Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

О КИНЕМАТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ СКОЛЬЖЕНИЯ В ИДЕАЛЬНЫХ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев, Ю. М. Мяснянкин

(Воронеж, Москва)

Свойства соотношений, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, рассматривались в статьях [1,2]. В [3] исследованы поверхности разрыва скоростей деформаций при условии пластичности Мизеса. Характеристические многообразия уравнений теории идеальной пластичности при кусочно-линейных потенциалах рассмотрены в [4]. В работе [5] получены кинематические соотношения на поверхностях скольжения при напряженном состоянии, удовлетворяющем гладким участкам поверхности текучести. Ниже рассматриваются соотношения на поверхностях разрыва скоростей перемещений. Выведены уравнения, которым удовлетворяют скачки скоростей, получены ограничения на геометрию поверхностей разрыва. Рассматриваются разрывы скоростей деформаций.

Ограничимся рассмотрением изотропных несжимаемых жестко-пластических материалов. В областях, где имеет место пластическое течение, напряжения удовлетворяют условию пластичности

$$f(\sigma_{ij}) = k \tag{0.1}$$

и уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{0.2}$$

Скорости деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом течения

$$\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i}) = \lambda \partial f / \partial \sigma_{ij} = \lambda f_{ij} \tag{0.3}$$

где λ — неопределенный множитель. Запятая здесь и в дальнейшем означает частное дифференцирование по соответствующей координате.

Введем в рассмотрение поверхность разрыва Σ, на которой, вообще говоря, могут терпеть разрыв величины σ_{ij}, ε_{ij}, u_i. Из условий равновесия следует, что вектор напряжений на поверхности Σ должен быть непрерывен, т. е.

$$[\sigma_{ij}]\,\nu_j = 0 \tag{0.4}$$

Здесь $[\sigma_{ij}] = \sigma_{ij}^- - \sigma_{ij}^+$ — разность напряжений, взятых на различных сторонах поверхности Σ, ν_j — проекции вектора единичной нормали к этой поверхности на прямоугольные декартовы оси координат x_i.

1. На поверхности разрыва скоростей перемещений скорости деформаций удовлетворяют соотношениям [6]

$$\varepsilon_{ij} = \psi\,([u_i]\,\nu_j + [u_j]\,\nu_i) \tag{1.1}$$

где $[u_i]$ — величина разрыва скоростей перемещений, ψ — некоторый коэффициент пропорциональности.

Выбирая оси координат x_i совпадающими с главными осями тензора скорости деформации, из соотношений (1.1) и условия несжимаемости

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = u_{i,i} = 0 \tag{1.2}$$

получаем систему уравнений

$$[u_1]\nu_1 + [u_2]\nu_2 + [u_3]\nu_3 = 0 \tag{1.3}$$

$$[u_1]\nu_2 + [u_2]\nu_1 = [u_1]\nu_3 + [u_3]\nu_1 = [u_2]\nu_3 + [u_3]\nu_2 = 0 \tag{1.4}$$

Уравнения (1.4) имеют нетривиальное решение относительно величин $[u_i]$ при условии, что $\nu_1\nu_2\nu_3 = 0$. Положим для определенности $\nu_3 = 0$, тогда из соотношений (1.3), (1.4) следует

$$\nu_1 = \pm {}^1/_2 \sqrt{2},\ \nu_2 = \pm {}^1/_2 \sqrt{2}, \quad [u_3] = 0 \tag{1.5}$$

Таким образом, поверхности разрыва скоростей совпадают с поверхностями максимального сдвига (поверхностями скольжения). Проекция вектора скорости на главное направление, лежащее в касательной плоскости к поверхности разрыва, непрерывна при переходе через эту поверхность.

Отметим, что поверхности скольжения при произвольном напряженном состоянии имеют место только при условии пластичности Треска. Для остальных условий пластичности они возможны только при вполне определенных значениях девиатора напряжений которые обеспечивают непрерывность девиатора напряжений на поверхности скольжения. Из непрерывности девиатора и соотношений (0.4) получаем, что и сами напряжения непрерывны.

Исключение представляют поверхности скольжения, вдоль которых напряженное состояние соответствует грани условия пластичности Треска. В этом случае направляющие косинусы главных осей тензора напряжений непрерывны, а среднее главное напряжение, касающееся поверхности разрыва, может терпеть разрыв.

Обратимся к определению соотношений на поверхности разрыва Σ. На поверхности скольжения материал испытывает чистый сдвиг, при этом скорости деформаций связаны соотношениями [5]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ik}\nu_k\nu_j + \varepsilon_{jk}\nu_k\nu_i \tag{1.6}$$

В справедливости формул (1.6) легко убедиться, полагая оси координат совпадающими с главными осями тензора ε_{ij}. При этом получаем

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j = 0, \quad \varepsilon_k = 0, \quad \nu_i = \pm \nu_j = {}^1/_2 \sqrt{2} \qquad (i \neq j \neq k)$$

Введем на поверхности скольжения систему криволинейных координат y_1, y_2. Тогда производные от скоростей перемещений можно представить в виде

$$u_{i,j} = u_{i,n}\nu_j + g^{\alpha\beta}u_{i,\alpha}x_{j,\beta} \tag{1.7}$$

где $g^{\alpha\beta}$ — контравариантный метрический тензор поверхности, $x_i(y_\alpha)$ — ее параметрическое уравнение, $u_{i,n}$ — производная вектора u_i по нормали n к поверхности скольжения.

Подставляя (1.7) в соотношения (0.3), получаем

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,n}\nu_j + u_{j,n}\nu_i + g^{\alpha\beta}(u_{i,\alpha}x_{j,k} + u_{j,\alpha}x_{i,\beta}) \tag{1.8}$$

Используя уравнения (1.2), (1.8), из (1.6) получаем систему трех линейных дифференциальных уравнений [5] относительно u_i

$$u_{i,\sigma}x_{i,\tau} + u_{i,\tau}x_{i,\sigma} = 0 \tag{1.9}$$

Представим (1.9) в несколько ином виде

$$(u_i x_{i,\tau})_{,\sigma} + (u_i x_{i,\sigma})_{,\tau} - 2u_i x_{i,\tau\sigma} = 0 \tag{1.10}$$

Отметим, что имеют место соотношения

$$x_{i,\tau\sigma} = \frac{\delta x_{i,\tau}}{\delta y_\sigma} + x_{i,\alpha}\Gamma_{\tau\sigma}^{\alpha}, \qquad \frac{\delta x_{i,\tau}}{\delta y_\sigma} = b_{\tau\sigma}\nu_i, \qquad u_i x_{i,\tau} = u_\tau \tag{1.11}$$

Здесь $\delta x_{i,\tau} / \delta y_\sigma$ — ковариантная производная вектора $x_{i,\tau}$ по y_σ; $\Gamma_{\tau\sigma}{}^{\alpha}$ — символы Кристоффеля, соответствующие метрике поверхности, $b_{\alpha\beta}$ — — коэффициенты второй фундаментальной квадратической формы поверхности. Используя (1.11), из соотношений (1.10) получим

$$u_{\tau,\sigma} + u_{\sigma,\tau} - 2b_{\sigma\tau}u_n - 2\Gamma_{\sigma\tau}{}^{\alpha}u_\alpha = 0 \tag{1.12}$$

где u_n — составляющая вектора скорости по нормали к поверхности.

После перехода в (1.12) от частного дифференцирования к ковариантному получаем

$$\frac{\delta u_\tau}{\delta y_\sigma} + \frac{\delta u_\sigma}{\delta y_\tau} - 2b_{\sigma\tau}u_n = 0 \tag{1.13}$$

В контравариантных составляющих вектора скорости уравнения (1.13) примут вид

$$g_{\sigma\alpha}\frac{\delta u^\alpha}{\delta y_\tau} + g_{\tau\alpha}\frac{\delta u^\alpha}{\delta y_\sigma} - 2b_{\sigma\tau}u_n = 0 \tag{1.14}$$

Умножая (1.14) на $g^{\sigma\tau}$, после суммирования получаем

$$2\Omega u_n = \delta u^\alpha / \delta y_\alpha \tag{1.15}$$

где $2\Omega = b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ — средняя кривизна поверхности скольжения. Исключая u_n из (1.14) при помощи (1.15), имеем

$$\Omega\frac{\delta u^\alpha}{\delta y_\sigma}g_{\tau\alpha} + \Omega\frac{\delta u^\alpha}{\delta y_\tau}g_{\sigma\alpha} - b_{\sigma\tau}\frac{\delta u^\alpha}{\delta y_\alpha} = 0 \tag{1.16}$$

Среди трех уравнений (1.16) независимых только два, так как после свертывания их с $g^{\sigma\tau}$ получаем тождество. Таким образом, соотношения (1.16) определяют два однородных уравнения с двумя независимыми переменными и двумя неизвестными функциями. Асимптотические направления поверхности скольжения являются характеристическими для системы (1.16) и она является гиперболической, эллиптической или параболической, если гауссова кривизна поверхности отрицательна, положительна или равна нулю, соответственно. Если в качестве криволинейных координат на поверхности выбрать характеристические линии, то, учитывая, что тогда $b_{11} = b_{22} = 0$ ([7] стр. 281), соотношения (1.16) примут вид $g_{\tau\alpha}\delta u^\alpha/\delta y_\tau = 0$ (по τ не суммировать).

Соотношения (1.12) имеют место по обе стороны от поверхности разрыва скоростей. Учитывая, что нормальная составляющая скорости u_n непрерывна, из (1.12) получаем

$$[u_\tau]_{,\sigma} + [u_\sigma]_{,\tau} - 2\Gamma_{\sigma\tau}^{\alpha}[u_\alpha] = 0 \tag{1.17}$$

Выберем систему криволинейных координат y_α ортогональной, ось y_2 направим вдоль главной оси, лежащей в касательной плоскости к поверхности разрыва. Учитывая, что $[u_2] = 0$, из соотношений (1.17) имеем

$$\Gamma_{22}{}^1 [u_1] = 0, \quad [u_1]_{,2} - \Gamma_{12}{}^1 [u_1] = 0, \quad [u_1]_{,1} - \Gamma_{11}{}^1 [u_1] = 0 \tag{1.18}$$

Символы Кристоффеля в ортогональной системе координат имеют вид [7]

$$\Gamma_{11}{}^1 = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial y_1}, \qquad \Gamma_{12}{}^1 = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial y_2}, \qquad \Gamma_{22}{}^1 = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial y_1} \tag{1.19}$$

Учитывая (1.19), из соотношений (1.18) получаем

$$g_{22} = \varphi_1 (y_2), \qquad [u_1] = \varphi_2 (y_1)\, g_{11} = \varphi_3 (y_2) \sqrt{g_{11}} \tag{1.20}$$

Из (1.20) следует, что геометрия поверхностей разрыва скоростей должна быть такова, что при указанном выше выборе криволинейных координат, для g_{11} и g_{22} имеют место соотношения

$$g_{22} = \varphi_1 (y_2), \qquad g_{11} = \{\varphi_3 (y_2)/\varphi_2 (y_1)\}^2 \tag{1.21}$$

Произведем замену координат на поверхности разрыва по формулам

$$y_1 = F_1 (z_1), \qquad y_2 = F_2 (z_2)$$

При этом линии $y_\alpha = \text{const}$ перейдут в линии $z_\alpha = \text{const}$. Если подобрать F_1 и F_2 так, чтобы $dF_1/dz_1 = \varphi_2$, $(dF_2/dz_2)^2 = 1/\varphi_1$, то метрический тензор в новой системе координат примет вид

$$\bar{g}_{22} = 1, \quad \bar{g}_{11} = \varphi_3{}^2 (F_2 (z_2)) \tag{1.22}$$

Из (1.22) следует, что поверхности разрыва скоростей при любом условии пластичности, за исключением ребра условия пластичности Треска, могут быть только поверхностями, наложимыми на поверхности вращения, причем одно из главных направлений тензора σ_{ij} совпадает с направлениями геодезических линий.

В случае плоской деформации поверхность Σ является цилиндрической, вдоль образующих которой $u_2 = 0$.

Возьмем, соответственно, в качестве кривых y_2, y_1, образующие этой поверхности и ортогональные им линии, пусть y_α — расстояния вдоль этих линий, измеренные от некоторой точки. При таком выборе системы криволинейных координат имеют место равенства

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = 1, \quad \Gamma_{\alpha\beta}{}^\sigma = 0, \quad 2\Omega = \varkappa_1 = d\theta/dy_1 \quad u_\alpha = u^\alpha, \quad \delta u_\alpha/\delta y_\alpha = du_\alpha/dy_\alpha$$

Здесь $\varkappa_1$ — кривизна линии $y_2 = \text{const}$. Тогда, учитывая эти равенства, из уравнения (1.15) получим соотношения Гейрингер

$$u_1 - u_n d\theta = 0$$

а из (1.18) получим, что $[u_1] = \text{const}$ на поверхности скольжения.

Если напряженное состояние соответствует ребру поверхности текучести Треска, то

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k \tag{1.23}$$

При этом направление третьего главного напряжения определено, а направления σ_1 и σ_2 остаются неопределенными. Скорости деформаций представим в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_1 l_i l_j + \varepsilon_2 m_i m_j + \varepsilon_3 n_i n_j \tag{1.24}$$

где ε_1, ε_2, ε_3 — главные значения тензора ε_{ij}; l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы его главных осей, удовлетворяющие условиям

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij} \tag{1.25}$$

Как показано в работах [1,2], система уравнений для идеального жестко-пластического тела при условии (1.23) является статически определимой, т. е. значения σ_1, σ_2, σ_3, n_i могут быть определены без привлечения соотношений (1.24). Поэтому при рассмотрении соотношений (1.24) будем полагать величины n_i известными, а l_i, m_i неопределенными, но удовлетворяющими условиям (1.25); причем для выполнения ассоциированного закона течения необходимо и достаточно определить тензор ε_{ij} так, чтобы имели место соотношения

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \qquad |\varepsilon_3| \geqslant |\varepsilon_1|, \qquad |\varepsilon_3| \geqslant |\varepsilon_2| \tag{1.26}$$

Умножая равенства (1.24) на n_i, получаем

$$\varepsilon_{ij} n_j = \varepsilon_3 n_i \tag{1.27}$$

Так как $\varepsilon_3 = \varepsilon_{kj} n_k n_j$, то соотношения (1.27) запишутся в виде

$$\varepsilon_{ij} n_j = \varepsilon_{kj} n_k n_j n_i \tag{1.28}$$

Среди уравнений (1.28) независимых только два, так как свернутая с n_i система (1.28) обращается в тождество. Третье независимое уравнение получаем из (1.24), приравнивая индексы i и j и учитывая (1.26). При этом имеем $\varepsilon_{ii} = 0$.

Поэтому кинематические соотношения при условии полной пластичности, используя (0.3), можно записать в виде

$$u_{i,i} = 0, \quad u_{i,j} n_j + u_{j,i} n_j = 2 u_{k\,r} n_k n_r n_i \tag{1.29}$$

Пусть по обе стороны от поверхности разрыва скоростей Σ имеет место условие полной пластичности (1.23). Тогда на этой поверхности в виду непрерывности напряжений величины n_i непрерывны, и из соотношений (1.29) получаем

$$[u_{i,i}] = 0, \quad [u_{i,j}]\, n_j + [u_{j,i}]\, n_j = 2\,[u_{k,r}]\, n_k n_r n_i \tag{1.30}$$

Из геометрических соотношений (1.7) следует, что на поверхности разрыва Σ скачки частных производных от скоростей имеют вид

$$[u_{i,j}] = B_i \nu_j + g^{\alpha\beta}\,[u_i]_{,\alpha} x_{j,\beta}, \qquad B_i = [C_i] \tag{1.31}$$

Подставляя в (1.30) вместо $[u_{ij}]$ их значения из (1.31), имеем

$$B_i \nu_i + g^{\alpha\beta}\,[u_i]_{,\alpha} x_{i,\beta} = 0 \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}(B_i \nu_j + B_j \nu_i)\, n_j + g^{\alpha\beta}\left([u_i]_{,\alpha} x_{j,\beta} + [u_j]_{,\alpha} x_{i,\beta}\right) n_j = \\ = 2 B_k n_k n_r \nu_r n_i + 2 g^{\alpha\beta}\,[u_k]_{,\alpha} n_k x_{r,\beta} n_r n_i\end{aligned} \tag{1.33}$$

Исключая из соотношений (1.32), (1.33) величины B_i и учитывая, что на поверхности разрыва скоростей $n_i\nu_i = {}^1/_2\sqrt{2}$, получаем

$$\sqrt{2}g^{\alpha\beta}[u_i]_{,\alpha}x_{j,\beta}n_j\nu_i - g^{\alpha\beta}[u_i]_{,\alpha}x_{i,\beta} = 2g^{\alpha\beta}[u_k]_{,\alpha}n_k x_{r,\beta}n_r \qquad (1.34)$$

Так как проекция разрыва вектора скорости на главное направление, лежащее в касательной плоскости к поверхности разрыва, равна нулю, то вектор $[u_i]$ находится в одной плоскости с векторами n_i и ν_i. Поэтому, учитывая непрерывность нормальной компоненты вектора скорости к поверхности Σ, $[u_i]$ можно представить в виде

$$[u_i] = (\sqrt{2}n_i - \nu_i)V \qquad (1.35)$$

где $V(y_1, y_2)$ — функция, характеризующая интенсивность разрыва вектора скорости.

Подставляя в (1.34) вместо $[u_i]$ его значение из (1.35), получим

$$2\sqrt{2}g^{\alpha\beta}V_{,\alpha}n_i x_{i,\beta} + g^{\alpha\beta}(\sqrt{2}n_{i,\alpha} - \nu_{i,\alpha})x_{i,\beta}V = 0 \qquad (1.36)$$

Уравнение (1.36) определяет связь интенсивности разрыва скорости с геометрическими характеристиками поверхности Σ.

Так как $n_i\nu_i = {}^1/_2\sqrt{2}$, то имеет место равенство

$$g^{\alpha\beta}(\sqrt{2}n_{i,\alpha} - \nu_{i,\alpha})x_{i,\beta} = \sqrt{2}g^{\alpha\beta}\{(n_i x_{i,\beta})_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}x_{i,\sigma}n_i\} \qquad (1.37)$$

Выбираем ортогональные криволинейные координаты так, чтобы y_1 совпала с направлением вектора $[u_j]$. Тогда

$$n_i\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = \left(\frac{g_{11}}{2}\right)^{1/2}, \qquad n_i\frac{\partial x_i}{\partial y_2} = 0 \qquad (1.38)$$

Учитывая соотношения (1.19), (1.38), (1.37), преобразуем (1.36) к виду

$$4g_{22}\frac{\partial V}{\partial y_1} + V\frac{\partial g_{22}}{\partial y_1} = 0 \qquad (1.39)$$

После интегрирования (1.39), получаем

$$(g_{22})^{1/4}V = (g_{22}^{0})^{1/4}V_0 \qquad (1.40)$$

где V_0 и g_{22}^0 — значения V и g_{22} в некоторой точке на линии $y_2 = \mathrm{const}$.

Таким образом, при напряженном состоянии, соответствующем ребру призмы условия пластичности Треска, поверхности разрыва скоростей могут быть произвольной формы, на которых вдоль линии тока вектора $[u_i]$ имеет место интеграл (1.40).

При любом другом условии пластичности, в том числе и грани Треска, возможны поверхности разрыва скоростей, но они необходимо должны быть поверхностями наложимыми на поверхности вращения.

2. Рассмотрим поверхности разрыва скоростей деформаций. Пусть по обе стороны от поверхности G, на которой скорости перемещений непрерывны, а скорости деформаций претерпевают разрыв, напряженное состояние соответствует гладкому участку условия пластичности. Согласно результатам работы [8] на поверхности разрыва напряжений скорости деформаций непрерывны. Исключение представляет грань призмы Треска.

В этом случае на поверхности разрыва напряжений скорости деформаций могут претерпевать разрыв, однако направляющие косинусы главных осей тензора напряжений будут непрерывными. Отсюда следует, что на поверхности разрыва скоростей деформаций напряжения непрерывны за исключением, может быть, грани Треска.

Поэтому из соотношений (0.3) получаем

$$[\varepsilon_{ij}] = [\lambda] f_{ij} \tag{2.1}$$

Система уравнений (2.1) имеет место и для грани условия пластичности Треска, так как в этом случае величина f_{ij} зависит только от направляющих косинусов главных осей тензора напряжений, которые непрерывны. Из соотношений (0.3) и (2.1) имеем

$$[\varepsilon_{ij}] = {}^1/_2\left([u_{i,j}] + [u_{j,i}]\right) = [\lambda] f_{ij} \tag{2.2}$$

Так как скорости перемещений непрерывны, то $[u_{i,j}] = B_i \nu_j$ и выражение (2.2) примет вид

$$B_i \nu_j + B_j \nu_i = 2[\lambda] f_{ij} \tag{2.3}$$

Выбирая оси координат совпадающими с главными осями тензора напряжений, из соотношений (2.3) и условия несжимаемости (1.2), получаем

$$B_1 \nu_1 + B_2 \nu_2 + B_3 \nu_3 = 0 \tag{2.4}$$

$$B_1 \nu_2 + B_2 \nu_1 = B_1 \nu_3 + B_3 \nu_1 = B_2 \nu_3 + B_3 \nu_2 = 0 \tag{2.5}$$

Сравнивая уравнения (2.4), (2.5) и (1.3), (1.4), замечаем, что они будут совпадать, если вместо B_i в (2.4), (2.5) подставить величины $[u_i]$. Поэтому все свойства, полученные для поверхностей разрыва скоростей перемещений, имеют место и для поверхностей разрыва скоростей деформаций. В частности, поверхности разрыва скоростей деформаций совпадают с поверхностями максимального сдвига, одно из главных направлений тензора σ_{ij} и вектор B_i лежат в касательной плоскости к поверхности G и ортогональны между собой.

Найдем дифференциальные соотношения для разрывов скоростей деформаций вдоль поверхности G. Пусть напряженное состояние удовлетворяет грани Треска. Тогда соотношения ассоциированного закона течения (2.2) можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij} = \lambda\,(m_i m_j - n_i n_j) \tag{2.6}$$

Отметим, что величины m_i, n_i l_i непрерывы на поверхности G и удовлетворяют условиям

$$n_i n_i = m_i m_i = l_i l_i = 1, \qquad n_i m_i = n_i l_i = l_i m_i = 0 \tag{2.7}$$

Введем в рассмотрение величины

$$M_i = \frac{dm_i}{dn}, \quad N_i = \frac{dn_i}{dn}, \quad L_i = \frac{dl_i}{dn}$$

Тогда из (2.7) следует, что

$$M_i m_i = N_i n_i = L_i l_i = 0, \qquad M_i l_i + L_i m_i = 0$$

$$N_i l_i + L_i n_i = 0, \; N_i m_i + M_i n_i = 0$$

т. е. векторы N_i, M_i, L_i ортогональны векторам n_i, m_i, l_i, соответственно, и представимы в виде

$$N_i = -Nm_i + Ll_i, \quad M_i = Nn_i + Ml_i, \quad L_i = -Mm_i - Ln_i \tag{2.8}$$

Из соотношений (2.6) следует:

$$[\varepsilon_{ij,\,k}]\,\nu_k = B\,(m_i m_j - n_i n_j) + [\lambda]\,(m_i \langle M_j\rangle + \langle M_i\rangle\, m_j - n_i \langle N_j\rangle -$$
$$- \langle N_i\rangle\, n_j) + \langle\lambda\rangle\,(m_i\,[M_j] + [M_i]\,m_j - n_i\,[N_j] - [N_i]n_j, \quad B = [d\lambda/dn] \tag{2.9}$$

Здесь символ $<\ldots>$ означает среднее значение соответствующих величин; при выводе использовано тождество $[ab] = \langle a\rangle\,[b] + [a]\langle b\rangle$. Используя геометрические условия совместности второго порядка [3]

$$[u_{i,\,jk}] = A_i \nu_j \nu_k + g^{\alpha\beta} B_{i,\,\alpha}\,(x_{j,\,\beta}\nu_k + x_{k,\,\beta}\nu_j) - B_i g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{j,\,\beta} x_{k,\,\tau}$$
$$(A_i = d^2 u_i \,/\, dn^2)$$

и учитывая (2.8), из соотношений (2.9) получаем

$$A_i \nu_j + A_j \nu_i + g^{\alpha\beta}\,(B_{i,\,\alpha} x_{j,\,\beta} + B_{j,\,\alpha} x_{i,\,\beta}) = 2\,\{B\,(m_i m_j - n_i n_j) +$$
$$+ P\,(m_i n_j + n_i m_j) + Q\,(m_i l_j + m_j l_i) - R\,(n_i l_j + l_i n_j)\} \tag{2.10}$$
$$P = 2\,([N]\,\langle\lambda\rangle + \langle N\rangle\,\langle[\lambda]\rangle), \; Q = [\lambda]\,\langle M\rangle + [M[\,\langle\lambda\rangle, R = [\lambda]\,\langle L\rangle + [L]\,\langle\lambda\rangle$$

Приравнивая в (2.10) индексы i и j, имеем

$$A_i \nu_i + g^{\alpha\beta} B_{i,\,\alpha} x_{i,\,\beta} = 0 \tag{2.11}$$

После умножения (2.10) на ν_j и учета (2.11), получим (2.12)

$$A_i = g^{\alpha\beta} B_{k,\,\alpha}\,(x_{k,\,\beta}\nu_i - x_{i,\,\beta}\nu_k) + \sqrt{2}\,\{B\,(m_i - n_i) + P\,(m_i + n_i) + (Q - R)\,l_i\}$$

Здесь учтено, что на поверхности G

$$n_i \nu_i = m_i \nu_i = {}^1/_2\sqrt{2}, \quad l_i \nu_i = 0$$

Отметим, что вектор ν_i можно представить в виде

$$\nu_i = {}^1/_2\sqrt{2}(m_i + n_i) \tag{2.13}$$

Исключая при помощи выражения (2.12) величины A_i из соотношений (2.10) и учитывая (2.13), получим

$$g^{\alpha\beta} B_{k,\,\alpha}\,\{2x_{k,\,\beta}\nu_i\nu_j - (x_{i,\,\beta}\nu_j + x_{j,\,\beta}\nu_i)\,\nu_k\} + g^{\alpha\beta}\,(x_{i,\,\alpha} B_{j,\,\beta} + x_{j,\,\alpha} B_{i,\,\beta}) =$$
$$= -2P\,(m_i m_j + n_i n_j) + (Q + R)\,(m_i l_j + l_i m_j - l_i n_j - l_j n_i) \tag{2.14}$$

Среди шести уравнений (2.14) независимых только три, так как после приравнивания индексов i и j или после умножения на ν_i, ν_j, они сводятся к одному уравнению.

Для определения независимых уравнений умножим соотношение (2.14) на $x_{i\sigma}$ $x_{j,\tau}$ имеем

$$B_{i,\tau}x_{i,\sigma} + B_{i,\sigma}x_{i,\tau} = -2P\,(m_im_j + n_in_j)\,x_{i,\tau}x_{j,\sigma} + \tag{2.15}$$
$$+ (Q + R)\,(m_il_j + m_jl_i - n_il_j - n_jl_i)\,x_{i,\tau}x_{j\sigma}$$

Преобразовывая левую часть соотношений (2.15) по схеме преобразований над соотношением (1.9), получим

$$B_{\tau,\sigma} + B_{\sigma,\tau} - 2\Gamma_{\tau\sigma}{}^{\alpha}B_{\alpha} = -2P\,(m_im_j + n_in_j)\,x_{i,\tau}x_{j,\sigma} +$$
$$+ (Q + R)\,(m_il_j + l_im_j - n_il_j - n_jl_i)\,x_{i,\tau}x_{j,\sigma} \tag{2.16}$$

Векторы $x_{i,\tau}$ представим в виде

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{g_{11}}\,(m_i - n_i), \qquad \frac{\partial x_i}{\partial y_2} = \sqrt{g_{22}}\,l_i \tag{2.17}$$

Здесь криволинейная сетка y_1, y_2 выбрана ортогональной, причем направления B_i и y_1 совпадают.

Подставляя соотношения (2.17) в (2.16), получаем

$$\frac{\partial B_1}{\partial y_1} - \Gamma_{11}{}^1B_1 = -Pg_{11}, \quad \Gamma_{22}{}^1 = 0, \quad \frac{\partial B_1}{\partial y_2} = 2\Gamma_{12}{}^1B_1 + (Q + R)\,(2g_{11}g_{22})^{1/2} \tag{2.18}$$

Из второго уравнения (2.18) и (1.19) получаем, что

$$g_{22} = g_{22}\,(y_2)$$

Отсюда следует, что промежуточные главные направления тензора σ_{ij} совпадают с направлениями геодезических линий поверхности разрыва скоростей деформаций.

Поступила 11 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды. ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.
2. Ивлев Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 3.
3. Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York, London, Acad. Press, 1961. (Русск. пер.: Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964).
4. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н. О свойствах общих уравнений теории изотропного идеального пластического тела при кусочно-линейных потенциалах. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
5. Быковцев Г. И., Мяснянкин Ю. М. О поверхностях скольжения в трехмерных жестко-пластических телах. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 6.
6. Hill R. Discontinuity relations in mechanics of solids. In: Progress in Solids Mechanics, 1961, vol. 2.
7. Mc. Connell A. J. Application of tensor analysis. New York, Dover nubl., 1957. (Русск. пер.: Мак-Коннел А. Д. «Введение в тензорный анализ. С приложениями к геометрии, механике и физике». М., Физматгиз, 1963).
8. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д., Мяснянкин Ю. М. О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеальных жестко-пластических телах. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 5.