Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

# КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ УПРУГОГО ПОЛЯ КВАЗИИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

**А. Г. Фокин, Т. Д. Шермергор**

(Москва)

Деформирование неоднородных материалов сопровождается искажениями формы зерен. Эти искажения носят случайный характер, причем если в среднем деформации не превышают предела упругости, локальные напряжения в отдельных областях могут быть настолько большими, что в них возникают микропластические сдвиги. Последнее объясняет тот интерес, который проявляется к изучению не только средних характеристик упругого поля, но и отклонений поля деформации в отдельных областях твердого тела от среднего значения.

Одной из характеристик, позволяющих исследовать связи между областями неоднородностей, являются различные корреляционные функции. При помощи последних можно составить количественное представление о микронапряжених, об отклонении формы зерен от равновесной и о взаимодействии между ними при деформировании.

Будем считать заданной корреляционную функцию второго порядка для тензора упругих модулей. Последняя выбирается в форме, соответствующей неоднородной среде с детерминированными границами раздела между зернами. Искажения зерен при деформировании характеризуются бинарными корреляционными функциями тензоров напряжений, деформаций и углов вращения. Тензорная и координатная зависимости перечисленных корреляционных функций анализируются для того, чтобы сделать вывод о характере деформирования зерен.

1. Вычислим автокорреляционный тензор упругих модулей нетекстурированного поликристалла. Для этого выразим тензор упругих модулей $\lambda_{ijkl}$ в произвольной системе координат через его значение в кристаллографической системе отсчета $\overset{\circ}{\lambda}_{pqrs}$ через направляющие косинусы $\alpha_{ip}$

$$\lambda_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}\overset{\circ}{\lambda}_{pqrs} \tag{1.1}$$

Тогда вычисление центральной моментной функции второго порядка тензора упругих модулей сведется к усреднению произведений направляющих косинусов

$$A^{ijkl}_{pqrs} \equiv \langle \lambda'_{ijkl}\lambda'_{pqrs}\rangle = [\langle \alpha_{ia}\alpha_{jb}\alpha_{kc}\alpha_{ld}\alpha_{pt}\alpha_{qu}\alpha_{rv}\alpha_{sw}\rangle - \langle \alpha_{ia}\alpha_{jb}\alpha_{kc}\alpha_{ld}\rangle \langle \alpha_{pt}\alpha_{qu}\alpha_{rv}\alpha_{sw}\rangle]\, \overset{\circ}{\lambda}_{abcd}\overset{\circ}{\lambda}_{tuvw} \tag{1.2}$$

Здесь угловые скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение по всевозможным ориентациям кристаллитов, а штрихами отмечены случайные составляющие тензора упругих модулей

$$\lambda'_{ijkl} = \lambda_{ijkl} - \langle \lambda_{ijkl}\rangle$$

Непосредственным расчетом можно убедиться, что

$$\langle \alpha_{im}\alpha_{jn}\rangle = {}^1/_3\,\delta_{ij}\delta_{mn}$$

$$\langle \alpha_{im}\alpha_{jm}\alpha_{kn}\alpha_{ln}\rangle = \frac{1}{5!!}\,[\delta_{ijkl} + {}^1/_2\,(\delta_{mn} - 1)\,(3\delta_{ijkl} - 5\delta_{ij}\delta_{kl})] \tag{1.3}$$

$$\langle \alpha_{im}\alpha_{jm}\alpha_{km}\alpha_{pn}\alpha_{qn}\alpha_{rn}\rangle = \frac{1}{7!!}\,\delta_{ijkpqr}\delta_{mn}$$

$$\langle \alpha_{im}\alpha_{jm}\alpha_{km}\alpha_{lm}\alpha_{pn}\alpha_{qn}\rangle = \frac{1}{7!!}\left[\delta_{ijklpq}\delta_{mn} + {}^1/_2(\delta_{mn}-1)(3\delta_{ijklpq} - 7\delta_{ijkl}\delta_{pq})\right]$$

$$\langle \alpha_{im}\alpha_{jm}\alpha_{km}\alpha_{lm}\alpha_{pvn}\alpha_{qn}\alpha_{rn}\alpha_{sn}\rangle =$$

$$= \frac{1}{9!!}\left[\delta_{pqrs}^{ijkl} + \frac{1}{8}(\delta_{mn}-1)(5\delta_{pqrs}^{ijkl} - 63\delta_{ijkl}\delta_{pqrs} + 9\beta_{pqrs}^{ijkl})\right]$$

Здесь $\delta_{ij\ldots rs}$ есть сумма произведений $\delta$-символов Кронекера, причем суммирование проводится по всевозможным перестановкам индексов, не включающим, однако тождественные перестановки типа $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Матрицы $\delta$ четвертого, шестого и восьмого порядков содержат соответственно три, пятнадцать и сто пять слагаемых

$$\delta_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \tag{1.4}$$

$$\delta_{ijklpq} = \delta_{ij}\delta_{klpq} + \delta_{ik}\delta_{jlpq} + \delta_{il}\delta_{jkpq} + \delta_{ip}\delta_{jklq} + \delta_{iq}\delta_{jklp}$$

$$\delta_{pqrs}^{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{klpqrs} + \delta_{ik}\delta_{jlpqrs} + \delta_{il}\delta_{jkpqrs} + \delta_{ip}\delta_{jklqrs} + \delta_{iq}\delta_{jklprs} + \delta_{ir}\delta_{jklpqs} + \delta_{is}\delta_{jklpqr}$$

Через $\beta_{pqrs}^{ijkl}$ в выражении (1.3) обозначена матрица

$$\beta_{pqrs}^{ijkl} = \beta_{ijkl}^{pqrs} = 6\delta_{(ij}\delta_{kl)pqrs} = \delta_{ij}\delta_{klpqrs} + \delta_{ik}\delta_{jlpqrs} + \delta_{il}\delta_{jkpqrs} + \delta_{jk}\delta_{ilpqrs} + \delta_{jl}\delta_{ikpqrs} + \delta_{kl}\delta_{ijpqrs} \tag{1.5}$$

При вычислении усредненных произведений направляющих косинусов (1.3) использовалась матрица перехода, составленная при помощи эйлеровских углов. В случае $m = n$ усреднение четного числа направляющих косинусов приводит к слагаемым вида

$$\frac{1}{(2n+1)!!}\delta_{ij\ldots s}$$

а нечетного — дает нуль. В случае $m \neq n$ компоненты усредненной матрицы направляющих косинусов будут отличны от нуля лишь тогда, когда на всех строках и столбцах будет находиться четное число элементов $\alpha_{in}$.

Проведем вычисление автокорреляционного тензора $A_{pqrs}^{ijkl}$ для поликристаллов орторомбической системы. Тензор упругих модулей кристаллита орторомбической симметрии, отнесенный к кристаллографическим осям, может быть записан в виде (1.6)

$$\mathring{\lambda}_{ijkl} = \sum_{n=1}^{3}\left[\lambda^{(n)}\delta_{in}\delta_{jn}\delta_{kn}\delta_{ln} + \mu^{(n)}(\delta_{in}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ln}) + 4\nu^{(n)}\,\delta_{n(i}\delta_{j)(k}\delta_{l)n}\right]$$

Здесь по индексам в круглых скобках проводится симметризация

$$\delta_{n(i}\delta_{j)k} = {}^1/_2(\delta_{ni}\delta_{jk} + \delta_{nj}\delta_{ik})$$

Коэффициенты $\lambda^{(n)}$, $\mu^{(n)}$ и $\nu^{(n)}$ следующим образом связаны с матричными упругими постоянными:

$$\begin{gathered}
\lambda^{(1)} = c_{11} + c_{23} + 2c_{44} - (c_{12} + c_{13} + 2c_{55} + 2c_{66}) \\
\lambda^{(2)} = c_{22} + c_{13} + 2c_{55} - (c_{12} + c_{23} + 2c_{44} + 2c_{66}) \\
\lambda^{(3)} = c_{33} + c_{12} + 2c_{66} - (c_{13} + c_{23} + 2c_{44} + 2c_{55}) \\
2\mu^{(1)} = c_{12} + c_{13} - c_{23}, \quad 2\mu^{(2)} = c_{12} + c_{23} - c_{13} \\
2\mu^{(3)} = c_{13} + c_{23} - c_{12}, \quad 2\nu^{(1)} = c_{55} + c_{66} - c_{44} \\
2\nu^{(2)} = c_{44} + c_{66} - c_{55}, \quad 2\nu^{(3)} = c_{44} + c_{55} - c_{66}
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Подставляя выражение (1.6) в (1.2) и используя формулы (1.3), находим автокорреляционный тензор упругих модулей для поликристаллов орторомбической системы

$$A_{pqrs}^{ijkl} = \frac{1}{9!}\Big[\frac{1}{40}\Big(\sum_n \lambda^{(n)}\lambda^{(n)} - \sum_{n,m} \lambda^{(n)}\lambda^{(m)}\Big) \times \tag{1.8}$$

$$\times (45\beta_{pqrs}^{ijkl} - 35\delta_{pqrs}^{ijkl} - 63\delta_{ijkl}\delta_{pqrs}) + P_{\lambda\lambda}\left(\delta_{pqrs}^{ijkl} - \frac{12}{5}\delta_{ijkl}\delta_{pqrs}\right) +$$

$$+ \frac{2}{7!}P_{\lambda\mu}\gamma_{pqrs}^{ijkl} + \frac{2}{7!}P_{\lambda\nu}\left(\beta_{pqrs}^{ijkl} - \frac{14}{3}\delta_{ijkl}\delta_{pqrs} - \gamma_{pqrs}^{ijkl}\right) + \frac{4}{5!}P_{\mu\mu}\delta_{[ij}D_{kl][pq}\delta_{rs]} +$$

$$+ \frac{12}{5!}P_{\mu\nu}\left(\delta_{[ij}D_{kl]\,(pq}\delta_{rs)} + \delta_{(ij}D_{kl)\,[pq}\delta_{rs]} - \frac{2}{3}\delta_{[ij}D_{kl]\,[pq}\delta_{rs]}\right) +$$

$$+ \frac{4}{5!}P_{\nu\nu}(9\delta_{(ij}D_{kl)\,(pq}\delta_{rs)} - 3\delta_{(ij}D_{kl)\,[pq}\delta_{rs]} - 3\delta_{[ij}D_{kl]\,(pq}\delta_{rs)} + \delta_{[ij}D_{kl]\,[pq}\delta_{rs]}\Big]$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$P_{\lambda\mu} \equiv {}^1/_2\Big(3\sum_n \lambda^{(n)}\mu^{(n)} - \sum_{n,m}\lambda^{(n)}\mu^{(m)}\Big) \tag{1.9}$$

$$\gamma_{pqrs}^{ijkl} \equiv \delta_{ijkl[pq}\delta_{rs]} + \delta_{pqrs[ij}\delta_{kl]} - {}^7/_3\,(\delta_{ijkl}\delta_{pq}\delta_{rs} + \delta_{pqrs}\delta_{ij}\delta_{kl})$$

$$D_{ijkl} \equiv 2\,(\delta_{i(k}\delta_{l)j} - {}^1/_3\delta_{ij}\delta_{kl})$$

По парам индексов, заключенным в квадратные скобки, проводится симметризация

$$\delta_{ijkl[pq}\delta_{rs]} \equiv {}^1/_2\,(\delta_{ijklpq}\delta_{rs} + \delta_{ijklrs}\delta_{pq})$$

Из выражения (1.8) находим свертки автокореляционного тензора

$$A_{klqq}^{ijpp} = {}^1/_{10}A_1D_{ijkl}, \qquad D_{pqrs}A_{klrs}^{ijpq} = {}^1/_{45}\,(10A_1\delta_{ij}\delta_{kl} + 3A_2D_{ijkl}) \tag{1.10}$$

$$A_1 = {}^2/_3P_{\varkappa\varkappa}, \qquad A_2 = {}^2/_3P_{\xi\xi} + 8P_{\nu\nu} + {}^2/_5\sum_{n,m}\lambda^{(n)}\lambda^{(m)}$$

$$\varkappa^{(n)} = \xi^{(n)} + 3\mu^{(n)}, \qquad \xi^{(n)} = \lambda^{(n)} + 4\nu^{(n)}$$

В случае более высокой симметрии поликристалла формулы (1.6) — (1.10) упрощаются. Тензор упругих модулей будет иметь вид:

для тетрагональной системы [1]

$$\lambda_{ijkl}^{t} = \lambda_{ijkl}^{h} + \lambda_6\sum_n^3 \delta_{in}\delta_{jn}\delta_{kn}\delta_{ln} \tag{1.11}$$

для гексагональной

$$\lambda_{ijkl}^{h} = \lambda_{ijkl}^{is} + \lambda_3\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3} + \lambda_4\,(\delta_{ij}\delta_{k3}\delta_{l3} + \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{kl}) + 4\lambda_5\delta_{3(i}\delta_{j)\,(k}\delta_{l)3} \tag{1.12}$$

для кубической

$$\lambda_{ijkl}^{c} = \lambda_{ijkl}^{is} + \lambda_6\sum_n^3 \delta_{in}\delta_{jn}\delta_{kn}\delta_{ln} \tag{1.13}$$

для изотропной

$$\lambda_{ijkl}^{is} = \lambda_1\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\lambda_2\delta_{i(k}\delta_{l)j} \tag{1.14}$$

В случае тетрагональной симметрии имеют место равенства

$$c_{11} = c_{22}, \qquad c_{13} = c_{23}, \qquad c_{44} = c_{55}$$

что приводит к следующим соотношениям между одноиндексными коэффициентами $\lambda^{(n)}$, $\mu^{(n)}$, $\nu^{(n)}$ и $\lambda_i$:

$$\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}=\lambda_6, \qquad \lambda^{(3)}=\lambda_3+\lambda_6, \qquad \mu^{(1)}=\mu^{(2)}={}^1/{}_2\lambda_1 \tag{1.15}$$
$$\mu^{(3)}=\lambda_4+{}^1/{}_2\lambda_1, \qquad \nu^{(1)}=\nu^{(2)}={}^1/{}_2\lambda_2, \qquad \nu^{(3)}=\lambda_5+{}^1/{}_2\lambda_2$$

Отсюда выражаем $\lambda_i$ через $c_{ik}$

$$\lambda_1=c_{12}, \quad \lambda_2=c_{66}, \quad \lambda_3=c_{33}+2c_{12}+4c_{66}-c_{11}-2c_{13}-4c_{44} \tag{1.16}$$
$$\lambda_4=c_{13}-c_{12}, \quad \lambda_5=c_{44}-c_{66}, \quad \lambda_6=c_{11}-c_{12}-2c_{66}$$

Соотношения (1.16) при $\lambda_6=0$ приводят к гексагональной симметрии, а при $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$ — к кубической. В последнем случае автокорреляционный тензор (1.8) принимает особенно простой вид

$$A^{ijkl}_{pqrs}=\frac{\lambda_6^2}{60\cdot 7\,!!}\left(35\delta^{ijkl}_{pqrs}+63\delta_{ijkl}\delta_{pqrs}-45\beta^{ijkl}_{pqrs}\right) \tag{1.17}$$

Коэффициенты $A_1$ и $A_2$ для тетрагональной и гексагональной систем соответственно равны [1,2]

$$A_1^t={}^2/{}_3(\lambda_3+3\lambda_4+4\lambda_5)^2$$
$$A_2^t={}^2/{}_3(\lambda_3+4\lambda_5)^2+{}^2/{}_5(\lambda_3+3\lambda_6)^2+8\lambda_5^2$$
$$A_1^h=A_1^t, \qquad A_2^h={}^4/{}_{15}(2\lambda_3+5\lambda_5)^2+12\lambda_5^2$$

а для кубической

$$A_1^c=0, \qquad A_2^c={}^{18}/{}_5\lambda_6^2 \tag{1.18}$$

Автокорреляционный тензор рассчитывался также В. А. Ломакиным [3], который для произвольной квазиоднородной нетекстурированной среды получил

$$A^{ijkl}_{pqrs}=h_1\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{pq}\delta_{rs}+2h_2(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{p(r}\delta_{s)q}+\delta_{i(k}\delta_{l)j}\delta_{pq}\delta_{rs})+4h_3\delta_{i(k}\delta_{l)j}\delta_{p(r}\delta_{s)q} \tag{1.19}$$

где $h_i$ — константы. В простейшем случае кубической симметрии, как видно из выражения (1.17), автокорреляционный тензор содержит 105 различных слагаемых, тогда как в выражении (1.19) их всего девять.

В непригодности выражения (1.19) для рассматриваемого случая можно убедиться на следующем примере. Непосредственное вычисление компоненты автокорреляционного тензора $A^{1231}_{1231}$ дает

$$A^{1231}_{1231}=\langle\lambda'^2_{1231}\rangle=\lambda_6^2\left\langle\left(\sum_n\alpha_{1n}{}^2\alpha_{2n}\alpha_{3n}-\tfrac{1}{15}\delta_{1231}\right)^2\right\rangle=\lambda_6^2\sum_{n,m}\langle\alpha_{1n}{}^2\alpha_{1m}{}^2\alpha_{2n}\alpha_{2m}\alpha_{3n}\alpha_{3m}\rangle=$$
$$=3\lambda_6^2\langle\alpha_{1n}{}^4\alpha_{2n}{}^2\alpha_{3n}{}^2\rangle=\frac{1}{7!!}\lambda_6^2 \tag{1.20}$$

что может быть получено и из выражения (1.17), тогда как согласно формуле (1.19) $A^{1231}_{1231}=0$. Легко видеть, что выражение (1.19) пригодно лишь для нетекстурированных механических смесей изотропных компонентов.

В случае двухкомпонентной смеси коэффициенты $h_i$ равны [4]

$$h_1=c_1c_2(\lambda_1-\lambda_2)^2, \quad h_2=c_1c_2(\lambda_1-\lambda_2)(\mu_1-\mu_2), \quad h_3=c_1c_2(\mu_1-\mu_2)^2 \tag{1.21}$$

Здесь $c_i$ — концентрация, а $\lambda_i$ и $\mu_i$ — постоянные Ламе $i$-го компонента. Свертки автокорреляционного тензора упругих модулей для механических смесей изотропных компонентов находим при помощи соотношений (1.19) и (1.21)

$$A^{ijpp}_{\cdot\cdot lqq}=9D_K\delta_{ij}\delta_{kl}, \qquad D_{pqrs}A^{ijpq}_{\cdot\cdot lrs}=4D_\mu D_{ijkl} \tag{1.22}$$
$$K=\lambda+{}^2/{}_3\mu, \qquad D_K\equiv\langle K'^2\rangle, \qquad D_\mu\equiv\langle\mu'^2\rangle$$

Сопоставляя выражения (1.10) и (1.22), отметим, что свертки $A^{ijpp}_{\cdot\cdot lqq}$ для поликристаллов и механических смесей в тензорном отношении противоположны.

2. Будем характеризовать отклонение полей напряжений $\sigma_{ij}$ и деформаций $\varepsilon_{ij}$ от их средних значений соответствующими корреляционными функциями. Простейшей корреляционной функцией, описывающей неоднородность поля деформаций, является тензор второго ранга $U_{ij}$, который выражается через случайные составляющие поля смещений следующим образом:

$$U_{ij}(\mathbf{r}-\rho) = \langle u_i'(\mathbf{r}) u_j'(\rho)\rangle \tag{2.1}$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по области, размер которой велик по сравнению с пространственным масштабом корреляций, но мал по отношению к расстояниям, на которых существенно изменяется регулярная часть функций.

Наряду с тензором $U_{ij}$, рассмотрим еще три корреляционные функции

$$E_{ijmn}(\mathbf{r}-\rho) = \langle \varepsilon_{ij}'(\mathbf{r}) \varepsilon_{mn}'(\rho)\rangle, \qquad \Omega_{ij}(\mathbf{r}-\rho) = \langle \omega_i'(\mathbf{r}) \omega_j'(\rho)\rangle \tag{2.2}$$

$$S_{ijmn}(\mathbf{r}-\rho) = \langle \sigma_{ij}'(\mathbf{r}) \sigma_{mn}'(\rho)\rangle, \qquad \omega_i = {}^1/_2 e_{ikj} u_{j,k}$$

первая из которых описывает неоднородность сдвиговых и объемных деформаций, вторая — локальные повороты, а последняя характеризует неоднородность поля напряжений. Через $e_{ikj}$ в выражении (2.2) обозначен единичный антисимметричный тензор.

Для вычисления корреляционных функций воспользуемся уравнением равновесия

$$L_{il}u_l + f_i = 0, \qquad L_{il} \equiv \nabla_k \lambda_{iklm} \nabla_m = \langle L_{il}\rangle + L_{il}' \tag{2.3}$$

Здесь $\langle L_{il}\rangle$ — регулярная, а $L_{il}'$ — случайная составляющая оператора $L_{il}$.

Из уравнения (2.3) следует, что в приближении учета парных корреляций случайная составляющая вектора смещения однородно деформированной среды может быть записана в виде [5]

$$u_i' = G_{ik} * L_{kl}' \langle u_l\rangle = G_{ik,\,l} * \lambda_{klpq}' \langle \varepsilon_{pq}\rangle \tag{2.4}$$

Здесь символом $*$ обозначена операция интегральной свертки по всему пространству, $G_{ik}$ — тензорная функция Грина оператора $\langle L_{il}\rangle$. Последняя выражается через усредненные постоянные Ламе $\langle\lambda\rangle$ и $\langle\mu\rangle$

$$G_{ik}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\langle\mu\rangle}(r_{,pp}\delta_{ik} - \varkappa r_{,ik}), \qquad \varkappa \equiv \frac{\langle\lambda+\mu\rangle}{\langle\lambda+2\mu\rangle} \tag{2.5}$$

Подставим выражение (2.4) в (2.1). Это дает

$$U_{ij}(\mathbf{r}) = A_{rstv}^{klpq} \langle \varepsilon_{pq}\rangle \langle \varepsilon_{tv}\rangle I_{jrs}^{ikl}(\mathbf{r}) \tag{2.6}$$

$$I_{jrs}^{ikl}(\mathbf{r}) \equiv G_{ik,\,l} * \varphi * G_{jr,\,s}(\mathbf{r}) \tag{2.7}$$

Здесь $\varphi(\mathbf{r})$ — радиальная часть бинарной корреляционной функции тензора упругих модулей:

$$\langle \lambda_{ijkl}'(\mathbf{r}) \lambda_{pqrs}'(\rho)\rangle = A_{pqrs}^{ijkl} \varphi(\mathbf{r}-\rho) \tag{2.8}$$

Расщепление тензорной и координатной зависимостей для бинарной корреляционной функции тензора упругих модулей квазиизотропных твердых тел вытекает из результатов работ [2,6]. Проведем усреднение в два этапа — вначале по одному зерну, а затем по всем зернам агрегата. Будем искать среднее по зерну значение случайной составляющей тензора упругих модулей в точке ρ, если ее значение в точке r будет известным. Для этого введем весовую функцию, при помощи которой проводится усреднение, равную единице, если обе точки r и ρ принадлежат одному зерну, и нулю в противоположном случае. Если форма кристаллитов не согласована с кристаллографическими осями, то весовая функция является скалярной. Имея это в виду, проведем сферу радиуса ρ — r и выполним интегрирование по углам

$$\overline{\lambda_{ijkl}'(\rho)} = \frac{1}{4\pi}\int \lambda_{ijkl}'(\mathbf{r})\,\Phi(|\mathbf{r}-\rho|,\,\Omega)\,d\Omega = \lambda_{ijkl}'(\mathbf{r})\,\varphi(|\mathbf{r}-\rho|) \tag{2.9}$$

Физический смысл проведенного усреднения состоит в усреднении по различным формам зерен, но не ориентациям их кристаллографических осей. Если функция Φ обрезает значения случайных составляющих тензора упругих модулей на границе зерна, то сферически симметричная функция φ «размазывает» значения тензора $\lambda_{ijkl}'$ на область порядка средних размеров зерна; она равна единице при $r = \rho$ и асимптотически убывает при увеличении аргумента.

Перейдем теперь к усреднению по всем зернам. Учитывая, что различные зерна отличаются лишь ориентировкой кристаллографических осей, можно заменить усреднение по ансамблю зерен усреднением по их ориентациям [2]. Поэтому, умножая обе части равенства (2.9) на $\lambda_{pqrs}'(\mathbf{r})$

$$\overline{\lambda_{pqrs}'(\mathbf{r})\,\lambda_{ijkl}'(\rho)} = \lambda_{pqrs}'(\mathbf{r})\,\lambda_{ijkl}'(\mathbf{r})\,\varphi(|\mathbf{r}-\rho|)$$

и проводя усреднение по всем ориентациям, получим формулу (2.8).

Вычисление интеграла $I_{jrs}^{ikl}$ дает

$$I_{jrs}^{ikl}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\langle\mu\rangle^2}\left[J_{,ls}^{(2)}\delta_{ik}\delta_{jr} + \varkappa\left(J_{,ljrs}^{(3)}\delta_{ik} + J_{,ikls}^{(3)}\delta_{jr}\right) + \varkappa^2 J_{,ikljrs}^{(4)}\right] \tag{2.10}$$

$$J_{,ik\ldots s}^{(n)}(\mathbf{r}) \equiv \nabla_i\nabla_k\ldots\nabla_s\frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}k^{-2n}\varphi^*(\mathbf{k})\,d\mathbf{k} \tag{2.11}$$

Функции $J_{,ik\ldots s}^{(n)}$, определенные равенством (2.11) при условии, что порядок дифференцирования $N \leqslant 2n$, обладают следующими рекуррентными соотношениями

$$\delta_{ik}J_{,ikl\ldots s}^{(n)}(\mathbf{r}) = -J_{,l\ldots s}^{(n-1)}(\mathbf{r}), \qquad J^{(0)}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) \tag{2.12}$$

Будем считать, что неоднородность материала связана с наличием детерминированных границ раздела между отдельными зернами, т. е. свойства среды при переходе от зерна к зерну меняются скачком. Тогда пространственная часть корреляционной функции может быть выбрана в виде [4,5]:

$$\varphi(r) = \exp\frac{-r}{a}, \qquad \varphi^*(k) \equiv \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \frac{8\pi a^3}{(1+a^2k^2)^2} \tag{2.13}$$

Подставляя выражение (2.13) в (2.11), найдем интеграл $J(\mathbf{r})$

$$J^{(n)}(\mathbf{r}) = (-1)^n a^{2n}\left[\left(1+\frac{2na}{r}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right) - \frac{2a}{r}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{(2k)!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}\right] \tag{2.14}$$

Из равенств (2.14) видно, что использование финитной функции $\varphi(r) = \exp(-r/a)$ для описания пространственной части корреляционного тензора упругих модулей не приводит к появлению особенностей в интегралах $J^{(n)}_{,ik\ldots s}$. Это связано с тем, что дифференцирование $2n$ раз интеграла $J^{(n)}(r)$ приводит к обращению в нуль сингулярных производных. Например, для $J_{,ij}^{(1)}$ будем иметь

$$J^{(1)} = -a^2\left[\left(1+\frac{2}{\rho}\right)e^{-\rho} - \frac{2}{\rho}\right] \qquad \left(\rho \equiv \frac{r}{a}\right)$$

$$\nabla_i\nabla_j J_S^{(1)} = 2a^2(1-e^{-\rho})\nabla_i\nabla_j\left(\frac{1}{\rho}\right)_S = -\frac{8\pi}{3}(1-e^{-\rho})\,\delta(\rho)\,\delta_{ij} \equiv 0$$

$$\nabla_i\nabla_j J_F^{(1)} = T_1^{(1)}\delta_{ij} + T_2^{(1)}\psi_{ij}, \qquad \psi_{ij} = n_i n_j \qquad \left(n_i = \frac{x_i}{r}\right)$$

$$T_1^{(1)} = \left(\frac{1}{\rho}+\frac{2}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^3}\right)e^{-\rho} - \frac{2}{\rho^3}, \qquad T_2^{(1)} = -\left(1+\frac{3}{\rho}+\frac{6}{\rho^2}+\frac{6}{\rho^3}\right)e^{-\rho} + \frac{6}{\rho^3}$$

Здесь индексами $S$ и $F$ обозначены соответственно сингулярная и формальная части производных

$$\nabla_i\nabla_j J^{(1)} = \nabla_i\nabla_j J_S^{(1)} + \nabla_i\nabla_j J_F^{(1)}$$

Формулами (2.6), (2.10) и (2.14) определяется корреляционная функция вектора смещения. Корреляционные функции тензора деформаций и углов поворота выражаются через $U_{ij}$ следующим образом:

$$E_{ijmn} = -\nabla_{(i}U_{j)(m,n)}, \qquad \Omega_{ij} = -{}^1/_4 e_{ipq}e_{jrs}U_{pr,qs} \tag{2.15}$$

Для корреляционной функции тензора напряжения имеем

$$S_{ijmn} = A^{ijkl}_{mnpq}\langle\varepsilon_{kl}\rangle\langle\varepsilon_{pq}\rangle\varphi + \langle\lambda_{ijkl}\rangle\langle\lambda_{mnpq}\rangle E_{klpq} +$$
$$+\langle\lambda_{ijkl}\rangle\langle\varepsilon_{pq}\rangle\langle\varepsilon_{kl}'\lambda_{mnpq}'\rangle + \langle\lambda_{mnpq}\rangle\langle\varepsilon_{kl}\rangle\langle\varepsilon_{pq}'\lambda_{ijkl}'\rangle \tag{2.16}$$

Вычисление смешанной корреляционной функции $\langle u'_k\lambda'_{mnpq}\rangle$ дает

$$\langle u_k'(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho})\lambda_{mnpq}'(\boldsymbol{\rho})\rangle = \langle G_{kr,s} * \lambda_{rstv}'\varepsilon_{tv}\lambda_{mnpq}'\rangle =$$
$$= A^{mnpq}_{rstv}\langle\varepsilon_{tv}\rangle\frac{1}{\langle\mu\rangle}[J_{,s}^{(1)}\delta_{kr} + \varkappa J^{(2)}_{,krs}] \tag{2.17}$$

Таким образом, выражение (2.16) может быть представлено в виде

$$S_{ijmn} = A^{ijkl}_{mnpq}\langle\varepsilon_{kl}\rangle\langle\varepsilon_{pq}\rangle\varphi + \langle\lambda_{ijkl}\rangle\langle\lambda_{mnpq}\rangle E_{klpq} +$$
$$+ A^{mnpq}_{rstv}\langle\lambda_{ijkl}\rangle\langle\varepsilon_{pq}\rangle\langle\varepsilon_{tv}\rangle I^{kr}_{ls} + A^{ijkl}_{rstv}\langle\lambda_{mnpq}\rangle\langle\varepsilon_{kl}\rangle\langle\varepsilon_{tv}\rangle I^{pr}_{qs} \tag{2.18}$$

$$I^{kr}_{ls} \equiv \frac{1}{\langle\mu\rangle}(\delta_{kr}J^{(1)}_{,ls} + \varkappa J^{(2)}_{,krls}) \tag{2.19}$$

Выражения (2.6), (2.15) и (2.18) можно упростить, если воспользоваться соотношениями, имеющими место для квазиизотропной среды

$$A^{ijpq}_{klrs}\langle\varepsilon_{pq}\rangle\langle\varepsilon_{rs}\rangle = F_1\delta_{ij}\delta_{kl} + F_2 D_{ijkl} \tag{2.20}$$

$$F_1 = {}^1/_9 A^{ijpp}_{klqq}\langle\varepsilon_{ij}\rangle\langle\varepsilon_{kl}\rangle, \qquad F_2 = {}^1/_{20}D_{pqrs}A^{ijpq}_{klrs}\langle\varepsilon_{ij}\rangle\langle\varepsilon_{kl}\rangle \tag{2.21}$$

где свертки тензора $A^{klpq}_{rstv}$ определены равенствами (1.10), (1.18) и (1.22).

Подставляя выражения (2.20) и (2.21) в (2.6), получим

$$U_{ij} = (F_1 + {}^1/_3 F_2)I^{ikk}_{jll} + F_2 I^{ill}_{jkk} \tag{2.22}$$

Явный вид корреляционных функций тензора деформаций и вектора поворотов найдем, подставляя (2.22) в (2.15)

$$E_{ijkl} = \left[\frac{F_1 + {}^4/_3F_2}{\langle\lambda + 2\mu\rangle^2} - \frac{F_2}{\langle\mu\rangle^2}\right] J^{(2)}_{,ijkl} - \frac{F_2}{\langle\mu\rangle^2} \nabla_{(i}\delta_{j)(k}J^{(1)}_{,l)} \tag{2.23}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{F_2}{4\langle\mu\rangle^2}(\varphi\delta_{ij} + J^{(1)}_{,ij}) \tag{2.24}$$

Корреляционную функцию тензора напряжений получим, подставляя в выражение (2.18) соотношения (2.19), (2.20) и (2.23)

$$S_{ijkl} = 2\,[(\eta\delta_{ij}\delta_{kl} + F_2\delta_{i(k}\delta_{l)j})\,\varphi + \eta\,(J^{(1)}_{,ij}\delta_{kl} + J^{(1)}_{,kl}\delta_{ij}) + $$
$$+ 2\zeta J^{(2)}_{,ijkl} + 2F_2\nabla_{(i}\delta_{j)(k}J^{(1)}_{,l)}] \tag{2.25}$$

$$\eta \equiv \frac{(\langle K - {}^2/_3\mu\rangle^2 - {}^4/_3\langle\mu\rangle^2)\,F_2 + 2\,\langle\mu\rangle^2F_1}{\langle\lambda + 2\mu\rangle^2}, \qquad \zeta \equiv \frac{(F_1 + {}^1/_3F_2)\,\langle\mu\rangle^2 + F_2\,\langle\lambda + \mu\rangle^2}{\langle\lambda + 2\mu\rangle^2}$$

3. Представим тензор деформаций в виде суммы объемной и сдвиговой компонент

$$\varepsilon_{ij} = {}^1/_3\varepsilon\delta_{ij} + {}^1/_2D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{3.1}$$

Тогда для поликристалла согласно (1.10) и (2.21) будем иметь

$$F_1 = {}^1/_{90}A_1\,\langle e\rangle^2, \quad F_2 = {}^1/_{90}A_1\,\langle\varepsilon\rangle^2 + {}^1/_{300}A_2\,\langle e\rangle^2 \tag{3.2}$$

$$\langle e\rangle^2 \equiv D_{ijkl}\,\langle\varepsilon_{ij}\rangle\,\langle\varepsilon_{kl}\rangle \tag{3.3}$$

а для механической смеси изотропных компонентов с учетом (1.22)

$$F_1 = D_K\,\langle\varepsilon\rangle^2, \qquad F_2 = {}^1/_5\,D_\mu\,\langle e\rangle^2 \tag{3.4}$$

Из выражений (3.2) и (3.4) следует, что корреляционные функции при произвольных деформациях неоднородного материала могут быть получены из корреляционных функций при объемной и чисто сдвиговой деформации простым суммированием. Имея это в виду, запишем корреляционные тензоры деформаций и углов поворота в виде

$$E_{ijkl} = \varepsilon^{\varepsilon}_{ijkl}\,\langle\varepsilon\rangle^2 + \varepsilon^{e}_{ijkl}\,\langle e\rangle^2, \qquad \Omega_{ij} = \omega^{\varepsilon}_{ij}\,\langle\varepsilon\rangle^2 + \omega^{e}_{ij}\,\langle e\rangle^2 \tag{3.5}$$

Коэффициенты $\varepsilon_{ijkl}$ и $\omega_{ij}$ согласно (2.23) и (2.24) равны:

для поликристаллов

$$\varepsilon^{\varepsilon}_{ijkl} = \frac{A_1}{90\,\langle\mu\rangle^2}\left[\left(\frac{4\,\langle\mu\rangle^2}{3\,\langle\lambda + 2\mu\rangle^2} - 1\right) J^{(2)}_{,ijkl} - \nabla_{(i}\delta_{j)(k}J^{(1)}_{,l)}\right] \tag{3.6}$$

$$\varepsilon^{e}_{ijkl} = \frac{3A_2}{10A_1}\,\varepsilon^{\varepsilon}_{ijkl} + \frac{A_1}{90\,\langle\lambda + 2\mu\rangle^2} J^{(2)}_{,ijkl}$$

$$\omega^{\varepsilon}_{ij} = \frac{A_1}{360\,\langle\mu\rangle^2}(\varphi\delta_{ij} + J^{(1)}_{,ij}), \qquad \omega^{e}_{ij} = \frac{3A_2}{10A_1}\,\omega^{\varepsilon}_{ij} \tag{3.7}$$

для механических смесей

$$\varepsilon^{\varepsilon}_{ijkl} = \frac{D_K}{\langle\lambda + 2\mu\rangle^2} J^{(2)}_{,ijkl}$$

$$\varepsilon^{e}_{ijkl} = \frac{D_\mu}{5\,\langle\mu\rangle^2}\left[\left(\frac{4\,\langle\mu\rangle^2}{3\,\langle\lambda + 2\mu\rangle^2} - 1\right) J^{(2)}_{,ijkl} - \nabla_{(i}\delta_{j)(k}J^{(1)}_{,l)}\right] \tag{3.8}$$

$$\omega^{\varepsilon}_{ij} = 0, \qquad \omega^{e}_{ij} = \frac{D_\mu}{20\,\langle\mu\rangle^2}(\varphi\delta_{ij} + J^{(1)}_{,ij}) \tag{3.9}$$

Условие $\omega_{ij}^{\varepsilon} = 0$ означает, что объемная деформация механических смесей изотропных компонентов не сопровождается поворотами зерен. То же относится и к объемной деформации поликристаллов кубической структуры, для которых в этом случае упругое поле однородно. Для поликристаллов более низкой симметрии объемные деформации будут сопровождаться случайными поворотами кристаллитов.

Выражения, аналогичные (3.6) и (3.8), могут быть получены для корреляционной функции тензора напряжений $S_{ijkl}$. Для этого, наряду с расщеплением величины $F_i$ на девиаторную и объемную составляющие необходимо написать аналогичные соотношения для $\eta$ и $\zeta$.

Корреляции между случайными компонентами объемных деформаций в точках $\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\rho}$ описываются скалярной функцией $E_{iikk}(\mathbf{r})$, а для сдвиговых деформаций — сверткой $E_{ijkl}(\mathbf{r})$ с девиаторным тензором. Соответствующие выражения имеют вид

$$E_{iikk}(\mathbf{r}) = \frac{F_1 + {}^4/_3 F_2}{\langle\lambda + 2\mu\rangle^2}\varphi(r), \qquad D_{ijkl}E_{ijkl}(\mathbf{r}) = {}^4/_3 E_{iikk}(\mathbf{r}) + \frac{2F_2}{\langle\mu\rangle^2}\varphi(r) \quad (3.10)$$

Отсюда для поликристалла получим

$$E_{iikk}(\mathbf{r}) = \frac{\varphi(r)}{1350\langle\lambda + 2\mu\rangle^2}\left[20A_1\langle\varepsilon\rangle^2 + 3(5A_1 + 2A_2)\langle e\rangle^2\right] \quad (3.11)$$

$$D_{ijkl}E_{ijkl}(\mathbf{r}) = \frac{\varphi(r)}{4050\langle\lambda + 2\mu\rangle^2}\left[10pA_1\langle\varepsilon\rangle^2 + 3(20A_1 + pA_2)\langle e\rangle^2\right] \quad (3.12)$$

$$p \equiv 8 + 9(2 + \langle\lambda\rangle / \langle\mu\rangle)^2$$

а для механических смесей

$$E_{iikk}(\mathbf{r}) = \frac{\varphi(r)}{15\langle\lambda + 2\mu\rangle^2}(15 D_K\langle\varepsilon\rangle^2 + 4D_\mu\langle e\rangle^2) \quad (3.13)$$

$$D_{ijkl}E_{ijkl}(\mathbf{r}) = \frac{2\varphi(r)}{45\langle\lambda + 2\mu\rangle^2}(30D_K\langle\varepsilon\rangle^2 + pD_\mu\langle e\rangle^2) \quad (3.14)$$

Из выражений (3.10) — (3.14) следует, что радиальная зависимость обеих рассмотренных сверток корреляционных тензоров поля деформаций такая же, как и для корреляционной функции тензора упругих модулей. Корреляционные связи между случайными составляющими объемных или сдвиговых деформаций, вообще говоря, имеют место как при объемной макродеформации, так и при сдвиговой. Однако в некоторых частных случаях корреляционные связи упрощаются. Так, для поликристаллов кубической структуры $A_1 = 0$, что приводит к отсутствию случайной составляющей упругого поля при объемных деформациях.

Для механических смесей сомножителями перед $\langle\varepsilon\rangle^2$ и $\langle e\rangle^2$ стоят автокорреляционные коэффициенты соответствующих упругих модулей. Последнее означает, что для появления случайной составляющей сдвиговых деформаций при $\langle\varepsilon\rangle = 0$ необходимо, чтобы модули сдвига компонентов были различны. При совпадающих модулях сдвига случайная составляющая сдвиговых деформаций также может возникнуть, однако, для этого необходимо, чтобы $\langle\varepsilon\rangle \neq 0$. Аналогичное утверждение имеет место и для случайной составляющей объемных деформаций.

Корреляционные связи между поворотами отдельных зерен учитываются функцией $\Omega_{ij}$. Ее свертка имеет вид

$$\Omega_{ii}(\mathbf{r}) = \frac{F_2}{2\langle\mu\rangle^2}\varphi(r) \quad (3.15)$$

Отсюда для поликристалла и механической смеси, соответственно получим

$$\Omega_{ii}(\mathbf{r}) = \frac{\varphi(r)}{1800\langle\mu\rangle^2}(10A_1\langle\varepsilon\rangle^2 + 3A_2\langle e\rangle^2) \tag{3.16}$$

$$\Omega_{ii}(\mathbf{r}) = \frac{D_\mu}{10\langle\mu\rangle^2}\varphi(r)\langle e\rangle^2 \tag{3.17}$$

Выражение $\Omega_{ii}$ можно рассматривать как скалярное произведение случайных векторов, взятых в точках $\mathbf{r}+\rho$ и $\rho$. Легко видеть, что корреляционная функция, построенная на базе векторного произведения соответствующих векторов, обращается в нуль: $e_{ijk}\Omega_{jk} = 0$. Последнее является следствием принятой модели квазиизотропности пространства, в силу чего $\Omega_{ij}(\mathbf{r}) = \Omega_{ji}(\mathbf{r})$.

Аналогичные соотношения могут быть записаны и для корреляционной функции тензора напряжений. Координатная зависимость соответствующих сверток также описывается функцией $\varphi(r)$. Последнее следует из соотношений:

$$S_{iikk}(\mathbf{r}) = 2(3\eta + 2\zeta + F_2)\varphi(r), \qquad D_{ijkl}S_{ijkl}(\mathbf{r}) = {}^4/_3(4\zeta + 5F_2)\varphi(r) \tag{3.18}$$

В случае поликристалла свертки корреляционного тензора поля напряжений имеют вид

$$S_{iikk}(\mathbf{r}) = \frac{\varphi(r)}{225\langle\lambda+2\mu\rangle^2}[30\langle K\rangle^2 A_1\langle\varepsilon\rangle^2 + (40\langle\mu\rangle^2 A_1 + 9\langle K\rangle^2 A_2)\langle e\rangle^2] \tag{3.19}$$

$$D_{ijkl}S_{ijkl}(\mathbf{r}) = \frac{\varphi(r)}{2025\langle\lambda+2\mu\rangle^2}[10qA_1\langle\varepsilon\rangle^2 + 3(40\langle\mu\rangle^2 A_1 + qA_2)\langle e\rangle^2]$$

$$q \equiv 27\langle K\rangle^2 + 48\langle K\mu\rangle + 32\langle\mu\rangle^2 \tag{3.20}$$

Для механических смесей, соответственно, получим

$$S_{iikk}(\mathbf{r}) = \frac{4\varphi(r)}{5\langle\lambda+2\mu\rangle^2}(20\langle\mu\rangle^2 D_K\langle\varepsilon\rangle^2 + 3\langle K\rangle^2 D_\mu\langle e\rangle^2) \tag{3.21}$$

$$D_{ijkl}S_{ijkl}(r) = \frac{4\varphi(r)}{45\langle\lambda+2\mu\rangle^2}(60\langle\mu\rangle^2 D_K\langle\varepsilon\rangle^2 + qD_\mu\langle e\rangle^2) \tag{3.22}$$

4. Сопоставим флуктуационные характеристики полей напряжений и деформаций. Для этого введем безразмерные частичные корреляционные функции

$$E_\varepsilon = (\varepsilon^\varepsilon_{iikk})^{1/2}, \qquad E_e = (D_{ijkl}\varepsilon^e_{ijkl})^{1/2} \tag{4.1}$$

$$S_\varepsilon = \frac{1}{3\langle K\rangle\langle\varepsilon\rangle}(S^\varepsilon_{iikk})^{1/2}, \qquad S_e = \frac{1}{2\langle\mu\rangle\langle e\rangle}(D_{ijkl}S^e_{ijkl})^{1/2}$$

Здесь индекс у функций $E$ и $S$ указывает, какая из составляющих тензора деформаций (сдвиговая $e$ или объемная $\varepsilon$) считается отличной от нуля. Таким образом, при $r = 0$ функция $E_\varepsilon$ дает относительную пространственную флуктуацию объемных деформаций, возникающую при деформировании без сдвига, а $E_e$ — относительную флуктуацию сдвиговых деформаций, возникающую при деформировании без изменения среднего объема материала.

Вычисляя $E$ и $S$ для механических смесей, получим

$$E_\varepsilon^2 = \frac{D_K\varphi(r)}{\langle\lambda+2\mu\rangle^2}, \qquad E_e^2 = \frac{2pD_\mu\varphi(r)}{45\langle\lambda+2\mu\rangle^2}$$

$$S_\varepsilon^2 = \frac{16\langle\mu\rangle^2 D_K\varphi(r)}{9\langle K\rangle^2\langle\lambda+2\mu\rangle^2}, \qquad S_e^2 = \frac{qD_\mu\varphi(r)}{45\langle\mu\rangle^2\langle\lambda+2\mu\rangle^2} \tag{4.2}$$

Отсюда отношение безразмерных частичных корреляционных функций полей напряжений и деформаций равно

$$\frac{S_\varepsilon}{E_\varepsilon}=\frac{4\langle\mu\rangle}{3\langle K\rangle},\qquad \frac{S_e}{E_e}=\frac{1}{\langle\mu\rangle}\left(\frac{q}{2p}\right)^{1/2} \tag{4.3}$$

Из выражения (4.3) видно, что относительные пространственные флуктуации полей напряжений и деформаций совпадают лишь в случае $\langle K\rangle={}^4/_3\,\langle\mu\rangle$. Для объемных деформаций отношение безразмерных частичных корреляционных функций дает непосредственно коэффициент ${}^4/_3\,\langle\mu\rangle\,\langle K\rangle^{-1}$, а для сдвиговых деформаций в этом можно убедиться, подставив в (4.3) явные значения $p$ и $q$:

$$\frac{S_e}{E_e}=\left[1+\frac{\langle 3K-4\mu\rangle\,\langle 3K+4\mu\rangle}{9\,\langle K\rangle^2+24\,\langle K\rangle\,\langle\mu\rangle+24\,\langle\mu\rangle^2}\right]^{1/2} \tag{4.4}$$

Второй предельный случай — относительные пространственные флуктуации упругого поля при чистом сдвиге и сдвиговые флуктуации при объемных деформациях. Обозначая

$$\varepsilon_*=(E_{iikk}^{e})^{1/2},\qquad e_*=(D_{ijkl}E_{ijkl}^{\varepsilon})^{1/2},\qquad \sigma_*=(S_{iikl}^{e})^{1/2},\qquad s_*=(D_{ijkl}S_{ijkl}^{\varepsilon})^{1/2} \tag{4.5}$$

найдем связь между характеристиками случайных полей напряжений и деформаций

$$\sigma_*=3\,\langle K\rangle\,\varepsilon_*,\qquad s_*=2\,\langle\mu\rangle e_* \tag{4.6}$$

Отметим, что в частном случае $\mu=0$ (предельный переход к эмульсии или смеси полимеров, обладающих текучестью, после полной релаксации напряжений), корреляционный тензор напряжений $S_{ijkl}$, как и следовало ожидать, обращается в нуль, а свертки корреляционного тензора деформаций имеют вид

$$E_{iikk}={}^3/_4D_{ijkl}E_{ijkl}=\langle K\rangle^{-2}D_K\,\langle\varepsilon\rangle^2\,\varphi(r) \tag{4.7}$$

Для поликристаллов вместо выражений (4.1) будем иметь

$$E_\varepsilon^{\,2}=S_\varepsilon^{\,2}=\frac{2A_1\varphi(r)}{135\,\langle\lambda+2\mu\rangle^2},\qquad E_e^{\,2}=\frac{(20A_1+pA_2)\,\varphi(r)}{1350\,\langle\lambda+2\mu\rangle^2} \tag{4.8}$$

$$S_e^{\,2}=\frac{(40\,\langle\mu\rangle^2A_1+qA_2)\,\varphi(r)}{2700\,\langle\mu^2\rangle\,\langle\lambda+2\mu\rangle^2}$$

Отсюда видно, что в отличие от смесей изотропных компонентов, относительные пространственные флуктуации объемных напряжений и деформаций для всех поликристаллов совпадают. Безразмерные относительные корреляционные функции для сдвиговых составляющих упругого поля при чисто сдвиговых макродеформациях будут совпадать, как и для механических смесей, лишь при условии $\langle K\rangle={}^4/_3\,\langle\mu\rangle$. Чтобы убедиться в последнем, достаточно представить отношение $S_e/E_e$ в виде

$$\frac{S_e}{E_e}=\left[1+\frac{\langle 3K-4\mu\rangle\,\langle 3K+4\mu\rangle\,A_2}{2\,\langle\mu\rangle^2\,(20\,A_1+pA_2)}\right]^{1/2} \tag{4.9}$$

Для характеристик случайных объемных составляющих упругого поля, возникающих при средних сдвиговых деформациях, а также случайных сдвиговых деформаций и напряжений, возникающих при объемном деформировании поликристалла, вместо выражений (4.6) будем иметь

$$\sigma_* = 3\langle K\rangle \varepsilon_* \left[1 - \frac{5A_1\langle 3K-4\mu\rangle\langle 3K+4\mu\rangle}{9\langle K\rangle^2(5A_1+2A_2)}\right]^{1/2} \tag{4.10}$$

$$s_* = 2\langle\mu\rangle e_* \left[1 - \frac{\langle 3K-4\mu\rangle\langle 3K+4\mu\rangle}{9\langle K\rangle^2+24\langle K\rangle\langle\mu\rangle+24\langle\mu\rangle^2}\right]^{1/2} \tag{4.11}$$

Выражения (4.10), (4.11) приводятся к виду (4.6) при $\langle K\rangle = {}^4/_3\langle\mu\rangle$.

Как отмечено выше, для сверток корреляционных тензоров упругого поля координатная зависимость такая же, как и для бинарной корреляционной функции тензора упругих модулей. Однако для произвольных компонент корреляционных тензоров упругого поля эта зависимость оказывается более сложной. Общее выражение тензоров второго и четвертого рангов в квазиизотропном пространстве имеет вид [7,8]

$$T_{ij}(\mathbf{r}) = T_1(r)\delta_{ij} + T_2(r)\psi_{ij} \tag{4.12}$$

$$T_{ijkl}(\mathbf{r}) = T_1(r)\delta_{ij}\delta_{kl} + T_2(r)D_{ijkl} + T_3(r)(\delta_{ij}\psi_{kl} + \psi_{ij}\delta_{kl}) + T_4(r)n_{(i}\delta_{j)(k}n_{l)} + T_5(r)\psi_{ijkl} \tag{4.13}$$

$$\psi_{ij} \equiv n_i n_j, \qquad \psi_{ijkl} \equiv n_i n_j n_k n_l, \qquad \mathbf{n} \equiv \mathbf{r}/r \tag{4.14}$$

Найдем явный вид функций $T_1(r)$ и $T_2(r)$ для корреляционного тензора $\Omega_{ij}$. Подставляя выражение (2.13) в (2.24), получим

$$\Omega_{ij}(\mathbf{r}) = \Omega_1(r)\delta_{ij} + \Omega_2(r)\psi_{ij} \tag{4.15}$$

$$\Omega_1(r) = \frac{F^2}{4\langle\mu\rangle^2}[\varphi(r) + \varphi_*(r)], \qquad \Omega_2(r) = -\Omega_1(r) - \frac{F_2}{2\langle\mu\rangle^2}\varphi_*(r) \tag{4.16}$$

$$\varphi_*(r) \equiv \frac{a}{r}\left[\left(1 + \frac{2a}{r} + \frac{2a^2}{r^2}\right)\varphi(r) - \frac{2a^2}{r^2}\right] \tag{4.17}$$

Нетрудно видеть, что свертка $\Omega_{ii}$ приводит к формуле (3.15). Из выражений (4.16) и (4.17) следует, что в предельных случаях $r \to 0$ и $r \to \infty$ функции $\Omega_1$ и $\Omega_2$ равны

$$\Omega_1(0) = \frac{F_2}{6\langle\mu\rangle^2}, \qquad \Omega_2(0) = \frac{F_2}{16\langle\mu\rangle^2}r, \qquad \Omega_2(\infty) = -3\Omega_1(\infty) = \frac{3F_2a^3}{2\langle\mu\rangle^2}\frac{1}{r^3} \tag{4.18}$$

т. е. в пределе $r = 0$ второе слагаемое в выражении (4.15) исчезает, а при $r \to \infty$ убывание функций $\Omega_i(r)$ более слабое, чем экспонента, которой описывается $\varphi(r)$.

Аналогичным образом могут быть получены функции $T_i(r)$ для корреляционных тензоров четвертого ранга полей деформаций и напряжений $E_{ijkl}(r)$ и $S_{ijkl}(r)$.

Поступила 10 VII 1967

Московский институт электронной техники

ЛИТЕРАТУРА


1. Даринский Б. М., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. О вычислении упругих модулей поликристаллов. ПМТФ, 1967, № 5.
2. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. К теории упругих свойств поликристаллов. Ж. эксперим. и теор. физ., 1946, т. 16, вып. 1.
3. Ломакин В. А. О деформировании микронеоднородных упругих тел. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
4. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Упругие модули текстурированных материалов. Инж. ж., МТТ, 1967, № 1.
5. Даринский Б. М., Шермергор Т. Д. Температурная релаксация в поликристаллах с кубической структурой. Физ. металлов и металловедение, 1964, т. 18, № 5.
6. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. О рассеянии рентгеновских лучей упруго-деформированными поликристаллами. Ж. эксперим. и теор. физ., 1947, т. 17, вып. 6.
7. Robertson H. P. The invariant theory of isotropic turbulence. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1940, vol. 36, p. 209.
8. Ломакин В. А. Статистическое описание напряженного состояния деформируемого тела. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.