27. Александров В. М., Бабешко В. А., Ворович И. И. Асимптотический метод решения контактных задач для слоя малой толщины. Аннот. докл. 2-го Всес. съезда по теорет. и прикладн. механ., М., 1964.
28. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
29. Koiter W. T. Solution of some elasticity problems by asymptotic methods. В сб.: Приложение теории функций в механ. сплош. среды. т. 1 М., «Наука», 1965.
30. Александров В. М., Ворович И. И. Контактные задачи для упругого слоя малой толщины. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
31. Александров В. М., Бабешко В. А., Кучеров В. А. Контактные задачи для упругого слоя малой толщины. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
32. Александров В. М., Сметанин Б. И. Равновесная трещина в слое малой толщины. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
33. Александров В. М., Сметанин Б. И. О равновесных продольных трещинах в пластинах. Тр. 6-й Всес. конференц. по теор. оболочек и пластинок. Баку, 1966, М., «Наука», 1966.
34. Бабешко В. А. Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1966, т. 30, вып.4.
35. Бабешко В. А. Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
36. Симоненко И. Б. О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях типа свертки. Математика, Изв. вузов, 1959, No. 2.

37. Smith S. F. On a flat punck indenting an elastic layer in plane strain. Quart. J. Mathe., 1964, vol. 15, No. 59.
38. Koiter W. T. Approximate solution of Wiener—Hopf tupe integral equations with applications proc. Koninkl Nederl. Akad. wet., 1954, bd. 57, No 5.
39. Рвачев В. Л. Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
40. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения интегрального уравнения дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины. ЖТФ, 1965, т. 35, вып. 3.
41. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство. Инж. ж., МТТ, 1967, № 4.
42. Александров В. М., Белоконь А. В. Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
43. Устинов Ю. А. О влиянии свободной границы полупространства на распространение трещины. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 4.
44. Грилицкий Д. В. Кручение двухслойной упругой среды. Прикл. механика, 1961, т. 7, вып. 1.
45. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричная контактная задача для трансверсально-изотропного слоя, покоящегося на жестком основании. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 3.
46. Keer L. M. The Contact Stress Problem for an Elastic Sphere indenting an Elastic Layer. Trans. ASME., Ser. E., J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 1. (Рус. перев.: Прикл. механ., 1964, № 1).
47. Губенко В. С., Филимонов И. Ф. О связи некоторых осесимметричных и плоских задач для слоя. Днепропетр. Тр. Ин-та инж. жел. дор. трансп., 1964, вып. 50.
48. Довнорович В. И. О действии кругового в плане штампа на упругий слой конечной толщины, лежащий на жестком основании. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., 1964, № 2.
49. Ворович И. И., Копасенко В. В. Контактная задача для оснований, работающих в условиях изгиба. Тр. IV Всес. конференц. по теор. оболочек и пластинок. Ереван, 1962. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1964.
50. Yih—O Tu, Gazis D. S. The Contact Problem of a Plate Pressed between Two Spheres. Trans. ASME., Ser. E., J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ., 1964, № 4).
51. Кизыма Я. М. Контактные напряжения в случае сцепления кругового штампа с упругим слоем. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 2.
52. Закорко В. Н., Ростовцев Н. А. К динамической контактной задаче стационарных колебаний упругого полупространства. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
53. Dhaliwal R. S. An axisymmetric mixed boundary value problem for a thick slab. Siam J. Appl. Math., 1967, vol. 15, No. 1.
54. Попов Г. Я. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
55. Александров В. М. Некоторые контактные задачи для упругого слоя. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
56. Александров В. М. К задаче о действии штампа на упругий слой конечной толщины. В сб.: Материалы 3-ей научн. конфер. аспирантов. Ростовск. ун-т. Ростов-на-Дону, 1961.
57. Александров В. М. К решению одного типа двумерных интегральных уравнений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
58. Губенко В. С., Моссаковский В. И. Давление осесимметричного кольцевого штампа на упругое полупространство. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
59. Губенко В. С. Давление осесимметричного кольцевого штампа на упругий слой и полупространство. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 3.
60. Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н. Кручение упругого полупространства, вызванное поворотом кольцевого штампа. Инж. ж., МТТ, 1966, № 1.
61. Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н. Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство. Инж. ж., МТТ, 1966, № 4.