Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УПРУГИМ КРЕПЛЕНИЕМ

Н. Х. Арутюнян

(Ереван)

Исследованию напряженного состояния в полуплоскости или в пластине с упругим креплением посвящен ряд работ.

Первая работа в этой области принадлежит Мелану [1]. Он дал точное решение задачи для полуплоскости (или целой плоскости), усиленной бесконечно длинным стержнем, к которому приложена сосредоточенная сила вдоль его оси. В дальнейшем Бюлл [2], Койтер [3] и Браун [4] рассмотрели задачу определения контактных напряжений, действующих между пластиной и связанным с ней полубесконечным стержнем при различных нагрузках, приложенных к концу этого стержня.

Рейсснер [5] первый рассмотрел задачу определения контактных напряжений в полуплоскости с упругим креплением конечной длины и привел решение этой задачи к интегро-дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению Прандтля в теории крыла конечного размаха. Однако решения этого уравнения он не дал. Пфлюгер получил решение этого уравнения для случая, когда верхняя грань упругой накладки, спаянной с полубесконечной пластиной, очерчена по эллиптической дуге.

В дальнейшем Бенскоутнер [6] изучил поле напряжений в пластине с упругим креплением конечной длины, когда на концах его приложены две одинаково или противоположно направленные сосредоточенные силы. Исходное интегро-дифференциальное уравнение задачи он решил численным методом Мультхоппа.

Обоснованию сходимости метода Мультхоппа в применении к уравнению типа Прандтля в теории крыла конечного размаха посвящена работа А. И. Каландия [7].

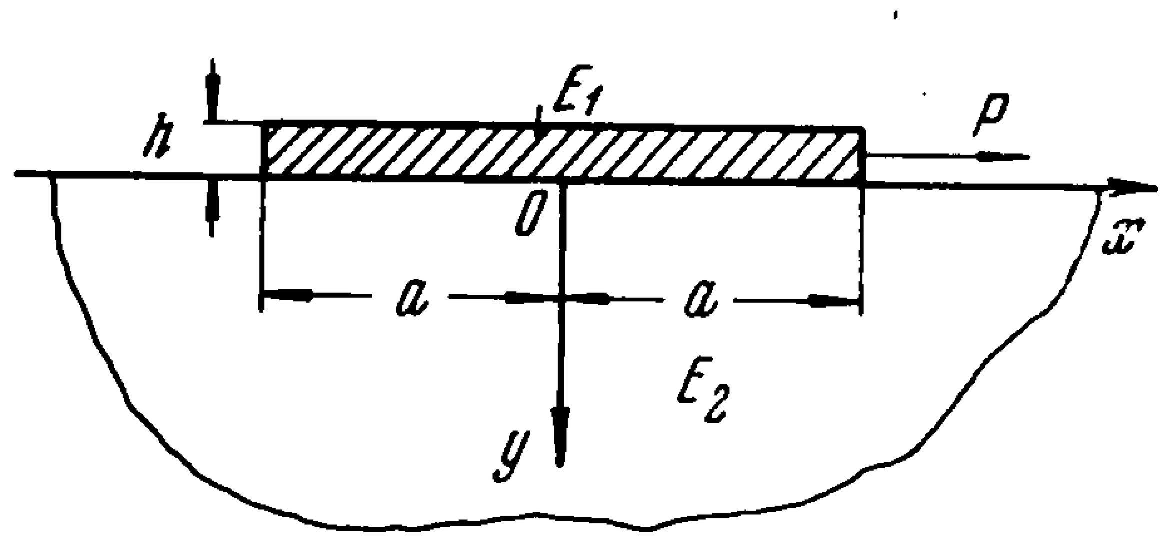
Буфлер [8] подробно изучил напряженное состояние в полуплоскости (или в полной плоскости), когда вдоль конечного отрезка ее свободной поверхности (или, соответственно, внутри нее) припаяна упругая накладка постоянной толщины при различных видах нагружения и температурного воздействия. Для решения исходного интегро-дифференциального уравнения, служащего для определения контактных напряжений между упругой накладкой и полуплоскостью, он применил метод, используемый Карафоли [9,10] в теории крыла конечного размаха.

Здесь следует отметить, что во всех указанных выше случаях, когда упругая накладка имеет конечную длину, полученные решения являются приближенными и, кроме того, эти решения не всегда дают возможность в явном виде раскрыть те особенности, которыми характеризуется напряженное состояние упругой накладки в окрестности ее концов.

В предлагаемой работе рассматривается контактная задача для полуплоскости с упругим креплением конечной длины и постоянной толщины. Решение этой задачи сводится к интегро-дифференциальному уравнению типа Прандтля, позволяющему определить контактные напряжения вдоль линии крепления упругой накладки к полуплоскости. Приводится точное решение этого уравнения, содержащего в явном виде те особенности, которые характеризуют напряженное состояние в окрестности концов упругой накладки.

§ 1. Постановка задачи. Основное уравнение и его решение. Пусть полуплоскость на конечном отрезке $[-a, a]$ ее свободной поверхности усилена упругим креплением в виде приваренной (или приклеенной) накладки постоянной толщины h (фиг. 1). Определим величину и закон распределения контактных усилий вдоль линии крепления упругой накладки к полуплоскости, когда к одному из концов накладки приложена сосредоточенная сила P, направленная вдоль оси накладки. Будем предполагать, что жесткость накладки на изгиб пренебрежимо мала и поэтому можно пренебречь давлением накладки на полуплоскость, т. е. считать, что $\sigma_y^{(1)} \approx 0$.

Иными словами, примем, что накладка находится в одноосном напряженном состоянии. Будем отмечать напряжения, перемещения и деформации в накладке индексом 1, а в полуплоскости — индексом 2. Аналогичным образом будем отмечать и физические константы материалов накладки и полуплоскости.



Фиг. 1

Из уравнения равновесия элемента накладки имеем

$$\sigma_x^{(1)}(x) = \frac{1}{h}\int_{-a}^{x} \tau^{(1)}(s)\,ds \tag{1.1}$$

Здесь $\sigma_x^{(1)}$ — нормальное напряжение, действующее в произвольном поперечном сечении накладки, а $\tau^{(1)}(x)$ — тангенциальное напряжение, действующее на накладку вдоль линии соединения ее с полуплоскостью.

Далее, учитывая, что $\sigma_y^{(1)} \approx 0$, согласно закону Гука, будем иметь

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{du^{(1)}}{dx} = \frac{1}{hE_1}\int_{-a}^{x} \tau^{(1)}(s)\,ds \tag{1.2}$$

Здесь E_1 — модуль упругости материала накладки, h — ее толщина, а $u^{(1)}$ — перемещения вдоль оси x точек плоскости соединения накладки с упругой полуплоскостью.

С другой стороны, известно [11], что деформация $\varepsilon_x^{(2)}$ упругой полуплоскости, когда на конечном отрезке $[-a, +a]$ ее свободной поверхности действуют тангенциальные усилия $\tau^{(2)}(x)$, выражается формулой

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_2}\int_{-a}^{+a} \tau^{(2)}(s)\frac{ds}{s-x} \tag{1.3}$$

Здесь $u^{(2)}$ — перемещения точек свободной поверхности упругой полуплоскости вдоль оси x; $\tau^{(2)}(s)$ — тангенциальное напряжение, действующее на упругую полуплоскость вдоль линии ее контакта с накладкой; E_2 — модуль упругости материала полуплоскости; ν — коэффициент Пуассона.

Условие полного контакта упругой накладки с полуплоскостью в данном случает можно представить в одном из двух видов:

$$\text{(A)}\quad u^{(1)} = u^{(2)}, \qquad \text{(B)}\quad \frac{du^{(1)}}{dx} = \frac{du^{(2)}}{dx} \tag{1.4}$$

при $y = 0$ и $-a \leqslant x \leqslant a$, т. е. на линии контакта упругой накладки с полуплоскостью.

Заметим, что условия (A) и (B) отличаются одно от другого только постоянной интегрирования, которая выражает жесткое смещение полуплоскости в направлении оси x и не влияет на ее напряженное состояние.

Пользуясь соотношениями (1.2) и (1.3) и условием (B), получим

$$\lambda\varphi(x) + \int_{-a}^{+a} \varphi'(x) \frac{ds}{s-x} = 0 \tag{1.5}$$

Здесь

$$\varphi'(x) = \tau(x), \qquad \varphi(x) = \int_{-a}^{x} \tau(s)\,ds, \qquad \tau(x) = \tau^{(1)}(x) = -\tau^{(2)}(x)$$

Здесь $\tau(x)$ — контактное напряжение, действующее между упругой накладкой и полуплоскостью, а

$$\lambda = \frac{\pi E_2}{2(1-\nu^2)E_1 h} \tag{1.6}$$

Таким образом, решение контактной задачи для полуплоскости с упругим креплением конечной длины свелось к решению интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях

$$\varphi(-a) = 0, \qquad \varphi(a) = -P \tag{1.7}$$

Перейдем к решению интегро-дифференциального уравнения (1.5). Предварительно преобразуем его к виду

$$\lambda^*\varphi(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{+a} \varphi'(s)\frac{ds}{s-x} \qquad \left(\lambda^* = -\frac{\lambda}{\pi i},\ \lambda = \frac{\pi E_2}{2(1-\nu^2)E_1 h}\right) \tag{1.8}$$

Здесь интеграл в правой части следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Пользуясь формулой обращения [12], будем иметь

$$\varphi'(x) = \tau(x) = \frac{\lambda^*}{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-s^2}\,\varphi(s)ds}{s-x} + \frac{C_1}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{1.9}$$

В этом равенстве берется та ветвь радикала $\sqrt{a^2-z^2}$, которая принимает положительные значения на верхнем берегу разреза $(-a, +a)$, а C_1 есть некоторая постоянная, подлежащая определению.

Решение интегро-дифференциального уравнения (1.9) будем искать (допуская, что это возможно) в виде ряда

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k\left(\frac{x}{a}\right)^k \tag{1.10}$$

После подстановки (1.10) в (1.9) получим

$$\tau(x) = \frac{C_1}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{\lambda^*}{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a_0}{\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-s^2}\,ds}{s-x} + \frac{\lambda^*}{\sqrt{a^2-x^2}}\sum_{k=1}^{k=\infty} a_k J_k(x) \tag{1.11}$$

где интеграл

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{+a}\left(\frac{s}{a}\right)^k \frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-x}\,ds \tag{1.12}$$

следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Применив формулу Сахоцкого — Племеля [12], запишем интеграл $J_k(x)$ в форме

$$J_k(x) = -\sqrt{a^2-x^2}\left(\frac{x}{a}\right)^k + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{+a}\left(\frac{s}{a}\right)^k \frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-z}\,ds \qquad (z\to x) \quad (1.13)$$

Здесь $z = x + i\varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$, оставаясь всегда положительным.

Рассмотрим далее интеграл, взятый по контуру Γ (фиг. 2):

$$I_k(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{s}{a}\right)^k \frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-z}\,ds \qquad (\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_R,\ \Gamma_a = \gamma_a^{(1)} + \gamma_a^{(2)}) \quad (1.14)$$

Обозначим интеграл, взятый по контуру Γ_a, через $P_k(z)$, т. е.

$$P_k(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_a}\left(\frac{s}{a}\right)^k \frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-z}\,ds \quad (1.15)$$

Тогда, согласно формуле Коши будем иметь

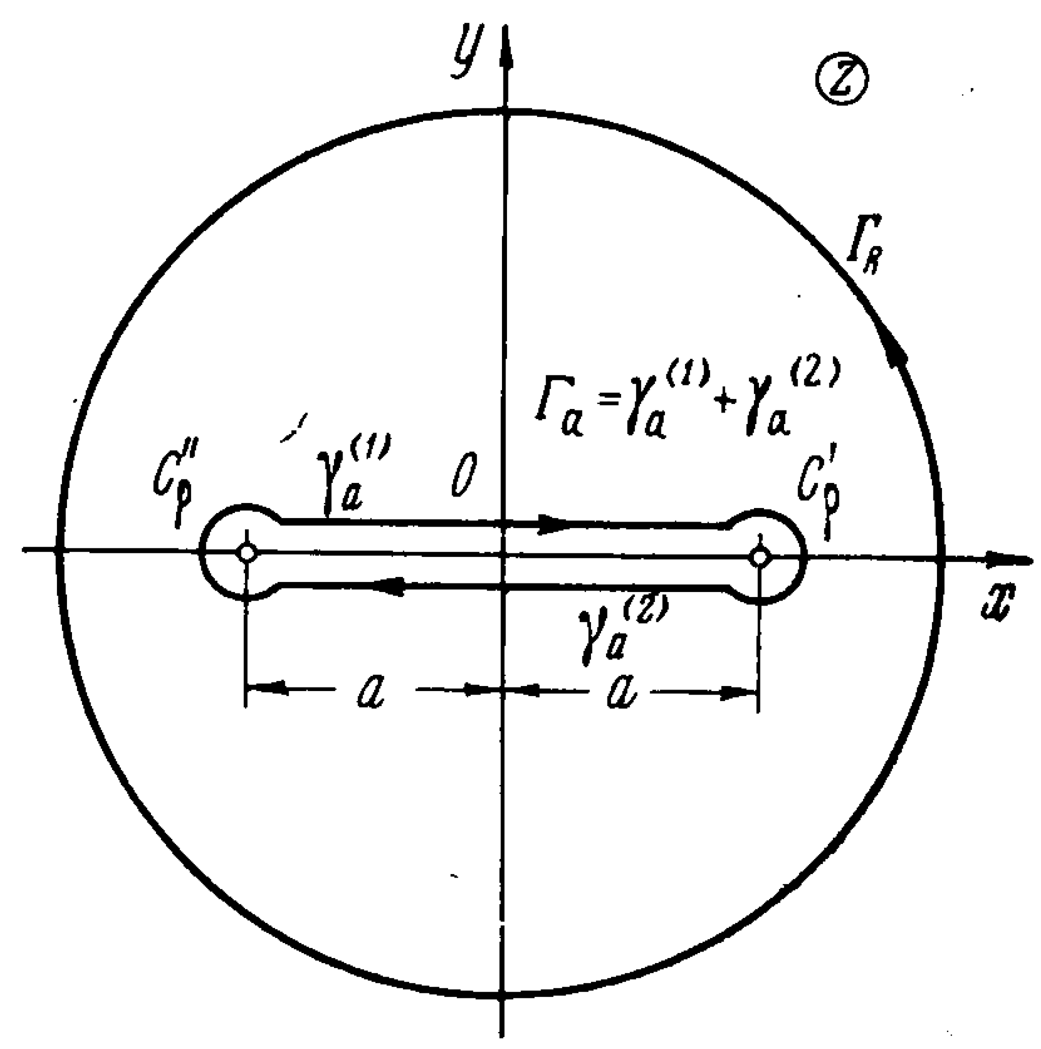
$$P_k(z) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\left(\frac{s}{a}\right)^k \frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-z}\,ds = 2\sqrt{a^2-z^2}\left(\frac{z}{a}\right)^k \quad (1.16)$$

Вычислим теперь интеграл по контуру Γ_R ($|s| > a$), входящий в соотношение (1.16).

Прежде всего заметим, что радикал в числителе подынтегральной функции принимает на обоих берегах разреза $(-a, +a)$ значения, отличающиеся только знаком в геометрически совпадающих точках; кроме того, следует иметь в виду, что для $s > a$ радикал $\sqrt{a^2-s^2} = -i\sqrt{s^2-a^2}$, причем $\sqrt{s^2-a^2} > 0$ для $s > a$.

Воспользуемся теперь разложением

$$\left(1-\frac{a^2}{s^2}\right)^{1/2} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu C_{1/2}^{(\nu)}\left(\frac{a}{s}\right)^{2\nu} \quad (1.17)$$



Фиг. 2

Здесь $C_{1/2}^{(\nu)}$ — коэффициент разложения при $|a/s| < 1$.

Тогда интегралу по Γ_R, входящему в соотношение (1.16), можно придать вид

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\left(\frac{s}{a}\right)^k \frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-z}\,ds = -\frac{a}{\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu C_{1/2}^{(\nu)}\left(\frac{a}{s}\right)^{2\nu}\left(\frac{s}{a}\right)^{k+1}\frac{ds}{s-z} \quad (1.18)$$

Рассмотрим сумму, стоящую под знаком интеграла в правой части (1.18), и обозначим ее через V

$$V = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(-1)^\nu C_{1/2}^{(\nu)}\left(\frac{s}{a}\right)^{k+1-2\nu} \quad (1.19)$$

Очевидно, что неотрицательные степени $(s\,/\,a)$ в сумме (1.19) будут при

$$k+1-2\nu \geqslant 0, \qquad \nu \leqslant \nu_*, \qquad \nu_* = \mathrm{E}\,[{}^1/_2\,(k+1)]$$

Здесь $\mathrm{E}\,[{}^1/_2\,(k+1)]$ есть целая часть от ${}^1/_2\,(k+1)$. Таким образом будем иметь

$$V = \sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_*} (-1)^\nu C_{1/_2}^{(\nu)} \left(\frac{s}{a}\right)^{k+1-2\nu} + \sum_{\nu=\nu_*+1}^{\nu=\infty} (-1)^\nu C_{1/_2}^{(\nu)} \left(\frac{s}{a}\right)^{k+1-2\nu} \tag{1.20}$$

В первой сумме этого соотношения заменим индекс ν на $\mu = k + 1 - 2\nu$; тогда будет

$$\mu = k+1 \quad \text{при } \nu = 0, \qquad \mu_* = k+1-2\mathrm{E}\,[{}^1/_2\,(k+1)] \quad \text{при } \nu = \nu_* \tag{1.21}$$

Очевидно, что если k — четное, то $\mu_* = 1$, а если k — нечетное, то $\mu_* = 0$. Далее, имея в виду, что $\nu = {}^1/_2\,(k+1-\mu)$, первое слагаемое соотношения (1.20) можно представить в виде

$$\sum_{\nu=0}^{\nu_*} (-1)^\nu C_{1/_2}^{(\nu)} \left(\frac{s}{a}\right)^{k+1-2\nu} = \sum_{\mu=0;\,1}^{k+1}{}^{*} (-1)^{1/_2\,(k+1-\mu)} C_{1/_2}^{(1/_2\,[k+1-\mu])} \left(\frac{s}{a}\right)^{\mu} \tag{1.22}$$

где звездочка сверху символа суммы указывает, что индекс суммирования принимает либо четные, либо нечетные значения. Рассмотрим теперь второе слагаемое в соотношении (1.20):

$$\sum_{\nu=\nu_*+1}^{\infty} (-1)^\nu C_{1/_2}^{(\nu)} \left(\frac{s}{a}\right)^{k+1-2\nu} = \sum_{\nu=\mathrm{E}\,[1/_2\,(k+1)]+1}^{\infty} (-1)^\nu C_{1/_2}^{(\nu)} \left(\frac{a}{s}\right)^{2\nu-(k+1)}$$

Введем и здесь новый индекс суммирования $\mu = 2\nu - (k+1)$; тогда будет

$$\begin{gathered} \mu = \infty \quad \text{при } \nu = \infty \\ \mu_* = 2\mathrm{E}\,[{}^1/_2\,(k+1)] - (k-1) \quad \text{при } \nu = \nu_* + 1 = \mathrm{E}\,[{}^1/_2\,(k+1)] + 1 \end{gathered} \tag{1.23}$$

Очевидно, что если k — четное, то $\mu_* = 1$, а если k — нечетное, то $\mu_* = 2$. Заметим, что $\nu = {}^1/_2\,(\mu + k + 1)$; тогда второе слагаемое соотношения (1.20) можно представить в виде

$$\sum_{\nu=\nu_*+1}^{\infty} (-1)^\nu C_{1/_2}^{(\nu)} \left(\frac{s}{a}\right)^{k+1-2\nu} = \sum_{\mu=2;\,1}^{\infty}{}^{*} (-1)^{1/_2\,(k+1+\mu)} C_{1/_2}^{(1/_2\,[k+1+\mu])} \left(\frac{a}{s}\right)^{\mu} \tag{1.24}$$

Теперь числитель подынтегральной функции в выражении (1.18), т. е. соотношение (1.20), можно представить в виде

$$\begin{aligned} V = &\sum_{\mu=0;\,1}^{k+1}{}^{*} (-1)^{1/_2\,(k+1-\mu)} C_{1/_2}^{(1/_2\,[k+1-\mu])} \left(\frac{s}{a}\right)^{\mu} + \\ &+ \sum_{\mu=2;\,1}^{\infty}{}^{*} (-1)^{1/_2\,(k+1+\mu)} C_{1/_2}^{(1/_2\,[k+1+\mu])} \left(\frac{a}{}\right)^{\mu} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Подставляя выражение (1.25) в правую часть интеграла (1.18), получим

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\left(\frac{s}{a}\right)^k\frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-z}\,ds=-\frac{a}{\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{ds}{s-z}\left\{\sum_{\mu=0;\,1}^{k+1}{}^{*}(-1)^{\frac{1}{2}(k+1-\mu)}\times\right.$$

$$\left.\times\, C_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}[k+1-\mu])}\left(\frac{s}{a}\right)^{\mu}+\sum_{\mu=2;\,1}^{\infty}{}^{*}(-1)^{\frac{1}{2}(k+1+\mu)}C_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}[k+1+\mu])}\left(\frac{a}{s}\right)^{\mu}\right\} \qquad (1.26)$$

На основании теоремы о вычетах имеем

$$\int\limits_{\Gamma_R}\frac{ds}{s-z}\left(\frac{s}{a}\right)^{\mu}=2\pi i\left(\frac{z}{a}\right)^{\mu} \qquad (\mu\geqslant 0) \qquad (1.27)$$

$$\int\limits_{\Gamma_R}\frac{ds}{s-z}\left(\frac{a}{s}\right)^{\mu}=0 \qquad (\mu\geqslant 1) \qquad (1.28)$$

Подставляя значения этих интегралов в соотношение (1.26), находим

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\left(\frac{s}{a}\right)^k\frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-z}\,ds=-2ia\sum_{\mu=0;\,1}^{k+1}{}^{*}(-1)^{\frac{1}{2}(k+1-\mu)}C_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}[k+1-\mu])}\left(\frac{z}{a}\right)^{\mu} \qquad (1.29)$$

Далее, пользуясь соотношениями (1.16) и (1.29), получим для $P_k(z)$ следующее выражение:

$$P_k(z)=2\sqrt{a^2-z^2}\left(\frac{z}{a}\right)^k+2ia\sum_{\mu=0;\,1}^{k+1}{}^{*}(-1)^{\frac{1}{2}(k+1-\mu)}C_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}[k+1-\mu])}\left(\frac{z}{a}\right)^{\mu} \qquad (1.30)$$

Но, с другой стороны, согласно (1.15), имеем

$$P_k(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_a^{(1)}}\left(\frac{s}{a}\right)^k\frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-z}\,ds+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_a^{(2)}}\left(\frac{s}{a}\right)^k\frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-z}\,ds \qquad (1.31)$$

Здесь первый интеграл берется по верхнему берегу разреза $\gamma_a^{(1)}$, а второй интеграл — по нижнему берегу разреза $\gamma_a^{(2)}$ (фиг. 2) (очевидно, что интегралы по малым окружностям C_ρ' и C_ρ'' стремятся к нулю при $\rho\to 0$), следовательно,

$$P_k(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{+a}\left(\frac{s}{a}\right)^k\frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-z}\,ds-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{+a}^{-a}\left(\frac{s}{a}\right)^k\frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-z}\,ds \qquad (1.32)$$

Здесь выбрана ветвь радикала $\sqrt{a^2-s^2}$, остающаяся положительной на верхнем берегу разреза $(-a,\ a)$, а тем самым принимающая на нижнем берегу отрицательное значение.

Таким образом, согласно (1.32), имеем

$$P_k(z)=\frac{2}{\pi i}\int\limits_{-a}^{+a}\left(\frac{s}{a}\right)^k\frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-z}\,ds \qquad (1.33)$$

Теперь, пользуясь соотношением (1.33), можно выражение (1.13) для $J_k(x)$ представить в виде

$$J_k(x)=-\sqrt{a^2-x^2}\left(\frac{x}{a}\right)^k+\frac{1}{2}P_k(x) \qquad (1.34)$$

Здесь под $P_k(x)$ подразумевается предельное значение на верхнем берегу разреза $(-a, +a)$ функции $P_k(z)$, определяемой соотношением 1.30) или (1.33).

Подставляя значение $P_k(x)$, определяемое соотношением (1.30), в (1.34) и сокращая $\sqrt{a^2-x^2}\,(x/a)^k$, получим следующую формулу:

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{+a}\left(\frac{s}{a}\right)^k \frac{\sqrt{a^2-s^2}}{s-x}\,ds = ia \sideset{}{^*}\sum_{\mu=0;\,1}^{k+1} (-1)^{1/2(k+1-\mu)}\, C_{1/2}^{(1/2[k+1-\mu])}\left(\frac{x}{a}\right)^{\mu} \tag{1.35}$$

Перейдем теперь к выражению (1.11) для контактного напряжения $\tau(x)$. Предварительно заметим, что входящий в эту формулу интеграл при a_0 равен

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-s^2}\,ds}{s-x} = ix \tag{1.36}$$

Он получается непосредственно из формулы (1.35) при $k=0$, $\mu=1$ и $C_{1/2}^{(0)}=1$.

Подставляя значения интегралов $J_k(x)$ и $J_0(x)$, определяемых соотношениями (1.35) и (1.36), в формулу (1.11) для контактного напряжения $\tau(x)$, получим

$$\tau(x) = \frac{ia\lambda^*}{\sqrt{a^2-x^2}}\sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sideset{}{^*}\sum_{\mu=0;\,1}^{k+1}(-1)^{1/2(k+1-\mu)}\, C_{1/2}^{(1/2[k+1-\mu])}\left(\frac{x}{a}\right)^{\mu} + \frac{C_1+i\lambda^* a_0 x}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{1.37}$$

Введем обозначение

$$\lambda^* = -\frac{\lambda_0}{i}, \qquad \lambda_0 = \frac{E_2}{2(1-\nu^2)E_1 h}$$

Тогда формулу (1.37) для контактного напряжения можно записать в виде

$$\tau(x) = -\frac{\lambda_0 a}{\sqrt{a^2-x^2}}\sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sideset{}{^*}\sum_{\mu=0;\,1}^{k+1}(-1)^{1/2(k+1-\mu)}\, C_{1/2}^{(1/2[k+1-\mu])}\left(\frac{x}{a}\right)^{\mu} + \frac{C_1-\lambda_0 a_0 x}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{1.38}$$

Допуская, что возможна перестановка в двойной сумме в формуле (1.38), после некоторых преобразований приведем последнюю к виду

$$\tau(x) = -\frac{\lambda_0 a}{\sqrt{a^2-x^2}}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{\mu} \sideset{}{^*}\sum_{k=N(\mu)}^{\infty} a_k(-1)^{1/2(k+1-\mu)}\, C_{1/2}^{(1/2[k+1-\mu])} + \frac{C_1-\lambda_0 a_0 x}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{1.39}$$

Здесь

$$N(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu=0 \\ 2 & \text{при } \mu=1 \\ \mu-1 & \text{при } \mu\geqslant 2 \end{cases} \tag{1.40}$$

а звездочка справа суммы указывает, что индекс внутренней суммы принимает либо четные, либо нечетные значения.

Положим

$$B_\mu = \sum_{k=N(\mu)}^{\infty}{}^{*} a_k (-1)^{{}^1/_2(k+1-\mu)} C_{{}^1/_2}^{({}^1/_2[k+1-\mu])} \tag{1.41}$$

Тогда формулу (1.39) для контактного напряжения $\tau(x)$ можно представить в виде

$$\tau(x) = -\frac{\lambda_0 a}{\sqrt{a^2-x^2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} B_\mu \left(\frac{x}{a}\right)^\mu + \frac{C_1 - \lambda_0 a_0 x}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{1.42}$$

Как видно из этой формулы, в ней явно выделены те особенности, которые присущи контактным напряжениям в окрестности концов упругой накладки.

Таким образом, величина и закон распределения контактного напряжения $\tau(x)$, действующего в плоскости соединения упругой накладки с полуплоскостью, полностью определяются либо формулой (1.38) либо (1.39) или (1.42), если известны значения коэффициентов a_k или B_μ.

Ниже показывается, что определение коэффициентов a_k (или B_μ) сводится к решению некоторой бесконечной системы линейных уравнений с ограниченными свободными членами.

Одновременно доказывается, что при

$$\lambda_0 a = \frac{E_2}{2(1-\nu^2)E_1} \frac{a}{h} < 1$$

эта бесконечная система линейных уравнений является вполне регулярной, а при $\lambda_0 a \geqslant 1$ — квази-вполне регулярной, а, как известно, [13] из теории регулярных бесконечных систем линейных уравнений, неизвестные, в случае ограниченных свободных членов, определяются с любой необходимой точностью.

§ 2. Вывод и исследование беконечной системы линейных уравнений. Прежде всего преобразуем формулу (1.39) для контактного напряжения $\tau(x)$, представив ее в следующем виде:

$$\tau(x) = -\lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^n C_{-{}^1/_2}^{(n)} B_\mu \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+\mu} +$$

$$+ \left[\frac{C_1}{a} - \lambda_0 a_0 \left(\frac{x}{a}\right)\right] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{-{}^1/_2}^{(n)} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} \tag{2.1}$$

Это выражение получается непосредственно из формулы (1.39), если заменить в ней

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{-{}^1/_2}^{(n)} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n}, \quad \left|\frac{x}{a}\right| < 1 \tag{2.2}$$

где $C_{-{}^1/_2}^{(n)}$ — коэффициент разложения.

Теперь запишем первую сумму, входящую в выражение (2.1), заменив в ней индекс суммирования $2n + \mu$ на m. Тогда будем иметь

$$I_1 = -\lambda_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\mu=m}^{\infty}{}^{*} (-1)^{{}^1/_2(m-\mu)} C_{-{}^1/_2}^{({}^1/_2[m-\mu])} B_\mu \left(\frac{x}{a}\right)^m \tag{2.3}$$

Далее, меняя порядок суммирования, получим

$$I_1 = -\lambda_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^m \sum_{\mu=0;\,1}^{m}{}^{*} (-1)^{1/2(m-\mu)} C_{-1/2}^{(1/2[m-\mu])} B_\mu \tag{2.4}$$

Заменив индекс суммирования $2n$ на m во второй сумме, входящей в выражение (2.1), приведем ее к виду

$$I_2 = \frac{C_1}{a} \sum_{m=0}^{\infty}{}^{*} (-1)^{1/2m} C_{-1/2}^{(1/2m)} \left(\frac{x}{a}\right)^m - \lambda_0 a_0 \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} (-1)^{1/2(m-1)} C_{-1/2}^{(1/2[m-1])} \left(\frac{x}{a}\right)^m \tag{2.5}$$

Представим теперь контактное напряжение $\tau(x)$ в виде суммы двух слагаемых: симметричного $\tau^+(x)$ и кососимметричного $\tau^-(x)$ напряжений, т. е. $\tau(x) = \tau^+(x) + \tau^-(x)$. Очевидно, что симметричная часть контактного напряжения $\tau^+(x)$ будет зависеть только от четных степеней $(x / a)^m$, а кососимметричная — только от нечетных степеней $(x / a)^m$.

Таким образом, при m четном будем иметь

$$\tau^+(x) = -\lambda_0 \sum_{m=0}^{\infty}{}^{*} \left(\frac{x}{a}\right)^m \left\{ \sum_{\mu=0}^{\mu=m}{}^{*} (-1)^{1/2(m-\mu)} C_{-1/2}^{(1/2[m-\mu])} B_\mu - \right.$$
$$\left. - \frac{C_1}{\lambda_0 a} (-1)^{1/2m} C_{-1/2}^{(1/2m)} \right\} \tag{2.6}$$

при m нечетном

$$\tau^-(x) = -\lambda_0 \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} \left(\frac{x}{a}\right)^m \left\{ \sum_{\mu=1}^{\mu=m}{}^{*} (-1)^{1/2(m-\mu)} C_{-1/2}^{(1/2[m-\mu])} B_\mu + \right.$$
$$\left. + a_0 (-1)^{1/2(m-1)} C_{-1/2}^{(1/2[m-1])} \right\} \tag{2.7}$$

С другой стороны, согласно (1.10) имеем

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{x}{a}\right)^k \tag{2.8}$$

Следовательно

$$\tau(x) = \varphi'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{m+1}(m+1)}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^m, \qquad \left|\frac{x}{a}\right| < 1 \tag{2.9}$$

При этом особенность на концах упругой накладки ($x = \mp a$) предусмотрена либо формулой (1.38) либо (1.39) или (1.42).

Выделим четную и нечетную части в выражении (2.9); при m четном для $\tau^+(x)$ получим

$$\tau^+(x) = \sum_{m=0}^{\infty}{}^{*} \frac{a_{m+1}(m+1)}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^m \tag{2.10}$$

а при m нечетном для $\tau^-(x)$ будем иметь

$$\tau^-(x) = \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} \frac{a_{m+1}(m+1)}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^m \tag{2.11}$$

Далее, сравнивая выражения (2.6) и (2.10), а также (2.7) и (2.11), найдем (2.12)

$$a_{m+1}\frac{m+1}{a} = -\lambda_0\left\{\sum_{\mu=0}^{m}{}^{*}(-1)^{^1/_2(m-\mu)}C_{-^1/_2}^{(^1/_2[m-\mu])}B_\mu - \frac{C_1}{\lambda_0 a}(-1)^{^1/_2 m}C_{-^1/_2}^{(^1/_2 m)}\right\}$$

$$a_{m+1}\frac{m+1}{a} = -\lambda_0\left\{\sum_{\mu=1}^{m}{}^{*}(-1)^{^1/_2(m-\mu)}C_{-^1/_2}^{(^1/_2[(m-\mu])}B_\mu + a_0(-1)^{^1/_2(m-1)}C_{-^1/_2}^{(^1/_2[m-1)]}\right\}$$

(2.13)

В уравнении (2.12) m — четное, а в (2.13) m — нечетное.

Таким образом, система уравнений (2.12) содержит только коэффициенты a_k с нечетным индексом k, которые линейно зависят от произвольной постоянной C_1 и определяют по формуле (2.11) контактное напряжение $\tau^-(x)$ в случае кососимметричного нагружения упругой накладки, а система уравнений (2.13) содержит только коэффициенты a_k с четным индексом k, которые также линейно зависят от произвольной постоянной a_0 и определяют по формуле (2.10) контактное напряжение $\tau^+(x)$ в случае симметричного нагружения упругой накладки. Эти произвольные постоянные C_1 и a_0 определяются из граничных условий (1.7).

Здесь следует отметить, что каждое из этих нагружений представляет самостоятельный интерес, так как соответствует определенному характеру деформации полуплоскости с накладкой.

Преобразуем теперь в уравнениях (2.12) и (2.13) суммы, содержащие коэффициенты B_μ, пользуясь при этом соотношением (1.41). Обозначив эту сумму через A_m, будем иметь

$$A_m = \sum_{\mu=0;\,1}^{m}{}^{*}(-1)^{^1/_2(m-\mu)}C_{-^1/_2}^{(^1/_2[m-\mu])}B_\mu \tag{2.14}$$

Подставляя выражение B_μ из соотношения (1.41) в (2.14), получим

$$A_m = \sum_{\mu=0}^{m}\varepsilon_{\mu,m}(-1)^{^1/_2(m-\mu)}C_{-^1/_2}^{(^1/_2[m-\mu])}\sum_{k=N(\mu)}^{\infty}\varepsilon_{\mu+1,k}\,a_k(-1)^{^1/_2(k+1-\mu)}C_{^1/_2}^{(^1/_2[k+1-\mu])}$$

Здесь (2.15)

$$\varepsilon_{\mu,m} = \begin{cases}1 & \text{при } \mu \text{ и } m \text{ одинаковой четности}\\ 0 & \text{при } \mu \text{ и } m \text{ различной четности}\end{cases} \tag{2.16}$$

$$N(\mu) = \begin{cases}1 & \text{при } \mu = 0\\ 2 & \text{при } \mu = 1\\ \mu-1 & \text{при } \mu \geqslant 2\end{cases} \tag{2.17}$$

Изменив порядок суммирования в (2.15), можно получить

$$A_m = \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu=0}^{k+1} f_{\mu k}(m) + \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{m} f_{\mu k}(m) \tag{2.18}$$

где выражения для $f_{\mu k}(m)$ определяются формулами

$$f_{\mu k}(m) = a_k\varepsilon_{\mu,m}(-1)^{^1/_2(m-\mu)}C_{-^1/_2}^{(^1/_2[m-\mu])}\varepsilon_{\mu+1,k}(-1)^{^1/_2(k+1-\mu)}C_{^1/_2}^{(^1/_2[k+1-\mu])} \tag{2.19}$$

Выделим теперь в выражении (2.18) для суммы A_m ее четную и нечетную части. Четную обозначим через A_m^+, а нечетную через A_m^-.

Далее, введем следующие обозначения:

$$g_{k,m} = \sum_{\mu=0;\,1}^{\min(k,m)}{}^{*} (-1)^{{}^1\!/_2(m-\mu)} C_{-{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2[m-\mu])} (-1)^{{}^1\!/_2(k-\mu)} C_{{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2[k-\mu])} \tag{2.20}$$

Тогда в силу соотношений (2.18), (2.19) и (2.20) получим

$$A_m^+ = \sum_{k=1}^{m-1}{}^{*} a_k \sum_{\mu=0}^{k+1}{}^{*} (-1)^{{}^1\!/_2(m-\mu)} C_{-{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2[m-\mu])} (-1)^{{}^1\!/_2(k+1-\mu)} C_{{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2[k+1-\mu])} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \sum_{\mu=0}^{m}{}^{*} (-1)^{{}^1\!/_2(m-\mu)} C_{-{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2[m-\mu])} (-1)^{{}^1\!/_2(k+1-\mu)} C_{{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2[k+1-\mu])} = \sum_{k=1}^{\infty}{}^{*} a_k g_{k+1,\,m} \tag{2.21}$$

Здесь m — четное и k — нечетное, а $g_{k+1,m}$ — определяется по формуле (2.20). Далее,

$$A_m^- = \sum_{k=2}^{m-1}{}^{*} a_k \sum_{\mu=1}^{k+1}{}^{*} (-1)^{{}^1\!/_2(m-\mu)} C_{-{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2[m-\mu])} (-1)^{{}^1\!/_2(k+1-\mu)} C_{{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2[k+1-\mu])} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty}{}^{*} a_k \sum_{\mu=1}^{m}{}^{*} (-1)^{{}^1\!/_2(m-\mu)} C_{-{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2[m-\mu])} (-1)^{{}^1\!/_2(k+1-\mu)} C_{{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2[k+1-\mu])} = \sum_{k=2}^{\infty}{}^{*} a_k g_{k+1,\,m} \tag{2.22}$$

Здесь m — нечетное и k — четное, а $g_{k+1,m}$ — определяется также по формуле (2.20).

Подставляя теперь согласно (2.14) значения A_m^+ и A_m^- из соотношений (2.21) и (2.22) в уравнения (2.12) и (2.13), приведем их к следующему виду:

$$a_{m+1}\frac{m+1}{a} = -\lambda_0 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty}{}^{*} a_k g_{k+1,\,m} - \frac{C_1}{a_0\lambda_0}(-1)^{{}^1\!/_2 m} C_{-{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2 m)} \right\} \tag{2.23}$$

$$a_{m+1}\frac{m+1}{a} = -\lambda_0 \left\{ \sum_{k=2}^{\infty}{}^{*} a_k g_{k+1,\,m} + a_0 (-1)^{{}^1\!/_2(m-1)} C_{-{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2[m-1])} \right\} \tag{2.24}$$

В уравнении (2.23) m — четное ($m = 0, 2, 4, 6, \ldots$), а k — нечетное, а в уравнении (2.24) m — нечетное ($m = 1, 3, 5, 7, \ldots$), а k — четное.

Таким образом, задача определения неизвестных коэффициентов a_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) (или B_k), входящих в формулы (1.38), (1.39) или (1.42), для определения контактного напряжения $\tau(x)$ свелась к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.23) и (2.24).

При этом из системы уравнений (2.23) определяются коэффициенты a_k с нечетным индексом k, которые выражаются через произвольную постоянную C_1, а из системы уравнений (2.24) определяются коэффициенты a_k с четным индексом k, которые зависят от произвольной постоянной a_0. Обе эти произвольные постоянные C_1 и a_0 входят раздельно в качестве множителя в соответствующие выражения для a_k с четными индексами и для a_k с нечетными индексами и определяются из граничных условий (1.7).

Далее, следуя методу, развитому Д. И. Шерманом в работе [14], докажем, что бесконечная система линейных уравнений (2.23) и (2.24) вполне регулярна, если $\lambda_0 a < 1$ и квази-вполне регулярна, когда $\lambda_0 a \geqslant 1$.

Для этого предварительно преобразуем нашу систему к виду, удобному для исследований, а именно запишем ее в форме

$$a_{m+1}\left[\frac{m+1}{a}+\lambda_0 g_{m+2,\,m}\right]=-\lambda_0\left\{\sum_{k=1}^{\infty}{}^{*}\, a_k g_{k+1,\,m}-\frac{C_1}{a\lambda_0}(-1)^{{}^1\!/_2 m}\, C_{-{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2 m)}\right\} \quad (2.25)$$

где $m=0,\,2,\,4,\,6,\ldots,\ \ k\neq m+1$ и

$$a_{m+1}\left[\frac{m+1}{a}+\lambda_0 g_{m+2,\,m}\right]=-\lambda_0\left\{\sum_{k=2}^{\infty}{}^{*}\, a_k g_{k+1,\,m}+a_0(-1)^{{}^1\!/_2(m-1)}\, C_{-{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2[m-1])}\right\} \quad (2.26)$$

где $m=1,\,3,\,5,\,7,\ldots$ и $k\neq m+1$.

Для того чтобы доказать, что эти системы вполне регулярны, нам нужно оценить следующие суммы:

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}^{*}\,|g_{k+1,\,m}| \quad \text{при } k\neq m+1;\ m=0,2,4,6,\ldots \quad (2.27)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}{}^{*}\,|g_{k+1,\,m}| \quad \text{при } k\neq m+1;\ m=1,3,5,7,\ldots \quad (2.28)$$

Для этого воспользуемся некоторыми соотношениями, полученными в работе [14]. Эти соотношения для отличия обозначаем порядковым номером со звездочкой. Согласно [14], имеют место следующие соотношения:

$$g_{k,m}=g_{k-2,m-2}+g_{1,m}g_{k,1}, \qquad g_{k,m}=g_{k-1,m-1} \quad (2.29^*)$$

при нечетных k и m. Помимо этого, приведем для четных индексов k и m формулу

$$g_{2k,\,2m}=\frac{2m+1}{2(m-k)+1}(-1)^k C_{-{}^1\!/_2}^{(k)}(-1)^m C_{-{}^1\!/_2}^{(m)} \quad (2.30^*)$$

а также следующие выражения для сумм:

$$\sum_{k=2}^{\infty}{}^{*}\,|g_{k,\,m}|=-(-1)^{{}^1\!/_2 m}\, C_{-{}^1\!/_2}^{({}^1\!/_2 m)}+2\sum_{\nu=0}^{{}^1\!/_2 m}[C_{-{}^1\!/_2}^{(\nu)}]^2 \quad (2.31^*)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}^{*}\,|g_{k,\,m}|=2\sum_{\nu=0}^{{}^1\!/_2(m-1)}[C_{-{}^1\!/_2}^{(\nu)}]^2 \quad (2.32^*)$$

Как и прежде, звездочка справа у суммы указывает, что индекс суммирования принимает либо четные, либо нечетные значения. Следует иметь в виду, что $g_{m+2,m}\neq 0$

Из очевидной формулы ($C_{-{}^1\!/_2}^{(0)}=1,\ C_{-{}^1\!/_2}^{(1)}=-{}^1\!/_2$)

$$(-1)^n C_{-{}^1\!/_2}^{(n)}=\frac{1}{n!}\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n-1+\frac{1}{2}\right)>0 \quad \text{при } n\geqslant 1 \quad (2.33^*)$$

непосредственно вытекают следующие неравенства:

$$|C_{-1/2}^{(n)}| < |C_{-1/2}^{(n-1)}| \quad (n \geqslant 1) \tag{2.34}$$

$$\text{(а)}\quad |C_{-1/2}^{(n)}| \leqslant \frac{1}{2} \quad (n \geqslant 1), \qquad \text{(б)}\quad |C_{-1/2}^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2n} \quad (n \geqslant 1) \tag{2.35}$$

Соотношения (2.29*) — (2.33*) и неравенства (2.34) и (2.35) понадобятся в дальнейшем.

Перейдем к исследованию бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.25) и (2.26).

Как известно [13], для того чтобы система бесконечных уравнений (2.25) (или (2.26)) была вполне регулярной, необходимо, чтобы

$$M_m = \frac{\lambda_0}{|(m+1)/a + \lambda_0 g_{m+2,\,m}|} \sum_{k=1}^{\infty}{}^{*} |g_{k+1,\,m}| < 1 \tag{2.36}$$

при всех значениях $m = 0, 2, 4, 6, \ldots$ и $k \neq m + 1$. В частности, должно иметь место $M_0 < 1$.

Меняя в выражении (2.36) индекс суммирования $k + 1$ на n и пользуясь соотношением (2.31*), получим

$$M_m = \frac{1}{|(m+1)/a\lambda_0 + g_{m+2,\,m}|} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty}{}^{*} |g_{n,\,m}| - |g_{m+2,\,m}| \right\} =$$

$$= \frac{1}{|(m+1)/a\lambda_0 + g_{m+2,\,m}|} \left\{ -(-1)^{1/2 m} C_{-1/2}^{(1/2 m)} + 2 \sum_{\nu=0}^{1/2 m} [C_{-1/2}^{(\nu)}]^2 - |g_{m+2,\,m}| \right\} < 1 \tag{2.37}$$

для всех значений $m = 0, 2, 4, 6, \ldots$

Из соотношения (2.37) непосредственно следует, что

$$M_0 = \left| \frac{a\lambda_0}{2 - a\lambda_0} \right| < 1 \tag{2.38}$$

Таким образом, в дальнейшем при рассмотрении условия (2.36) или (2.37) для бесконечной системы уравнений (2.25) имеет смысл считать $a\lambda_0 < 1$. Одновременно заметим, что знаменатель в выражении (2.37), т. е.

$$N_m = \frac{m+1}{a\lambda_0} + g_{m+2,\,m} \tag{2.39}$$

в силу неравенства (2.34) есть положительная монотонно убывающая функция m ($N_m > 0$), которая достигает своего минимального значения $N_0 = 1/2$ при $m = 0$. При этом всегда имеет место неравенство $g_{m+2,m} < 0$.

Тогда условие (2.37) можно записать в виде

$$-(-1)^{1/2 m} C_{-1/2}^{(1/2 m)} + 2 \sum_{\nu=0}^{1/2 m} [C_{-1/2}^{(\nu)}]^2 - |g_{m+2,\,m}| < \frac{m+1}{a\lambda_0} - |g_{m+2,\,m}| \tag{2.40}$$

так как $N_m > 0$ и, следовательно,

$$|N_m| = \frac{m+1}{a\lambda_0} + g_{m+2,\,m} = \frac{m+1}{a\lambda_0} - |g_{m+2,\,m}|$$

Теперь условие (2.40) запишем в виде неравенства, налагаемого на величину $a\lambda_0$. Из (2.40) непосредственно имеем

$$a\lambda_0 < H_m = (m+1)\left\{-(-1)^{{}^1/_2 m} C_{-{}^1/_2}^{({}^1/_2 m)} + 2\sum_{\nu=0}^{{}^1/_2 m} [C_{-{}^1/_2}^{(\nu)}]^2\right\}^{-1} \quad (2.41)$$

Это неравенство должно иметь место для $m = 0, 2, 4, 6,\ldots$

Таким образом, если значение $a\lambda_0$ удовлетворяет неравенству (2.41) при всех значениях $m = 0, 2, 4, 6, 8$, то в этом случае бесконечная система линейных уравнений (2.25) будет вполне регулярной.

Из неравенства (2.41) непосредственно следует ранее полученный результат, что $a\lambda_0 < 1$ при $m = 0$.

Поэтому остается выяснить, будет ли при $a\lambda_0 < 1$ сохраняться условие (2.41) и при всех остальных значениях $m = 2, 4, 6, 8,\ldots$, т. е. условие, при котором бесконечная система уравнений (2.25) вполне регулярна, или в этом случае придется наложить на величину $a\lambda_0$ более сильные ограничения. Ниже доказывается, что при $a\lambda_0 < 1$ условие (2.41) выполняется и при всех остальных значениях $m = 2, 4, 6, 8,\ldots$, т. е. бесконечная система линейных уравнений будет вполне регулярной, если только $a\lambda_0 < 1$. Действительно, введем обозначение

$$\Delta_m = -(-1)^{{}^1/_2 m} C_{-{}^1/_2}^{({}^1/_2 m)} + 2\sum_{\nu=0}^{{}^1/_2 m} [C_{-{}^1/_2}^{(\nu)}]^2 \quad (2.42)$$

Пользуясь неравенствами (2.35), можно показать, что

$$\Delta_m \leqslant \frac{m^2+8m-4}{4m} \quad (2.43)$$

для всех значений $m = 2, 4, 6, 8,\ldots$ Очевидно, что $m^2+8m-4>0$ для всех значений $m = 2, 4, 6, 8,\ldots$

С другой стороны, в силу неравенств (2.43) и (2.41) имеем

$$H_m = \frac{m+1}{\Delta_m} \geqslant \frac{4m(m+1)}{m^2+8m-4} = \theta(m) \quad (2.44)$$

при всех значениях $m = 2, 4, 6, 8,\ldots$

Поэтому, если $a\lambda_0$ будет удовлетворять неравенству

$$a\lambda_0 < \min\theta(m) = \frac{4m(m+1)}{m^2+8m-4} \quad (2.45)$$

то условие (2.41) будет выполнено и подавно для значений $m = 2, 4, 6, 8,\ldots$

Рассмотрим теперь $\theta(m)$ как функцию m. Эта функция имеет минимум при $m > 1$. Действительно,

$$\theta'(m) = 4\frac{7m^2-8m-4}{(m^2+8m-4)^2} = 0 \quad (2.46)$$

имеет один положительный корень, лежащий между 1 и 2. Поэтому $\min\theta(m)$ при дискретных целочисленных значениях $m = 2, 4, 6, 8, \ldots$, вследствие монотонности функции $\theta(m)$, достигается при $m = 2$, т. е. имеет место следующее достаточное условие для того, чтобы бесконечная система уравнений (2.25) была вполне регулярной:

$$a\lambda_0 < \frac{4m(m+1)}{m^2+8m-4}\bigg|_{m=2} = \frac{3}{2} \tag{2.47}$$

Итак, при $a\lambda_0 < {}^3/_2$ условие (2.41) при значениях $m = 2, 4, 6, 8, \ldots$ заведомо выполняется, следовательно, бесконечная система линейных уравнений (2.25) будет вполне регулярна при $a\lambda_0 < 1$.

Аналогичным путем нетрудно доказать, что при этом условии, т. е. при $a\lambda_0 < 1$ бесконечная система линейных уравнений (2.26) также будет вполне регулярна.

В заключение отметим, что из всего хода приведенного выше доказательства о том, что бесконечная система уравнений (2.25) или (2.26) вполне регулярна, одновременно следует, что если $a\lambda_0 > 1$, то эти системы будут квази-вполне регулярны, причем для каждого фиксированного значения $a\lambda_0$ (конечно, при условии, что $a\lambda_0 > 1$) можно всегда указать то значение m ($m = 2, 4, 6, \ldots$ или $m = 1, 3, 5, \ldots$), начиная с которого бесконечная система уравнений будет вполне регулярной. Одновременно из структуры уравнений (2.25) и (2.26) непосредственно видно, что свободные члены этих уравнений ограничены и стремятся к нулю при $m \to \infty$ как $O(m^{-1})$.

Таким образом, построив для нахождения коэффициентов вполне регулярную (при $a\lambda_0 < 1$) и квази-вполне регулярную бесконечную систему линейных уравнений с ограниченными свободными членами, можно найти с необходимой точностью значения коэффициентов, входящих в формулу (1.38) либо (1.39) или (1.42), для контактного напряжения $\tau(x)$.

Автор признателен Д. И. Шерману за обсуждение данной работы и за полезные замечания.

Поступила 9 IV 1968

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. Ing.-Archiv, 1932, Bd. 3, Heft 2, S. 123.
2. Buell E. L. On the Distribution of Plane Stress in a Semi-Infinite Plate with partially Stiffened Edge. J. Math. Phys., 1948, vol. 26, p. 223.
3. Koiter W. T. On the Diffusion of Load from a Stiffened into a Sheet. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, vol. 8, p. 164.
4. Brown E. H. The Diffusion of Load from a Stiffner into an Infinite Elastic Sheet. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1957, vol. 239, No. 1218, p. 296.
5. Reissner E. Note on the Problem of the Distribution of Stress in a Thin Stiffened Elastic Sheet. Proc. Nat. Acad. of Sci. U. S. A., 1940, vol. 26, p. 300.
6. Benscoter E. U. Analysis of Single Stiffener on an Infinite Sheet. J. Appl. Mech., 1949, vol. 16, No. 3, p. 242.
7. Каландия А. И. Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применение в теории упругости. Математ. сб., 1957, № 2.
8. Bufler H. Scheibe mit endlicher elastischer Versteifung. VDI-Forschungsh. 1961, No. 485, S. 44.
9. Bufler H. Einige strenge Lösungen für den Spannungszustand in ebenen Verbundkörpern. Z. angew. Math. und Mech., 1959, Bd. 39, N 5/6, S. 218.
10. Carafoli E. Tragflügeltheorie. Berlin, VEB Verlag Technik, 1954.
11. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.
12. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 2, М., Физматгиз, 1952.
13. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.— Л.; Гостехиздат, 1950.
14. Шерман Д. И. Об изгибе круглой пластинки, частично защемленной и частично опертой по контуру. Докл. АН СССР, 1955, т. 101, № 4.