

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗОМ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМ ПРЯМОЙ РАЗДЕЛА

А. А. Храпков

(Ленинград)

Полное решение для произвольных граничных условий в напряжениях на берегах разреза строится из частного решения о действии заданной разности напряжений и общего решения задачи о действии заданных равных по величине напряжений на берегах разреза. Последняя эквивалентна двум различным задачам для составной (из двух прямоугольных клиньев с различными упругими характеристиками) полуплоскости со смешанными граничными условиями, сводящимися к одному и тому же уравнению Винера—Хопфа, разрешаемому путем факторизации ядра [1].

Решение для нагрузки вида r^m ($m \geq 0$ — целое) получается в замкнутой форме и при необходимости легко обобщается для нагрузки в виде полинома или степенного ряда с радиусом сходимости, превышающим длину разреза. Приведены выражения коэффициентов интенсивности напряжений ($m = 0-3$), а также их асимптотические значения ($m \geq 4$).

§ 1. Постановка задачи. Решение задачи для клина с разрезом на биссектрисе в случае равенства приложенных к берегам разреза напряжений при помощи сведения пары интегральных уравнений к уравнению Фредгольма дано в [2], а в случае произвольных значений напряжений на берегах разреза при помощи функционального уравнения Винера — Хопфа с записью решения задачи сопряжения в общем виде — в [3].

Полуплоскость с надрезом, перпендикулярным к границе, рассматривалась в [4-7]. В работе [4] получено функциональное уравнение Винера — Хопфа данной задачи и вычислена величина высвобождающейся энергии для разреза в поле внецентренного растяжения; в [5,6] рассматривался случай простого растяжения, а в [7] дано общее решение задачи с предварительным выделением частного решения соответствующего разности напряжений на берегах разреза.

Пусть область, занятая упругим телом, представляет собой кусочно-однородную плоскость S с разрезом вдоль отрезка $[0, 1]$ оси Ox (фиг. 1). Упругие постоянные правой и левой полуплоскостей $S_{1,2}$ обозначим, соответственно, $(\mu, \kappa; E, \nu)_{1,2}$. Граничные напряжения в точках берегов разреза $y = \pm 0$ определим равенствами

$$\begin{aligned} (Y_y - iX_y)_+(t) &= s(t) + q(t) \\ (Y_y - iX_y)_-(t) &= s(t) - q(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $s(t)$, $q(t)$ — ограниченные комплексные функции, причем

$$q(0) = q(1) = 0$$

Построим некоторое частное решение задачи с равными нулю на бесконечности напряжениями, удовлетворяющее в точках разреза условию

$$(Y_y - iX_y)_+(t) - (Y_y - iX_y)_-(t) = 2q(t) \quad (1.2)$$

Для однородной области S рассматриваемое частное решение задачи можно взять в виде ([8], стр. 441)

$$[\Phi, \Psi]^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 [\Phi, \Psi]^*(z, t) dt, \quad \Phi^*(z, t) = \frac{q(t)}{t-z}, \quad \Psi^*(z, t) = \frac{\overline{q(t)}}{t-z} - \frac{tq(t)}{(t-z)^2} \quad (1.3)$$

Условия равновесия и неразрывности на линии $x = 0$

$$\begin{aligned} \Phi(+0, y) + \overline{(\Phi - z\Phi' - \Psi)(+0, y)} &= \Phi(-0, y) + \overline{(\Phi - z\Phi' - \Psi)(-0, y)} \\ \frac{\kappa_1}{\mu_1} \Phi(+0, y) - \frac{1}{\mu_1} \overline{(\Phi - z\Phi' - \Psi)(+0, y)} &= \frac{\kappa_2}{\mu_2} \Phi(-0, y) - \frac{1}{\mu_2} \overline{(\Phi - z\Phi' - \Psi)(-0, y)} \end{aligned}$$

тождественно выполняются, если положить [9]:

$$\begin{aligned} x \geq 0 \\ \Phi(z) = c_1 K(z) + c_3 L(z), \quad \overline{\Phi(-z)} - z\overline{\Phi'(-z)} - \overline{\Psi(-z)} &= c_1 K(z) - c_4 L(z) \\ x \leq 0 \\ \Phi(z) = c_2 K(z) + c_4 L(z), \quad \overline{\Phi(-z)} - z\overline{\Phi'(-z)} - \overline{\Psi(-z)} &= c_2 K(z) - c_3 L(z) \end{aligned}$$

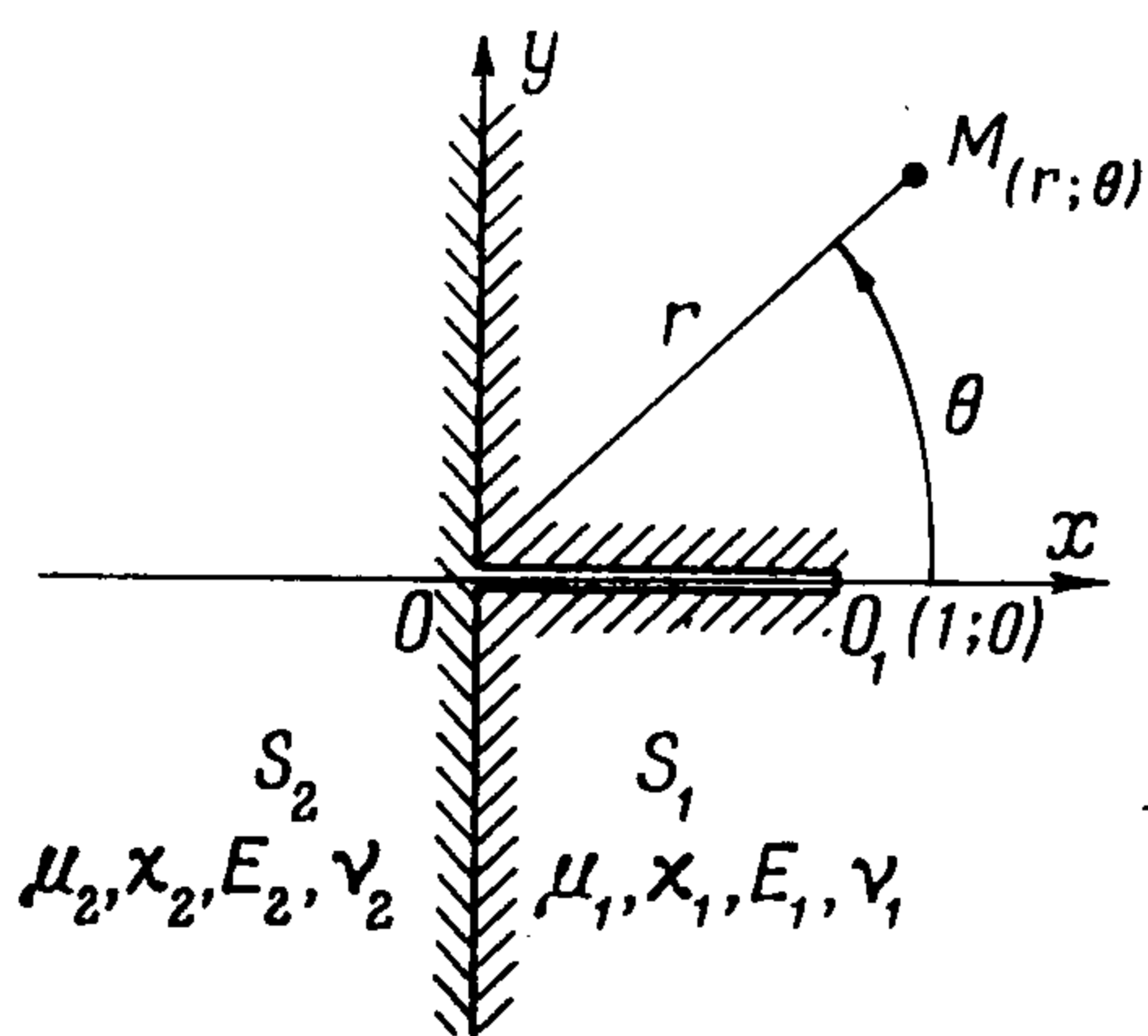
Здесь $K(z)$, $L(z)$ голоморфны в области S ,

$$c_1 = (\kappa_1 + \alpha)^{-1}, \quad c_2 = (1 + \alpha\kappa_2)^{-1}, \quad c_3 = \alpha(\kappa_2 + 1), \quad c_4 = \kappa_1 + 1, \quad \alpha = \mu_1/\mu_2$$

Выделяя и интегрируя в соответствии с (1.3) особенность $[\Phi, \Psi]^*(z, t)$, получим решение задачи (1.2) в виде

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{c_4}{2\pi i \Delta} \int_0^1 \left[\frac{q(t)}{c_1(t-z)} + \frac{q(t)}{c_2(t+z)} - \frac{2t\overline{q(t)}}{c_2(t+z)^2} \right] dt \\ L(z) &= \frac{1}{2\pi i \Delta} \int_0^1 \left[\frac{q(t)}{t-z} - \frac{q(t)}{t+z} + \frac{2t\overline{q(t)}}{(t+z)^2} \right] dt \end{aligned} \quad (1.4)$$

Напряжения в решении (1.4) ограничены всюду, в том числе в точках O и O_1 (так как $q(0) = q(1) = 0$), и обращаются в нуль на бесконечности.



Фиг. 1

Не уменьшая общности, можно в (1.4) положить $q(t) = 0$ и рассмотреть две задачи со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} [Y_y]_+(t) &= [Y_y]_-(t) = \operatorname{Re} s(t) \\ [X_y]_+(t) &= [X_y]_-(t) = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} [Y_y]_+(t) &= [Y_y]_-(t) = 0 \\ [X_y]_+(t) &= [X_y]_-(t) = \operatorname{Im} s(t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Условия (1.5) приводят к симметричному, а (1.6) — к кососимметричному относительно оси x напряженно-деформированному состоянию системы; соответствующие задачи в дальнейшем именуется симметричной и кососимметричной.

Будем искать решения задач, принадлежащие классу напряженно-деформированных состояний, в которых смещения ограничены всюду, а напряжения — всюду, кроме точек O, O_1 , где они имеют полярные особенности (с показателем $1/2$ в точке O_1 и с показателем, зависящим от соотношения упругих постоянных [10], в точке O), и равны нулю на бесконечности. В силу равенства нулю главного вектора усилий, приложенных к берегам разреза, и однозначности смещений, для произвольной точки $M(z)$ ($|z| > 1$) имеют место оценки вида

$$u + iv = O(z^{-1}), \quad X + iY = (X + iY)_0 + O(z^{-1}), \quad X_x, X_y, Y_y = O(z^{-2})$$

где u, v — смещения точки $M(z)$, $X + iY$ — главный вектор усилий на произвольной дуге OM , $(X + iY)_0$ — постоянная.

§ 2. Приведение основных задач к функциональному уравнению Винера — Хопфа. Введем в рассмотрение полярные координаты r, θ (фиг. 1) и связанные с ними величины: напряжения $\sigma_r, \tau_{r\theta}, \sigma_\theta$; смещения u_r, u_θ , а также функции R, Θ вида

$$R + i\Theta = -(X + iY)_0 \exp(-i\theta) + \int_0^r (\tau_{r\theta} + i\sigma_\theta) dr$$

В соответствии с (1.7) при $r > 1$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} f^{(i)} &= O(r^{-1}), \quad f^{(i)} = (u_r, u_\theta, R, \theta)(r, \theta) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ g^{(i)} &= O(r^{-2}), \quad g^{(i)} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}, \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \tau_{r\theta}, \sigma_\theta, \sigma_r \right) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \\ g^{(i)} &= \frac{\partial f^{(i)}}{\partial r} \quad (i = 1, \dots, 4), \quad g^{(5)} = \nu g^{(4)} + E g^{(1)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Величины $f^{(i)}$ всюду ограничены, а величины $g^{(i)}$ ограничены всюду, кроме точек O, O_1 , где они имеют особенности полярного типа. Поэтому существуют трансформанты Меллина вида

$$(\bar{f}, \bar{g})^{(i)}(\theta, p) = \int_0^\infty (f, g)^{(i)}(r, \theta) r^{p-1} dr; \quad \operatorname{Re} p = \beta, \quad \operatorname{Im} p = \lambda \quad (2.2)$$

$$\bar{g}^{(i)}(\theta, p) = -(p-1) \bar{f}^{(i)}(\theta, p-1) \quad (i = 1, \dots, 4)$$

$$\bar{g}^{(5)}(\theta, p) = (\nu \bar{g}^{(4)} + E \bar{g}^{(1)})(\theta, p)$$

При этом функции $\bar{f}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, 4$) голоморфны в полосе $0 < \beta < 1$, а $\bar{g}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, 5$) — в полосе $1 \leq \beta < 2$, в соответствии с (2.1).

Все указанные трансформанты можно представить в виде ([1], стр. 24)

$$(\bar{f}, \bar{g})^{(i)}(\theta, p) = (\bar{f}, \bar{g})_+^{(i)}(\theta, p) + (\bar{f}, \bar{g})_-^{(i)}(\theta, p) \quad (2.3)$$

$$(\bar{f}, \bar{g})_+^{(i)}(\theta, p) = \int_0^1 (f, g)^{(i)}(r, \theta) r^{p-1} dr, \quad (\bar{f}, \bar{g})_-^{(i)}(\theta, p) = \int_1^\infty (f, g)^{(i)}(r, \theta) r^{p-1} dr$$

причем $f_\pm^{(i)}(\theta, p)$ голоморфны, соответственно, в полуплоскостях $\beta > 0, \beta < 1$, а $g_\pm^{(i)}(\theta, p)$ —, соответственно, в полуплоскостях $\beta \geq 1, \beta < 2$.

В симметричной задаче выполнены условия

$$\bar{f}^{(3)}(0, p) = \bar{f}^{(3)}(\pi, p) = \bar{f}^{(2)}(\pi, p) = 0, \quad \bar{f}^{(i)}(\pi/2 - 0, p) = \bar{f}^{(i)}(\pi/2 + 0, p) \quad (2.4)$$

Общее решение задачи нетрудно представить через неизвестную пока трансформанту $\bar{f}^{(2)}(0, p)$. Компонента $\bar{f}^{(4)}(\theta, p)$, например, дается формулами:

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq 1/2\pi \\ \frac{(\kappa_1 + 1) \sin p\pi \bar{f}^{(4)}(\theta, p)}{2\mu_1 \bar{f}^{(2)}(0, p)} &= (p-1) \cos[(p+1)(\pi-\theta)] - (p+1) \cos[(p-1)(\pi-\theta)] + \\ &+ (\alpha-1) c_1 (2p+1) [(p-1) \cos(p+1)\theta + p \cos(p-1)\theta] - (\alpha\kappa_2 - \kappa_1) c_2 \cos(p-1)\theta \\ 1/2\pi \leq \theta \leq \pi \\ \frac{\sin p\pi \bar{f}^{(4)}(\theta, p)}{2\mu_1 \bar{f}^{(2)}(0, p)} &= c_2 (p-1) \cos[(p+1)(\pi-\theta)] + [c_2 p - c_1 (2p+1)] \cos[(p-1)(\pi-\theta)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

причем выражения для остальных компонент $\bar{f}^{(i)}(\theta, p)$ ($i = 1, 2, 3$) вполне аналогичны.

В кососимметричной задаче выполнены условия

$$\bar{f}^{(4)}(0, p) = \bar{f}^{(4)}(\pi, p) = \bar{f}^{(1)}(\pi, p) = 0, \quad \bar{f}^{(i)}(\pi/2 - 0, p) = \bar{f}^{(i)}(\pi/2 + 0, p) \quad (2.6)$$

Компонента $\bar{f}^{(3)}(\theta, p)$ дается формулами

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq 1/2\pi \\ \frac{(\kappa_1 + 1) \sin p\pi \bar{f}^{(3)}(\theta, p)}{2\mu_1 \bar{f}^{(1)}(0, p)} &= -(p+1) \cos[(p+1)(\pi-\theta)] + (p-1) \cos[(p-1)(\pi-\theta)] + \\ &+ (\alpha-1) c_1 (2p-1) [(p+1) \cos(p+1)\theta + p \cos(p-1)\theta] - (\alpha\kappa_2 - \kappa_1) c_2 \cos(p-1)\theta \\ 1/2\pi \leq \theta \leq \pi \\ \frac{\sin p\pi \bar{f}^{(3)}(\theta, p)}{2\mu_1 \bar{f}^{(1)}(0, p)} &= -c_2 (p+1) \cos[(p+1)(\pi-\theta)] - \\ &- [c_2 p - c_1 (2p-1)] \cos[(p-1)(\pi-\theta)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

и вполне аналогичны выражения для других компонент $\bar{f}^{(i)}(\theta, p)$ ($i = 1, 2, 4$), причем трансформанта $\bar{f}^{(1)}(0, p)$ подлежит отысканию.

Граничные условия симметричной задачи даны равенствами.

$$\bar{f}^{(2)}(0, p) = \bar{f}_+^{(2)}(0, p), \quad \bar{f}^{(4)}(0, p) = \bar{f}_-^{(4)}(0, p) + \bar{f}_+^{(4)}(p) \quad (2.8)$$

$$\bar{f}_+^{(4)}(p) = -\frac{Y_0}{p} + \int_0^1 r^{p-1} dr \int_0^r \operatorname{Re} s(t) dt$$

в совокупности с (2.4).

Граничные условия кососимметричной задачи даны равенствами

$$\bar{f}^{(1)}(0, p) = \bar{f}_+^{(1)}(0, p), \quad \bar{f}^{(3)}(0, p) = \bar{f}_-^{(3)}(0, p) + \bar{f}_+^{(3)}(p) \quad (2.9)$$

$$\bar{f}_+^{(3)}(p) = -\frac{X_0}{p} + \int_0^1 r^{p-1} dr \int_0^r \operatorname{Im} s(t) dt$$

в совокупности с (2.6).

Подстановка (2.5) в (2.8) и (2.7) в (2.9) дает одно и то же равенство

$$H^{(\beta)} P_+(p) - Q_-(p) = F_+(p) \quad (0 < \beta < 1), \quad H(p) = \frac{4\mu_1 h(p)}{(\kappa_1 + 1) \sin p\pi} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} h(p) &= \cos p\pi - dp^2 - b, \quad d = -\frac{2(\alpha-1)}{\kappa_1 + \alpha}, \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha-1}{\kappa_1 + \alpha} + \frac{\alpha\kappa_2 - \kappa_1}{1 + \alpha\kappa_2} \right) \\ P_+(p) &= (\bar{f}^{(2)}, \bar{f}^{(1)})(0, p), \quad Q_-(p) = (\bar{f}^{(4)}, \bar{f}^{(3)})_-(0, p), \quad F_+(p) = (\bar{f}^{(4)}, \bar{f}^{(3)})_+(p) \end{aligned}$$

представляющее собой функциональное уравнение Винера — Хопфа для отыскания неизвестных трансформант $P_+(p)$, $Q_-(p)$, причем для определения входящей в выражение $F_+(p)$ постоянной $(Y, X)_0$ необходимо дополнительное условие.

Напряжения $(\sigma_\theta, \tau_{r\theta})(r, 0)$ в соответствующих задачах ограничены] всюду, кроме точки $r = 1$, в окрестности которой имеют особенность вида $(N, T)(r - 1)^{-1/2}$ (N, T — коэффициенты интенсивности нормальных и касательных напряжений), следовательно, главные части функций $(g^{(4)}, g^{(3)})(r, 0)$ при $r > 1$ представимы в виде $(N, T)(\ln r)^{-1/2}$. Поэтому при больших $|p|$ в полуплоскости регулярности ($\beta < 2$) трансформант $(\bar{g}_-^{(4)}(0, p), \bar{g}_-^{(3)}(0, p))$ получаем оценки

$$\begin{aligned} \bar{g}_-^{(4)}(0, p) &= \int_{\ln r=0}^{\infty} g^{(4)}(r, 0) \exp(p \ln r) d \ln r = \frac{N\Gamma(1/2)}{i} p^{-1/2} + O(p^{-1}) \\ \bar{g}_-^{(3)}(0, p) &= \int_{\ln r=0}^{\infty} g^{(3)}(r, 0) \exp(p \ln r) d \ln r = \frac{T\Gamma(1/2)}{i} p^{-1/2} + O(p^{-1}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Аналогичные оценки, в силу ограниченности функций $(g^{(4)}, g^{(3)})(r, 0)$ на интервале $[0, 1]$, имеют место для трансформант $(\bar{g}_-^{(4)}, \bar{g}_-^{(3)})(0, p)$ в полосе $1 \leq \beta < 2$. В соответствии с соотношениями (2.2) для трансформант $(\bar{f}^{(4)}, \bar{f}^{(3)})(0, p)$ в полосе, $0 < \beta < 1$ справедлива оценка вида $O(p^{-3/2})$, а в силу ограниченности $H(p)$ в указанной полосе последняя оценка имеет место также для трансформант $(\bar{f}^{(2)}, \bar{f}^{(1)})(0, p)$. Получаем

$$\bar{f}^{(i)}(0, p) = O(p^{-3/2}) \quad (0 < \beta < 1, i = 1, \dots, 4) \quad (2.12)$$

Отметим один важный частный случай. Пусть при $0 \leq r \leq 1$

$$(g^{(4)}, g^{(3)})_m(r, 0) = r_{\text{вн}}^m \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (2.13)$$

Тогда имеем

$$F_+(p) = -\frac{(Y, X)_0}{p} + \frac{1}{(m+1)(p+m+1)} \quad (2.14)$$

§ 3. [Факторизация функции $H(p)$ и решение уравнения (2.10).

Пусть $p_* = \beta_* + i\lambda_*$ — большой по модулю корень функции $h(p)$

$$\cos \beta_* \pi \operatorname{ch} \lambda_* \pi = d(\beta_*^2 - \lambda_*^2) - b, \quad \sin \beta_* \pi \operatorname{sh} \lambda_* \pi = -2d\beta_* \lambda_* \quad (3.1)$$

Соответствующий анализ показывает, что равенствам (3.1) можно удовлетворить, если выполнены соотношения вида (k — целое)

$$p_* = 2k + iO(\ln k) + O(k^{-1} \ln k) \quad (d > 0)$$

$$p_* = 2k - 1 + iO(\ln k) + O(k^{-1} \ln k) \quad (d < 0)$$

Величины $p_*^-, -p_*, -p_*^+$ (последние две в силу четности $h(p)$) также будут искомыми корнями.

Вблизи начала координат функция $h(p)$ имеет иные, в частности, вещественные корни, количество которых при достаточно малых значениях величины $1 - \alpha$ может быть сколь угодно велико. Однако непосредственными вычислениями легко проверить, что при значениях постоянной α в интервале $(0 \leq \alpha < 1)$ в полосе $0 < \beta < 2k + 1/2$ существуют $2k + 1$

корней функции $h(p)$, а при любых значениях постоянной $1/\alpha$ в интервале $(0 \leq 1/\alpha < 1)$ у той же функции имеется $2k$ корней. Поэтому счетное множество корней с положительными абсциссами может быть пронумеровано следующим образом: $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{2k-1}, p_{2k}, \dots$ ($d > 0$); $p_1, p_2, \dots, p_{2k-1}, p_{2k}, \dots$ ($d < 0$).

Первый корень $p_{0,1}$ всегда есть вещественное число, принадлежащее интервалу $[0,1]$, а при больших k имеют место формулы вида

$$\begin{aligned} p_{2k-1} &= 2k + iO(\ln k) + O(k^{-1} \ln k), & p_{2k} &= \bar{p}_{2k-1} & (d > 0) \\ p_{2k-1} &= 2k - 1 + iO(\ln k) + O(k^{-1} \ln k), & p_{2k} &= \bar{p}_{2k-1} & (d < 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Корни же с отрицательными абсциссами могут быть пронумерованы аналогично: $p_{-0}^1 = -p_0$ ($d > 0$), $p_{-2k+1} = -p_{2k-1}$, $p_{-2k} = -p_{2k}$ ($k = 1, 2, \dots$)

Как показано в [11], в силу соотношений (3.2), бесконечные произведения вида

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{p_{2k-1}}\right) \left(1 + \frac{p}{p_{2k}}\right) \left(1 + \frac{p}{2k}\right)^{-2} & \quad (d > 0) \\ \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{p_{2k-1}}\right) \left(1 + \frac{p}{p_{2k}}\right) \left(1 + \frac{p}{2k-1}\right)^{-2} & \quad (d < 0) \end{aligned}$$

ходятся абсолютно и равномерно в полуплоскостях $\beta > -p_{0,1}$. При этом рассматриваемые бесконечные произведения стремятся к конечным пределам, когда $|p| \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях. С учетом формулы

$$[\Gamma(p)]^{-1} = pe^{Cp} \prod_k \left(1 + \frac{p}{k}\right) \exp \frac{-p}{k}$$

(C — постоянная Эйлера — Маскерони) и вытекающих из нее тождественных соотношений

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{2k}\right) \exp \frac{-p}{2k} &= 2e^{-Cp/2} [p\Gamma(1/2p)]^{-1} \\ \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{2k-1}\right) \exp \frac{-p}{2k-1} &= e^{-Cp/2} \Gamma(1/2p) [2\Gamma(p)]^{-1} \end{aligned}$$

Приходим к заключению о том, что бесконечные произведения вида

$$\begin{aligned} \Pi_1(p) &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{p_{2k-1}}\right) \left(1 + \frac{p}{p_{2k}}\right) \exp \frac{-p}{k} & (d > 0) \\ \Pi_2(p) &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{p_{2k-1}}\right) \left(1 + \frac{p}{p_{2k}}\right) \exp \frac{-2p}{2k-1} & (d < 0) \end{aligned}$$

сходятся абсолютно и равномерно в рассматриваемых полуплоскостях, и при $|p| \rightarrow \infty$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \Pi_1(p) &= e^{-Cp} [p\Gamma(1/2p)]^{-2} O(1) & (d > 0) \\ \Pi_2(p) &= e^{-Cp} [\Gamma(1/2p)]^2 [\Gamma(p)]^{-2} O(1) & (d < 0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Функцию $h(p)$ факторизуем следующим образом:

$$h(p) = h_+(p) h_-(p), \quad h_-(p) = h_+(-p)$$

$$h_+(p) = \begin{cases} (1-b)^{1/2} 2^{-p} e^{Cp} (p_0 + p/p_0) \Pi_1(p) & (d > 0) \\ (1-b)^{1/2} 2^p e^{Cp} \Pi_2(p) & (d < 0) \end{cases} \quad (3.4)$$

С учетом известной формулы $\pi / \sin p\pi = \Gamma(p) \Gamma(1-p)$ факторизуем, далее, функцию $H(p)$

$$H(p) = \frac{H_+(p)}{H_-(p)}, \quad H_-(p) = -\frac{1}{pH_+(-p)} \quad (3.5)$$

$$H_+(p) = \left[\frac{4\mu_1}{\pi(\kappa_1 + 1)} \right]^{1/2} \Gamma(p) h_+(p), \quad H_-(p) = \left\{ \left[\frac{4\mu_1}{\pi(\kappa_1 + 1)} \right]^{1/2} \Gamma(1-p) h_-(p) \right\}^{-1}$$

причем $H_+(p)$ регулярна при $\beta > 0$, а $H_-(p)$ — при $\beta < p_{0,1}$. При больших $|p|$ имеют место оценки, непосредственно вытекающие из (3.3) — (3.5)

$$H_+(p) = \frac{2^{-p} e^{Cp} (1 + p/p_0) e^{-Cp} \Gamma(p)}{[p\Gamma(p/2)]^2} O(1) = \frac{2^{-p} \Gamma(p)}{p[\Gamma(p/2)]^2} O(1) \quad (d > 0)$$

$$H_-(p) = \frac{2^p e^{Cp} [\Gamma(p/2)]^2 e^{-Cp} \Gamma(p)}{[\Gamma(p)]^2} O(1) = \frac{2^p [\Gamma(p/2)]^2}{\Gamma(p)} O(1) \quad (d < 0)$$

С использованием формулы удвоения гамма-функции имеем

$$H_+(p) = \frac{\Gamma(p/2 + 1/2)}{p\Gamma(p/2)} O(1) \quad (d > 0), \quad H_-(p) = \frac{\Gamma(p/2)}{\Gamma(p/2 + 1/2)} O(1) \quad (d < 0)$$

Применяя формулу Стирлинга, получим

$$\Gamma(p/2 + 1/2) \sim (p/2)^{1/2} \Gamma(p/2), \quad H_+(p) \sim p^{-1/2} [G + o(1)] \quad (3.6)$$

$$H_-(p) \sim p^{-1/2} [(iG)^{-1} + o(1)]$$

где G — постоянная, подлежащая определению. В полосе регулярности $0 < \beta < p_{0,1}$ функций $H(p)$, $H_{\pm}(p)$ имеем, в силу (3.5), (3.6), при больших $|p|$

$$H(p) = iG^2 + o(1) \quad (3.7)$$

Из равенств (2.10) и (3.7) получаем для постоянной G значение $G = [4\mu_1 / (\kappa_1 + 1)]^{1/2}$ и приходим к следующим асимптотическим формулам:

$$(|p| \rightarrow \infty) H_+(p) \sim \left(\frac{4\mu_1}{\kappa_1 + 1} \right)^{1/2} p^{-1/2}, \quad H_-(p) \sim -i \left(\frac{4\mu_1}{\kappa_1 + 1} \right)^{-1/2} p^{-1/2} \quad (3.8)$$

Переходим к решению функционального уравнения (2.10). Имеем в полосе $0 < \beta < p_{0,1}$

$$H_+(p) P_+(p) - H_-(p) Q_-(p) = H_-(p) F_+(p) \quad (3.9)$$

С учетом (2.8), (2.9) и соотношения (3.8) получаем для $H_-(p) F_+(p)$ оценку $O(p^{-3/2})$. В любой внутренней полосе $0 < \beta_- \leq \beta \leq \beta_+ < p_{0,1}$ имеем [1]

$$H_-(p) F_+(p) = E_+(p) + E_-(p) \quad (3.10)$$

Здесь $E_{\pm}(p)$ регулярны, соответственно, в полуплоскостях $\beta \geq \beta_-$ и $\beta \leq \beta_+$. Получаем ([1], стр. 49)

$$H_+(p) P_+(p) - E_+(p) = J(p), \quad H_-(p) Q_-(p) + E_-(p) = J(p) \quad (3.11)$$

где $J(p)$ — функция, аналитическая на всей плоскости p . Предположим, что выполнено условие

$$[E_{\pm}(p) = o(1) (|p| \rightarrow \infty) \quad (3.12)$$

Тогда, в силу (2.20) и (3.8), $J(p) \equiv 0$ и, далее, имеем по (3.11)

$$H_+(p) P_+(p) - E_+(p) = 0 \quad (3.13)$$

$$H_-(p) Q_-(p) + E_-(p) = 0 \quad (3.14)$$

Складывая (3.10) и (3.14), получаем соотношение

$$H_-(p) (\bar{f}^{(4)}, \bar{f}^{(3)})(0, p) - E_+(p) = 0 \quad (3.15)$$

так как $F_+(p) + Q_-(p) = (\bar{f}^{(4)}, \bar{f}^{(3)})(0, p)$ в соответствии с (2.10). Таким образом, условие (3.12), с учетом (3.13) и (3.15), приводит к следующему решению задачи:

$$(\bar{f}^{(2)}, \bar{f}^{(1)})(0, p) = \frac{E_+(p)}{H_+(p)}, \quad (\bar{f}^{(4)}, \bar{f}^{(3)})(0, p) = \frac{E_+(p)}{H_-(p)} \quad (3.16)$$

Рассмотрим теперь частный случай нагрузки на разрез в виде степени с целым показателем, определенной равенствами (2.13), (2.14). Имеем

$$E_+(p) = -\frac{H_-(0)(Y, X)_0}{p} + \frac{H_-(m-1)}{(m+1)(p+m+1)} \quad (3.17)$$

$$E_-(p) = H_-(p) \left[-\frac{(Y, X)_0}{p} + \frac{1}{(m+1)(p+m+1)} \right] - E_+(p)$$

Отсюда непосредственно вытекает, что соотношение (3.12) выполнено и равенства (3.16) справедливы.

В соответствии с (2.12) левые части равенств (3.16) имеют при $|p| \rightarrow \infty$ порядок $O(p^2)$, и такой же порядок должны иметь правые части, что дает, с учетом (3.8)

$$-H_-(0)(Y, X)_0 + \frac{H_-(m-1)}{m+1} = 0 \quad (3.18)$$

Целесообразно исключить постоянные $(Y, X)_0$ из (3.17) и (3.18); при этом получим окончательно

$$E_+(p) = -\frac{H_-(m-1)}{p(p+m+1)} \quad (3.19)$$

$$(\bar{f}^{(2)}, \bar{f}^{(1)})(0, p) = -\frac{H_-(m-1)}{p(p+m+1)H_+(p)}, \quad (\bar{f}^{(4)}, \bar{f}^{(3)})(0, p) = -\frac{H_-(m-1)}{p(p+m+1)H_-(p)}$$

С учетом формулы $[\Gamma(p)]^{-1}$ в виде бесконечного произведения и тождества

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \ln 2$$

функциям $H_{\pm}(p)$ можно придать следующий, более удобный для практических вычислений, вид

$$H_+(p) = \left[\frac{4\mu_1(1-b)}{\pi(\kappa_1+1)} \right]^{1/2} \Pi_+(p), \quad H_-(p) = - \left[\frac{4\mu_1(1-b)}{\pi(\kappa_1+1)} \right]^{-1/2} \frac{1}{p\Pi_+(-p)} \quad (3.20)$$

$$\Pi_+(p) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{p_{2k-1}} \right) \left(1 + \frac{p}{p_{2k}} \right) \left(1 + \frac{p}{2k-1} \right)^{-1} \left(1 + \frac{p}{2k} \right)^{-1} \begin{cases} (p_0+p)/p_0p & (d > 0) \\ 1/p & (d < 0) \end{cases}$$

Отметим еще предельный случай $\mu_2 / \mu_1 = 1 / \alpha = 0$ (свободная правая полуплоскость с надрезом). Имеем

$$H(p) = \frac{4\mu_1 h(x)}{(\kappa_1 + 1) \sin p\pi}, \quad h(p) = \cos p\pi + 2p^2 - 1, \quad p_1 = p_{-1} = 0, \quad p_2 = 1$$

Теперь функция $H(p)$ имеет в начале координат не полюс, как это было ранее, а корень, и соответственно изменяются формулы факторизации

$$H(p) = \frac{H_+(p)}{H_-(p)}, \quad H_-(p) = \frac{p}{H_+(-p)}, \quad H_+(p) = \left[\frac{4\mu_1}{\pi(\kappa_1 + 1)} \right]^{1/2} \Gamma(p) h_+(p)$$

$$h_+(p) = (\pi^2 - 4)^{1/2} 2^{p-1/2} e^{(C-2)p} p^2 (1+p) \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{P_{2k-1}} \right) \left(1 + \frac{p}{P_{2k}} \right) e^{-\frac{p}{k}} \quad (3.21)$$

При больших $|p|$ справедливы асимптотические соотношения

$$H_+(p) \sim \left(\frac{4\mu_1}{\kappa_1 + 1} \right)^{1/2} p^{1/2}, \quad H_-(p) \sim -i \left(\frac{4\mu_1}{\kappa_1 + 1} \right)^{-1/2} p^{1/2} \quad (3.22)$$

Если выполнено условие (3.12), то для общего случая нагрузки сохраняют силу формулы (3.16), причем функция $F_+(p)$ определяется соотношениями (2.8), (2.9), в которых следует положить $(Y, X)_0 = 0$. Равенства (3.16) для частного случая нагрузки r^m принимают вид

$$E_+(p) = \frac{H_-(-m-1)}{(m+1)(p+m+1)}, \quad (\bar{j}^{(2)}, \bar{j}^{(1)})(0, p) = \frac{H_-(-m-1)}{(m+1)(p+m+1)H_+(p)}$$

$$(\bar{j}^{(4)}, \bar{j}^{(3)})(0, p) = \frac{H_-(-m-1)}{(m+1)(p+m+1)H_-(p)} \quad (3.23)$$

причем решение (3.23) удовлетворяет условию (2.12), в силу (3.22). ■

§ 4. Концентрация напряжений вблизи концов разреза. В полученном решении для нагрузки степенного вида (3.19), (3.22) трансформанты $\bar{j}^{(i)}(0, p)$ удовлетворяют условию (2.12), и соответствующие функции остаются ограниченными при $\theta = 0$ ($0 \leq r < \infty$), трансформанты же $\bar{g}^{(i)}(0, p)$ имеют порядок $O(p^{-1/2})$ при больших $|p|$, и поэтому соответствующие функции имеют полярную особенность в точке O_1 с показателем полярности $1/2$, как и было обусловлено ранее (§ 1). Для определения коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности точки O_1 $(N, T)_m$ при наличии нагрузки (2.13) получаем, согласно (2.2), (2.11), (3.19), (3.23) в общем и предельном случаях

$$-(N, T)_m = \left[\frac{4\mu_1}{\pi(\kappa_1 + 1)} \right]^{1/2} H_-(-m-1) = \frac{1}{(m+1)\Gamma(m+1)h_+(m+1)} \left(\frac{1}{\alpha} \neq 0 \right)$$

$$-(N, T)_m = - \left[\frac{4\mu_1}{\pi(\kappa_1 + 1)} \right]^{1/2} \frac{H_-(-m-1)}{m+1} = \frac{1}{\Gamma(m+1)h_+(m+1)} \left(\frac{1}{\alpha} = 0 \right)$$

Из (4.1), с учетом (3.8), (3.22), вытекают асимптотические формулы

$$(N, T)_m \sim [\pi(m+1)]^{-1/2} \quad (m \gg 1) \quad (4.2)$$

Для щели длиной l значения коэффициентов интенсивности $(N, T)_m^{(l)}$ суть $(N, T)_m l^{m+1/2}$.

Пусть нагрузка на щель длиной l задана в виде степенного ряда

$$(g^{(4)}, g^{(3)})(r, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m, \quad \rho = \lim |a_m|^{-1/m} > l \quad (0 \leq r \leq l) \quad (4.3)$$

где ρ — радиус сходимости.

Умножение коэффициентов a_m на величины $(N, T)_m$, в силу (4.2), сохраняет неизменной величину ρ , а потому сходится ряд

$$(N, T) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (N, T)_m l^{m+1/2} \quad (4.4)$$

определяющий значения коэффициентов интенсивности напряжения в данном случае (ряды (4.3), (4.4) могут представлять собой, в частности, некоторые полиномы).

Из формул (4.4) следует, что в симметричной задаче длина равновесной трещины, возникшей в основном поле напряжений (4.3) и распространяющейся в правую полуплоскость S_1 , должна удовлетворять соотношению вида [12-14]

$$l^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} a_m N_m l^m \leq \frac{K}{\pi} \quad (4.5)$$

где K — модуль сцепления материала правой полуплоскости.

Переходя к представлению функций $(f, g)^{(i)}(r, \theta)$ ($i = 1, \dots, 4$) на замкнутых интервалах $0 < \varepsilon \leq r \leq r_1 < 1$, $1 < r_2 \leq r \leq \varepsilon^{-1} < \infty$ в виде степенных рядов, дополним, как обычно, контур интегрирования в формулах обращения для

$$(f, g)^{(i)}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_* - i\infty}^{\beta_* + i\infty} (\bar{f}, \bar{g})^{(i)}(\theta, p) r^{-p} dp \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (4.6)$$

$$\bar{f}^{(i)}(\theta, p) \quad (0 < \beta_* < 1), \quad \bar{g}^{(i)}(\theta, p) \quad (1 < \beta_* < 2)$$

полуокружностями $|p| = \text{const}$ в полуплоскостях $\beta < \beta_*$ и $\beta > \beta_*$ для первого и второго интервалов, соответственно. Из (2.5), (2.7) следует, что трансформанты $\bar{f}^{(i)}(\theta, p)$ ($i = 1, \dots, 4$) представимы в виде ($\theta \neq 0$)

$$\bar{f}^{(i)}(\theta, p) = (\bar{f}^{(2)}, \bar{f}^{(1)})(0, p) \csc p\pi \sum_j (c_{j1}^{(i)} p + c_{j0}^{(i)}) (\sin, \cos) [(p \pm 1)\varphi]$$

$$0 < \varphi = (\theta, \pi - \theta) \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi = \pi - \theta \leq \pi/2$$

$$(0 < \theta \leq \pi/2, \quad (\pi/2 \leq \theta \leq \pi)) \quad (4.7)$$

где $(c_{j1}, c_{j0})^{(i)}$ — константы, связанные с упругими постоянными полуплоскостей $S_{1,2}$. Исходя из (4.7), можно получить следующие оценки для интегралов по дополняющим контуры (4.6) полуокружностям ($\theta \neq 0$)

$$|\pi r r^{-p} (\bar{f}, \bar{g})^{(i)}(\theta, p)| \sim (|p|^{1/2}, |p|^{1/2}) \exp[-|p| \min(|\ln r_{1,2}|; \theta)] = o(1)$$

т. е. указанные интегралы с ростом $|p|$ стремятся к нулю равномерно относительно r в рассматриваемых интервалах; при $\theta = 0$ аналогичный результат следует непосредственно из леммы Жордана, так как

$$(\bar{f}, \bar{g})^{(i)}(0, p) = O(p^{-3/2}, p^{-1/2}) \quad (i = 1, \dots, 4)$$

Применение теоремы вычетов для (4.6) приводит, далее, к равенствам вида

$$\begin{aligned} (f, g)^{(i)}(r, \theta) &= \sum' \text{Res} [r^{-p} (\bar{f}, \bar{g})^{(i)}(\theta, p)] & (0 < \varepsilon \leq r \leq r_1 < 1) \\ (f, g)^{(i)}(r, \theta) &= - \sum'' \text{Res} [r^{-p} (\bar{f}, \bar{g})^{(i)}(\theta, p)] & (1 < r_2 \leq r \leq \varepsilon^{-1} < \infty) \end{aligned}$$

где через Σ' и Σ'' обозначены равномерно сходящиеся ряды вычетов выражений $r^{-p} (\bar{f}, \bar{g})^{(i)}(\theta, p)$ ($i = 1, \dots, 4$), распространенные по полюсам трансформант, расположенным, соответственно, в полуплоскостях $\beta < \beta_*$ и $\beta > \beta_*$. Выражения $g^{(i)}(r, \theta)$ могут быть получены непосредственным дифференцированием соответствующих рядов $f^{(i)}(r, \theta)$. \S

Из равенств (4.7) непосредственно вытекает, что полюса трансформант $\bar{f}^{(i)}(\theta, p)$ ($0 < \theta \leq \pi$, $i = 1, \dots, 4$) суть полюса мероморфной функции с сс пл $[\bar{f}^{(2)}, \bar{f}^{(1)}](0, p)$; из равенств же (3.19), (3.5), (3.23), (3.21) следует, что для степенной нагрузки (2.13) эти полюса суть корни функций

$$\frac{(p+m+1)h_+(p)}{\Gamma(-p)} \left(\frac{1}{\alpha} \neq 0 \right) \quad \text{или} \quad \frac{(p+m+1)h_+(p)}{\Gamma(1-p)} \left(\frac{1}{\alpha} = 0 \right)$$

Таким образом, в интервале $1 < r_2 \leq r \leq \varepsilon^{-1} < \infty$ имеют место разложения Лорана ($i = 1, \dots, 4$)

$$f^{(i)}(r, \theta) = - \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} \text{Res} \bar{f}^{(i)}(\theta, k), \quad g^{(i)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k-1} k \text{Res} \bar{f}^{(i)}(\theta, k)$$

справедливые вплоть до бесконечно удаленной точки ($\varepsilon = 0$), в окрестности которой $(f, g)^{(i)}(r, \theta) = O(r^{-1}, r^{-2})$ ($i = 1, \dots, 4$), как и было обусловлено] ранее (1.7). В интервале же $0 < \varepsilon \leq r \leq r_1 < 1$ имеют место разложения ($i = 1, \dots, 4$)

$$\begin{aligned} f^{(i)}(r, \theta) &= r^{m+1} \text{Res} \bar{f}^{(i)}(\theta, -m-1) + \\ &+ \frac{1 + \text{sign } d}{2} r^{p_0} \text{Res} \bar{f}^{(i)}(\theta, -p_0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(i)}(r, \theta) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$f_k^{(i)}(r, \theta) = r^{p_{2k-1}} \text{Res} \bar{f}^{(i)}(\theta, -p_{2k-1}) + r^{p_{2k}} \text{Res} \bar{f}^{(i)}(\theta, -p_{2k})$$

справедливые вплоть до вершины ($\varepsilon = 0$), в окрестности которой $f^{(i)}(r, \theta) = O(r^{p_{0,1}})$, т. е. ограничены (§ 1).

Почленным дифференцированием (4.8) можно получить для $g^{(i)}(r, \theta)$ разложения, представимые в форме ($1/\alpha \neq 0$)

$$g^{(i)}(r, \theta) = r^{p_{0,1}-1} p_{0,1} \text{Res} \bar{f}^{(i)}(\theta, -p_{0,1}) + g_0^{(i)}(r, \theta) \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (4.9)$$

где первые члены суть полярные особенности в точке O (§ 1) с показателем полярности $1 - p_{0,1}$, а вторые члены — равномерно сходящиеся вплоть до $\varepsilon = 0$ разложения ограниченных функций. В предельном случае ($1/\alpha = 0$) $g^{(i)}(r, \theta)$ регулярны, так как $f_1^{(i)}(r, \theta) = \text{const} + r \text{Res} \bar{f}^{(i)}(\theta, -1)$.

Таким образом, во всех случаях решение задачи принадлежит рассматриваемому классу напряженно-деформированных состояний (§ 1).

Коэффициенты интенсивности напряжений $(\bar{N}, \bar{T})_m$ на продолжении разреза $\theta = \pi$ для нагрузки (2.13) даются формулами

$$(\bar{N}, \bar{T})_m = p_{0,1} \text{Res} (\bar{f}^{(4)}, f^{(3)}) (\pi, r - p_{0,1})$$

С учетом соотношений (2.5), (2.7), (3.19), (3.5) и (4.1) получаем

$$\begin{aligned} \bar{N}_m &= N_m (m + 1 - p_{0,1})^{-1} A(p_{0,1}) M(p_{0,1}), & A(p) &= \frac{2p-1}{\kappa_1 + \alpha} - \frac{2p+1}{1 + \alpha\kappa_2} & (4.10) \\ \bar{T}_m &= T_m (m + 1 - p_{0,1})^{-1} B(p_{0,1}) M(p_{0,1}), \end{aligned}$$

$$B(p) = \frac{2p-1}{1 + \alpha\kappa_2} - \frac{2p+1}{\kappa_1 + \alpha}, \quad M(p) = \frac{\kappa_1 + 1}{2} \Gamma(1-p)(p+p_{0,1}) [h_+(p)]^{-1}$$

Для нагрузки (4.3) на щели длиной l имеем

Таблица

κ	α	N _m				p _{0,1}	M(p _{0,1})
		m = 0	m = 1	m = 2	m = 3		
3.00	0	0.456	0.355	0.300	0.265	0.631	1.023
	0.20	0.473	0.362	0.305	0.268	0.560	0.969
	0.40	0.483	0.367	0.307	0.270	0.530	0.955
	0.60	0.489	0.369	0.309	0.271	0.514	0.964
	0.80	0.494	0.372	0.310	0.272	0.505	0.979
	1.00	0.500	0.375	0.312	0.273	0.500	1.000
	1.25	0.510	0.378	0.313	0.274	0.474	0.970
	2.50	0.541	0.390	0.320	0.278	0.398	0.976
	5.00	0.576	0.403	0.326	0.283	0.327	1.007
	10.00	0.614	0.417	0.333	0.288	0.258	1.043
40.00	0.684	0.441	0.346	0.296	0.144	1.096	
∞	0.788	0.475	0.364	0.307			
2.33	0	0.429	0.342	0.293	0.260	0.807	1.147
	0.20	0.451	0.353	0.299	0.265	0.670	0.919
	0.40	0.467	0.360	0.303	0.267	0.601	0.862
	0.60	0.480	0.365	0.307	0.270	0.557	0.841
	0.80	0.490	0.370	0.309	0.271	0.525	0.833
	1.00	0.500	0.375	0.312	0.273	0.500	0.833
	1.25	0.510	0.378	0.313	0.274	0.475	0.812
	2.50	0.543	0.391	0.320	0.279	0.399	0.824
	5.00	0.580	0.405	0.327	0.283	0.323	0.853
	10.00	0.620	0.419	0.335	0.288	0.251	0.880
40.00	0.689	0.443	0.347	0.296	0.138	0.917	
∞	0.788	0.475	0.364	0.307			
1.80	0	0.434	0.344	0.294	0.261	0.710	0.721
	0.20	0.453	0.353	0.299	0.265	0.634	0.694
	0.40	0.467	0.359	0.303	0.267	0.584	0.687
	0.60	0.487	0.365	0.306	0.269	0.550	0.677
	0.80	0.490	0.370	0.309	0.271	0.522	0.693
	1.00	0.500	0.375	0.312	0.273	0.500	0.700
	1.25	0.510	0.378	0.313	0.274	0.477	0.688
	2.50	0.544	0.391	0.320	0.279	0.401	0.706
	5.00	0.583	0.405	0.327	0.284	0.321	0.728
	10.00	0.624	0.421	0.335	0.289	0.246	0.748
40.00	0.693	0.444	0.348	0.297	0.133	0.775	
∞	0.788	0.475	0.364	0.307			
1.00	0	0.433	0.343	0.293	0.260	0.595	0.371
	0.20	0.451	0.351	0.298	0.264	0.574	0.409
	0.40	0.465	0.358	0.302	0.267	0.553	0.440
	0.60	0.478	0.364	0.306	0.269	0.534	0.465
	0.80	0.489	0.369	0.309	0.271	0.516	0.483
	1.00	0.500	0.375	0.312	0.273	0.500	0.500
	1.25	0.511	0.378	0.313	0.274	0.481	0.499
	2.50	0.547	0.392	0.320	0.279	0.408	0.527
	5.00	0.589	0.408	0.329	0.284	0.323	0.540
	10.00	0.635	0.429	0.342	0.293	0.244	0.560
40.00	0.698	0.446	0.349	0.298	0.128	0.588	
∞	0.788	0.475	0.364	0.307			

$$(\bar{N}, \bar{T}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (\bar{N}, \bar{T})_m l^{m+}, \quad (m^* = m + 1 - p_{0,1}) \quad (4.11)$$

где \bar{N}, \bar{T} — коэффициенты интенсивности напряжения при $\theta = \pi$.

В силу (4.10) и (4.2)

$$(\bar{N}, \bar{T})_m \sim m^{-3/2},$$

и радиус сходимости (4.3) при переходе к (4.11) не изменяется.

В таблице приведены значения коэффициентов интенсивности N_m для $m = 0, 1, 2, 3$, а также первых корней $p_{0,1}$ и функций $M(p_{0,1})$. По специальной программе для ЭЦВМ «Урал-2» вначале определялись вещественные корни, а с соответствующего значения k — комплексные корни функции $h(p)$ по методу Ньютона

$$p_*^{(s+1)} = p_*^{(s)} + \Delta p^{(s+1)}$$

$$\Delta p^{(s+1)} = -h(p_*^{(s)}) [h'(p_*^{(s)})]^{-1}$$

$$(s = 0, 1, \dots, s_+)$$

В качестве начального приближения $p_*^{(0)}$ при вычислении комплексных корней принимались их асимптотические значения вида

$$2k + (i/\pi) \ln 8dk^2 \quad (d > 0)$$

$$2k - 1 + (i/\pi) \ln [2d(2k-1)^2]$$

$$(d < 0)$$

Погрешность в вычислении корней не превосходила величины 0.001, а полная погрешность в определении искомых величин — 0.01. При $m \geq 4$ могут быть использованы асимптотические значения $(N, T)_m$ вида (4.2), отличие которых от действительных значений не превосходит величины 0.02.

В предельном случае полуплоскости с надрезом ($1/\alpha = 0$) значение величины $N_0 = 0.788$, приведенное в таблице, хорошо совпадает со значениями, приведенными в [4-7].

Поступила 3 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Н о б л Б. Применение метода Винера — Хопфа к решению дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. S r i v a s t a v R. P. Narain Prem. Certain two-dimensional problems of stress distribution in wedge-shaped elastic solids under discontinuous load. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1965, vol. 61, No. 4, p. 945—954.
3. Б а н ц у р и Р. Д. Решение первой основной задачи теории упругости для клина, имеющего конечный разрез. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 6, стр. 1256—1259.
4. К о i t e r W. T. On the flexural rigidity of a beam, weakened by transverse saw cuts, I—II. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. ser. B, 1956, vol. 59, No. 4, p. 354—364.
5. I r w i n G. R. The crack extension force for a crack at a free surface boundary. NRL Report, 1958, No. 5120.
6. В у е с к н е р Н. F. Some stress singularities and their computation by means of integral equations. In: «Boundary Problems in Different. Equat.», Madison, Univ. Wisconsin Press, 1960, p. 215—230.
7. W y g g l e s w o r t h L. A. Stress distribution in a notched plate. Mathematika, 1957, vol. 4, No. 7, p. 76—96.
8. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
9. Ч е р е п а н о в Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, Механ. и машиностр., 1962, № 1, стр. 131—138.
10. Z a k A. R. Williams M. L. Crack Point stress Singularities at a Bi-Material Interface. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 1, p. 142—143. (Русск. перев.: Тр. Америк. общества инж. механ., сер. E, Прикл. механ., 1963, т. 30, № 1, стр. 169—171).
11. А л ь п е р и н И. Г. Напряжения в бесконечной полосе, равномерно сжатой на половине длины. Уч. зап. Харьковск. ун-та им. А. М. Горького, т. 28, Зап. научно-исслед. ин-та матем. и механ. и Харьковск. матем. об-ва, сер. 4, 1950, т. 20, стр. 109—118.
12. I r w i n G. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Transversing a Plate. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 3.
13. Б а р е н б л а т т Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4, стр. 706—721.
14. Б а р е н б л а т т Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин. Связь с энергетическими теориями. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, стр. 893—900.