

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СМЕШЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

П. П. Корявов, Ю. Н. Павловский

(Москва)

Рассматривается одна из простейших задач смешения — смешение вязкой несжимаемой жидкости. Проведен групповой анализ полной краевой задачи и показано, что различные задачи вязкого смешения (истечение струи, течение в следе и т. д.) получаются как частные случаи при определенных значениях произвольной постоянной m , появляющейся в решении краевой задачи, инвариантном относительно допустимой группы преобразования.

Изучению задач смешения вязкой жидкости посвящена большая литература (см., например, [1-4]). Основной особенностью физической постановки задач смешения является предположение о существовании «узкой» области, зоны смешения, простирающейся вниз по потоку, в которой некоторые величины, характеризующие течение (продольная скорость, температура, концентрация и т. д.), резко меняются в поперечном направлении, другие же (например, давление) существенно меняются лишь вдоль по потоку. Такие зоны смешения возникают при наличии резкого, скачкообразного изменения одной или нескольких величин, характеризующих течение, и представляют область размытия этого резкого изменения, увеличивающуюся по некоторому закону в направлении продольной скорости. Течение в таких узких областях описывается уравнениями пограничного слоя.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим верхнюю половину плоского симметричного относительно горизонтальной оси течения смешения несжимаемой вязкой жидкости, описываемого уравнениями пограничного слоя

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — горизонтальная и вертикальная скорости, ν — коэффициент кинематической вязкости, x и y — декартовы координаты.

Скорости u и v должны удовлетворять граничным условиям

$$\lim [u(x, y) / u_0(y)] = 1 \quad \text{при } x = \text{const}, y \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

$$\lim [u(x, y) / u_0(y)] = 1 \quad \text{при } x \rightarrow 0, y = \text{const} \quad (1.3)$$

$$(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0, \quad (v)_{y=0} = 0 \quad (1.4)$$

Здесь $u_0(y)$ — профиль горизонтальной скорости в сечении $x = 0$. Не делая пока никаких конкретных предположений относительно функции $u_0(y)$, потребуем, чтобы решение задачи (1.1) — (1.4) было автомодельным.

§ 2. Групповой анализ уравнений и сведение краевой задачи к задаче Коши для обыкновенного уравнения. Найдем вначале автомодельное решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям (1.4), а затем выясним, какие функции $u_0(y)$ соответствуют тому или иному автомодельному ре-

шению. Этот анализ будет исчерпывающим в том смысле, что находятся все функции $u_0(y)$, которые могут участвовать в постановке задачи вязкого смещения в том случае, когда ось $y = 0$ является осью симметрии и жидкость является несжимаемой.

Как известно [5], автомодельное решение есть решение инвариантное относительно преобразований какой-либо группы подобия (в данном случае однопараметрической) из тех, которые допускаются системой (1.1). В работе [6] было показано, что система (1.1) допускает две однопараметрические группы подобия, произвольная суперпозиция которых имеет вид

$$u_1 = C^{\alpha-2\beta} u, \quad v_1 = C^{-\beta} v, \quad x_1 = C^\alpha x, \quad y_1 = C^\beta y \quad (2.1)$$

где α и β — произвольные постоянные ($-\infty < \alpha, \beta < \infty$). Любое автомодельное решение системы (1.1) инвариантно относительно группы вида (2.1) с некоторыми фиксированными значениями чисел α и β . Решение системы (1.1) инвариантно относительно группы вида (2.1) имеет вид

$$u = \varphi'(\lambda) x^{\frac{m}{m+2}}, \quad v = \psi(\lambda) x^{-\frac{1}{m+2}}, \quad \lambda = yx^{-\frac{1}{m+2}} \left(m = \frac{\alpha}{\beta} - 2 \right) \quad (2.2)$$

Здесь штрих означает производную по автомодельному переменному λ . Связь между $\psi(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$, получающаяся в результате интегрирования уравнения неразрывности, будет

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{m+2} \lambda \varphi' - \frac{m+1}{m+2} \varphi \quad (2.3)$$

Соотношение (2.2) не содержит решения, соответствующего случаю, когда в (2.1) $\alpha = 0$. Это решение приведено в [6]. Оно неинтересно и рассматриваться не будет.

Подстановка (2.2) в (1.1) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $\varphi(\lambda)$.

$$v\varphi''' + \frac{m+1}{m+2} \varphi\varphi'' - \frac{m}{m+2} \varphi'^2 = 0 \quad (v > 0, m > -2) \quad (2.4)$$

с граничными условиями

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0 \quad (2.5)$$

получающимися из соотношений (1.4) и (2.2). В качестве третьего, недостающего, условия возьмем

$$\varphi'(0) = \gamma \quad (\gamma > 0) \quad (2.6)$$

Каждое решение задачи (2.4) — (2.6) с некоторыми фиксированными значениями v , γ и m , порождает в силу (2.2) некоторое решение $u(x, y)$, $v(x, y)$ системы (1.1), удовлетворяющее условиям (1.4). Из (1.2), (1.3) и (2.2) видно, что вопрос о том, каким будет течение в физической плоскости, сводится к установлению асимптотического поведения решения $\varphi(\lambda)$ задачи (2.4) — (2.6) при $\lambda \rightarrow \infty$. Действительно, зная асимптотическое поведение решения $\varphi(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, можно указать такую функцию $u_0(y)$, для которой имеют место соотношения (1.2) и (1.3), т. е. полностью определить задачу смещения.

Легко показать, что параметры ν и γ , входящие в формулировку задачи (2.4) — (2.6), не будут существенными.

В самом деле введение функции $\varphi_1(\lambda) = \nu^{-1} \varphi(\lambda)$ позволяет избавиться от параметра ν в уравнении (2.4), а замена

$$\varphi_2(\lambda_1) = \left(\frac{\gamma}{\nu}\right)^{-1/2} \varphi_1(\lambda), \quad \lambda_1 = \left(\frac{\gamma}{\nu}\right)^{1/2} \lambda \quad (2.7)$$

позволяет свести задачу для $\varphi_2(\lambda_1)$ к следующей:

$$\varphi_2''' + \frac{m+1}{m+2} \varphi_2 \varphi_2'' - \frac{m}{m+2} \varphi_2'^2 = 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_2''(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 1 \quad (2.8)$$

Таким образом, решение задачи (2.4) — (2.6) и его асимптотическое поведение легко может быть получено из решения и асимптотического поведения решения задачи (2.8) при помощи соотношений

$$\varphi(\lambda) = (\nu\gamma)^{1/2} \varphi_2(\lambda_1), \quad \lambda = \left(\frac{\nu}{\gamma}\right)^{1/2} \lambda_1 \quad (2.9)$$

При рассмотрении задач смешения обычно вводятся две интегральные характеристики: импульс I_0 и расход I_1 , которые с учетом симметрии течения записываются в плоском случае следующим образом:

$$I_0 = 2 \int_0^y u^2 dy = 2x^{\frac{2m+1}{m+2}} \nu^{1/2} \gamma^{3/2} \int_0^{\lambda_1} \varphi_2'^2(\lambda_1) d\lambda_1 \quad (2.10)$$

$$I_1 = 2 \int_0^y u dy = 2x^{\frac{m+1}{m+2}} (\nu\gamma)^{1/2} \varphi_2(\lambda_1) \quad (2.11)$$

Из соотношений (2.10) и (2.11) видно, что при некоторых значениях m импульс и расход сохраняют постоянное значение вдоль оси x .

§ 3. Анализ некоторых конкретных течений. Из (2.2) видно, что $m > 0$ соответствует задачам смешения двух потоков (или течению в следе за телом) — скорость $u(x, y)$ вдоль оси симметрии течения возрастает, а $0 > m > -2$ соответствует задачам смешения при истечении струи — скорость вдоль оси симметрии убывает.

Имеются четыре значения параметра m , при которых решение задачи (2.8) может быть изучено аналитически. Это — значения $m = 0$, $m = -0.5$, $m = -1$, $m = 1$. Остановимся вначале на случае $m = -0.5$.

а) Случай $m = -0.5$ хорошо изучен (см., например, [?]) и соответствует классической задаче о затопленной струе. Задача (2.8) примет в этом случае вид

$$\varphi_2''' + 1/3 \varphi_2 \varphi_2'' + 1/3 \varphi_2'^2 = 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_2''(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 1 \quad (3)$$

Уравнение (3.1) легко интегрируется, произвольные постоянные находятся из начальных условий и в результате решение записывается в виде

$$\varphi_2(\lambda_1) = \sqrt{6} \operatorname{th} \frac{\lambda_1}{\sqrt{6}} \quad (3.2)$$

Поведение самого решения $\varphi_2(\lambda_1)$ и его производной $\varphi_2'(\lambda_1)$ при $\lambda_1 \rightarrow \infty$ легко находится

$$\varphi_2(\lambda_1) \rightarrow \sqrt{6}, \quad \varphi_2'(\lambda_1) = 2 \left[1 + \operatorname{ch} \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \lambda_1 \right) \right]^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda_1 \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

Из соотношений (2.2), (2.9) и (3.3) следует, что

$$u(x, y) = x^{-1/3} \gamma \varphi_2'(\lambda_1) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } x = \text{const}, \quad y \rightarrow \infty \\ 0 & \text{при } x \rightarrow 0, \quad y = \text{const} \\ \infty & \text{при } x \rightarrow 0, \quad y = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

т. е. в соответствии с (1.2) и (1.3) получаем

$$u_0(y) = 0 \quad \text{при } y \neq 0, \quad u_0(y) = \infty \quad \text{при } y = 0 \quad (3.5)$$

Нетрудно проверить, что характерное для затопленной струи условие сохранения импульса вдоль оси x также выполняется

$$I_0 = 2\nu^{1/2} \gamma^{3/2} \int_0^{\infty} \varphi_2'^2(\lambda_1) d\lambda_1 = 2\nu^{1/2} \gamma^{3/2} i_0 = \text{const} \quad (3.6)$$

Из (3.6) видно, что если задана величина I_0 и интеграл i_0 ограничен, то константа γ легко находится, так как i_0 вычисляется по известному решению $\varphi_2(\lambda_1)$, а ν — известная величина, характеризующая свойство смешиваемой жидкости. Таким образом, в данном случае величина γ полностью определяется величиной импульса, сообщаемого в единицу времени частицам жидкости в точке $x = 0, y = 0$.

б) Рассмотрим случай $m = 1$. Задача (2.8) в этом случае эквивалентна следующей:

$$\varphi_2^{IV} + 2/3 \varphi_2 \varphi_2''' = 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_2''(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 1, \quad \varphi_2'''(0) = 1/3 \quad (3.7)$$

Решение этой задачи в отличие от (3.1) уже не может быть получено в аналитическом виде, но может быть найдено численным интегрированием.

Однако, используя прием Вейля [8], можно получить асимптотическое поведение решения $\varphi_2(\lambda_1)$ и, следовательно, найти вид функции $u_0(y)$.

Из (3.7) следует

$$g(\lambda_1) = \Phi(g) = \exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{3}\right) \exp\left[-\frac{1}{27} \int_0^{\lambda_1} (\lambda_1 - \xi)^3 g(\xi) d\xi\right], \quad g(\lambda_1) = 3\varphi_2'''(\lambda_1) \quad (3.8)$$

Будем решать интегральное уравнение (3.8) методом последовательных приближений по схеме

$$g_0(\lambda_1) \equiv 1, \quad g_1(\lambda_1) = \Phi(g_0), \dots, g_{i+1}(\lambda_1) = \Phi(g_i), \dots$$

Докажем, что последовательность $\{g_i\}$ сходится и найдем $\lim g_i(\lambda_1)$ при $i \rightarrow \infty$.

Очевидно, что если $q(\xi) \geq h(\xi)$ ($0 \leq \xi < +\infty$), то $\Phi(q) \leq \Phi(h)$ ($0 \leq \xi < +\infty$). Очевидно также, что

$$g_0(\lambda_1) \geq g_1(\lambda_1), \quad g_0(\lambda_1) \geq g_2(\lambda_1)$$

Отсюда следует, что

$$g_0 \geq g_2 \geq g_4 \geq \dots, \quad g_1 \leq g_3 \leq g_5 \leq \dots, \quad g_{2i} \geq g_{2k+1} \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

Пусть $0 < h(\xi) < q(\xi) \leq 1$ ($0 \leq \xi < +\infty$). Обозначим

$$\sup [q(\xi) - h(\xi)] = A \quad (\xi \geq 0)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(h) - \Phi(q) &= \exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{3}\right) \exp\left(-\frac{1}{27} \int_0^{\lambda_1} (\lambda_1 - \xi)^3 h(\xi) d\xi\right) \times \\ &\times \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{27} \int_0^{\lambda_1} (\lambda_1 - \xi)^3 [q(\xi) - h(\xi)] d\xi\right)\right] \leq \\ &\leq \exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{3}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{A\lambda_1^4}{108}\right)\right] \leq \exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{3}\right) \frac{A\lambda_1^4}{108} \leq \frac{A}{3e^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) следует равномерная на $[0, +\infty)$ сходимость последовательности $\{g_i\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Очевидно, что

$$\varphi_2''(\lambda_1) = 1/3 \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(\lambda_1) \quad (i \rightarrow \infty), \quad 1/3g_1(\lambda_1) \leq \varphi_2'''(\lambda_1) \leq 1/3g_2(\lambda_1) \quad (\lambda_1 \geq 0) \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{3} - \frac{\lambda_1^4}{108}\right) \leq \varphi_2'''(\lambda_1) \leq \\ & \leq \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{3}\right) \exp\left[-\frac{1}{27} \int_0^{\lambda_1} (\lambda_1 - \xi)^3 \exp\left(-\frac{\xi^2}{3} - \frac{\xi^4}{108}\right) d\xi\right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из (3.12) следует, что при больших значениях λ_1

$$\varphi_2'''(\lambda_1) = o(e^{-\lambda_1^2}) \quad (3.13)$$

Таким образом, при $\lambda_1 \rightarrow \infty$

$$\varphi_2''(\lambda_1) = a + o(e^{-\lambda_1^2}) \quad (3.14)$$

$$\varphi_2'(\lambda_1) = a\lambda_1 + b + o(e^{-\lambda_1^2}) \quad (3.15)$$

$$\varphi_2(\lambda_1) = 1/2a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + d + o(e^{-\lambda_1^2}) \quad (3.16)$$

Здесь a , b и d — некоторые положительные постоянные, определяемые численно. Из соотношений (2.2), (2.9) и (3.15) следует, что при больших y и $x > 0$

$$u(x, y) = x^{1/2}\gamma\varphi_2' \rightarrow v^{1/2}\gamma^{3/2}ay + \gamma bx^{1/3} + o\left(\exp\left[-\frac{\gamma}{v} \frac{y^2}{x^{2/3}}\right]\right) \quad (3.17)$$

Из (3.17) и из симметрии течения следует, что $u_0(y)$ будет иметь вид

$$u_0(y) = v^{1/2} \gamma^{3/2} a |y| \quad (3.18)$$

Отсюда следует, что величину γ легко найти, если задана производная $\partial u_0(y)/\partial y$, т. е. наклон профиля скорости в сечении $x = 0$.

в) Случай $m = 0$ — тривиальный. Действительно при $m = 0$ уравнение (2.8) примет вид

$$\varphi_2'''' + 1/2\varphi_2\varphi_2'' = 0 \quad (3.19)$$

и решение, удовлетворяющее начальным условиям, будет $\varphi_2 = \lambda_1$. Скорости будут $u(x, y) = \gamma\varphi_2'(\lambda_1) = \gamma = \text{const}$, $v(x, y) = 0$, т. е. получается плоскопараллельный поток.

г) В случае $m = -1$, переходя к функции $w = \varphi_2'(\lambda_1)$, задачу (2.11) можно записать в виде

$$w''' + w^2 = 0, \quad w(0) = 1, \quad w'(0) = 0 \quad (3.20)$$

Интегрируя (3.20), получаем

$$\lambda_1 = - \int_1^w \frac{d\xi}{V^{2/3}(1-\xi^3)} \quad (3.21)$$

Из (3.21) видно, что существует такое λ_1^0 , при котором $w = 0$. Из (2.3) следует что $\psi(\lambda_1^0) = 0$. Таким образом, при $\lambda_1 = \lambda_1^0$ скорости u и v обращаются в нуль, т. е. выполняется условие прилипания. В физической плоскости прямая $\lambda_1 = \lambda_1^0$ переходит в прямую

$$y = (v/\gamma)^{1/2} \lambda_1^0 x \quad (3.22)$$

Это означает, что случай $m = -1$ соответствует течению вязкой жидкости в угле между двумя плоскостями. Величина γ в этом случае определяется из угла раствора плоскостей. Это решение может быть получено непосредственно из решения Гамеля [9] при отбрасывании членов, которые малы при больших числах Рейнольдса.

§ 4. Результаты численных расчетов. Для произвольных значений параметра m задачу (2.11) можно решить численно. На фиг. 1 показано изменение $\varphi_2'(\lambda_1)$ для различных значений m .

Анализ поведения функции $\varphi_2'(\lambda_1)$ для $m = -0.25$ и $m = -0.375$ показывает, что при больших λ_1 она может быть представлена в виде

$$\varphi_2'(\lambda_1) = C_1(m) \lambda_1^m \quad (4.1)$$

Функция $u_0(y)$ тогда будет

$$u_0(y) = C_1(m) |y|^m \quad (4.2)$$

При $0 > m > -0.5$ в физической плоскости получается течение, которое можно назвать «размазанной» струей. Асимптотика скорости этой струи зависит от параметра m . Коэффициент $C_1(m)$ уменьшается с уменьшением m . Так, например,

$$C_1(-0.25) = 0.81; \quad C_1(-0.375) = 0.391$$

По-видимому, при $m = -0.5$ коэффициент C_1 обращается в нуль и следующий член асимптотического представления становится главным [см. (3.2)].

При $1 > m > 0$, как показывает пример для $m = 0.5$, асимптотическое поведение $\varphi_2'(\lambda_1)$ при $\lambda_1 \rightarrow \infty$ также представимо в виде (4.1), а функция $u_0(y)$ — в виде (4.2). В физической плоскости этот случай соответствует смещению двух потоков с

параболическими профилями. Из фиг. 1 видно, что для значений m , лежащих в диапазоне $-0.5 > m > -1$ функция $\varphi_2'(\lambda_1) \rightarrow -\infty$ при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_{1*}$; здесь λ_{1*} — некоторое предельное, ограниченное значение λ_1 . Поэтому рассмотрение асимптотического поведения при $\lambda_1 \rightarrow \infty$ для этих функций в данном случае невозможно.

Случаи для этих значений m будут соответствовать течениям в каналах с криволинейными стенками

$$y = (\nu / \gamma)^{1/2} \lambda_1^0 x^{1/(m+2)} \quad (4.3)$$

Горизонтальная скорость на этих криволинейных стенках будет равна нулю, а вертикальная — некоторой отрицательной величине, что соответствует вдуву через стенки.

§ 5. Смещение при наличии градиента давления. Рассмотрим течение смещения, в котором давление является некоторой функцией x .

В этом случае первое уравнение (1.1) примет вид

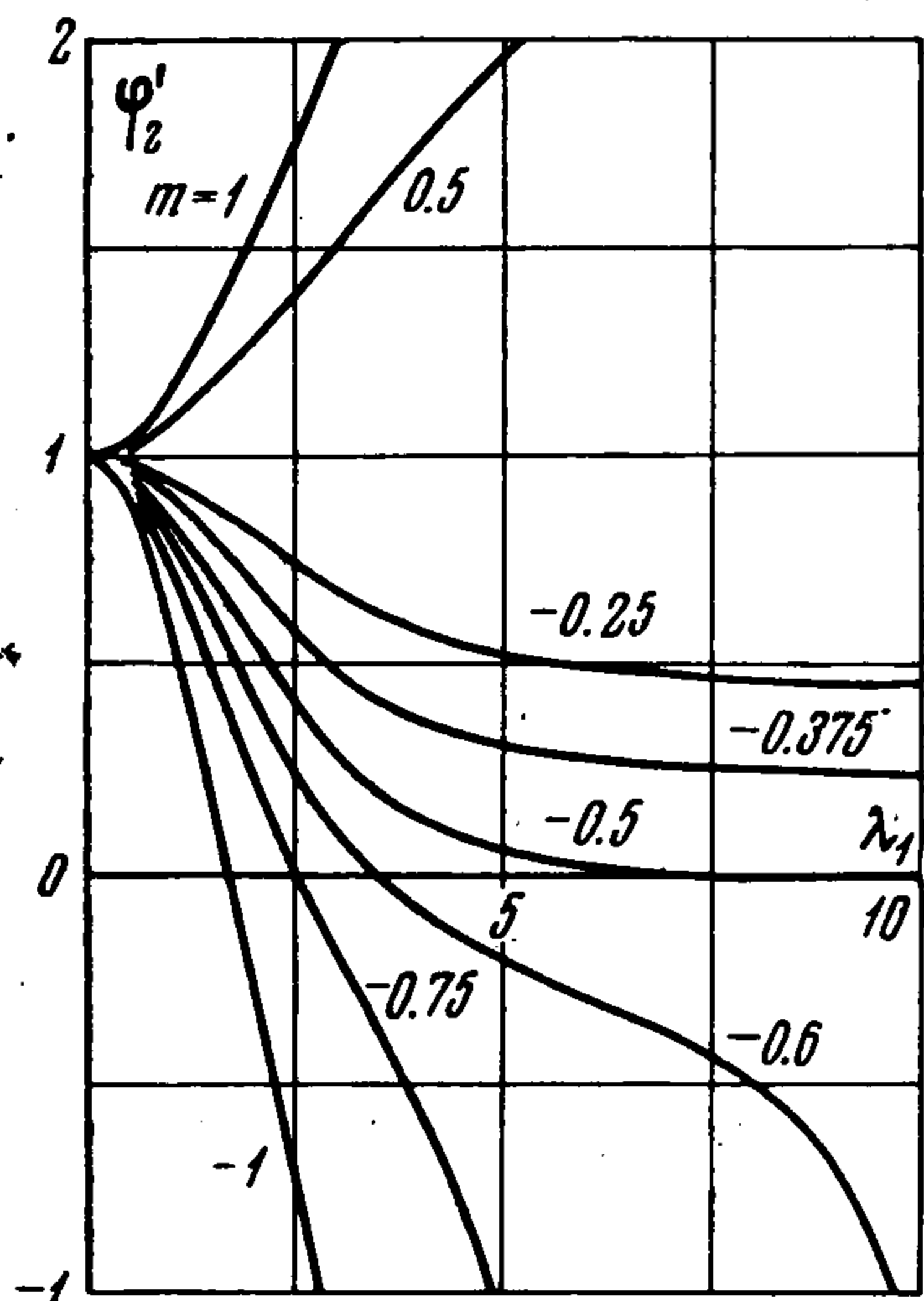
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.1)$$

где $p = p(x)$ — давление, отнесенное к плотности жидкости. Для автономности задачи необходимо, чтобы давление имело вид

$$p = 1/2 \chi_0 x^{2m/(m+2)} \quad (5.2)$$

где χ_0 — новый параметр задачи, характеризующий давление. Уравнение движения теперь будет

$$\nu \varphi''' + \frac{m+1}{m+2} \varphi \varphi'' - \frac{m}{m+2} (\varphi'^2 + \chi_0) = 0 \quad (5.3)$$



Фиг. 1

и после перехода к функции $\varphi_2(\lambda_1)$ примет вид

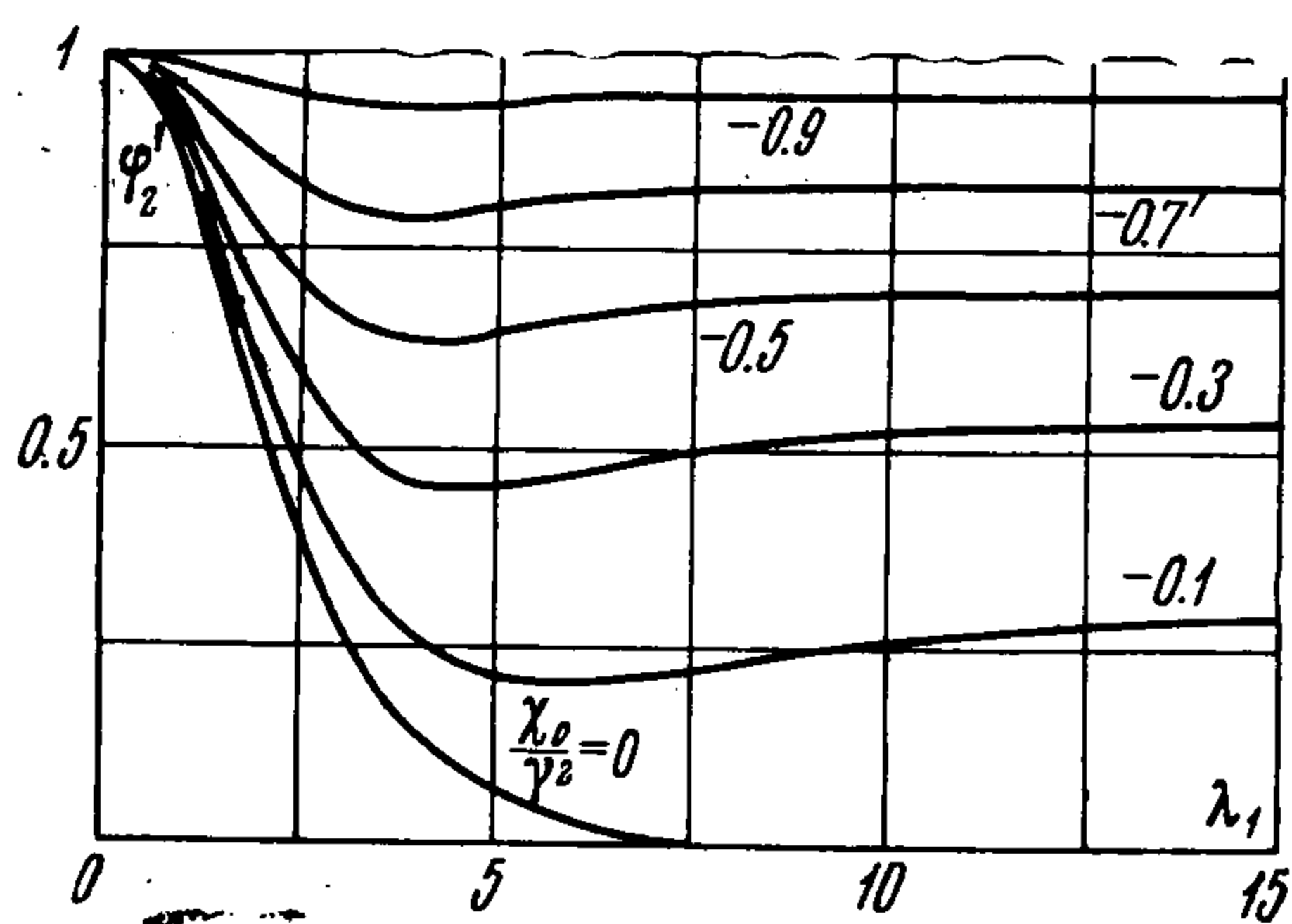
$$\varphi_2''' + \frac{m+1}{m+2} \varphi_2 \varphi_2'' - \frac{m}{m+2} \left(\varphi_2'^2 + \frac{\chi_0}{\gamma^2} \right) = 0 \quad (5.4)$$

граничные условия для него будут теми же, что и раньше [см. (2.8)].

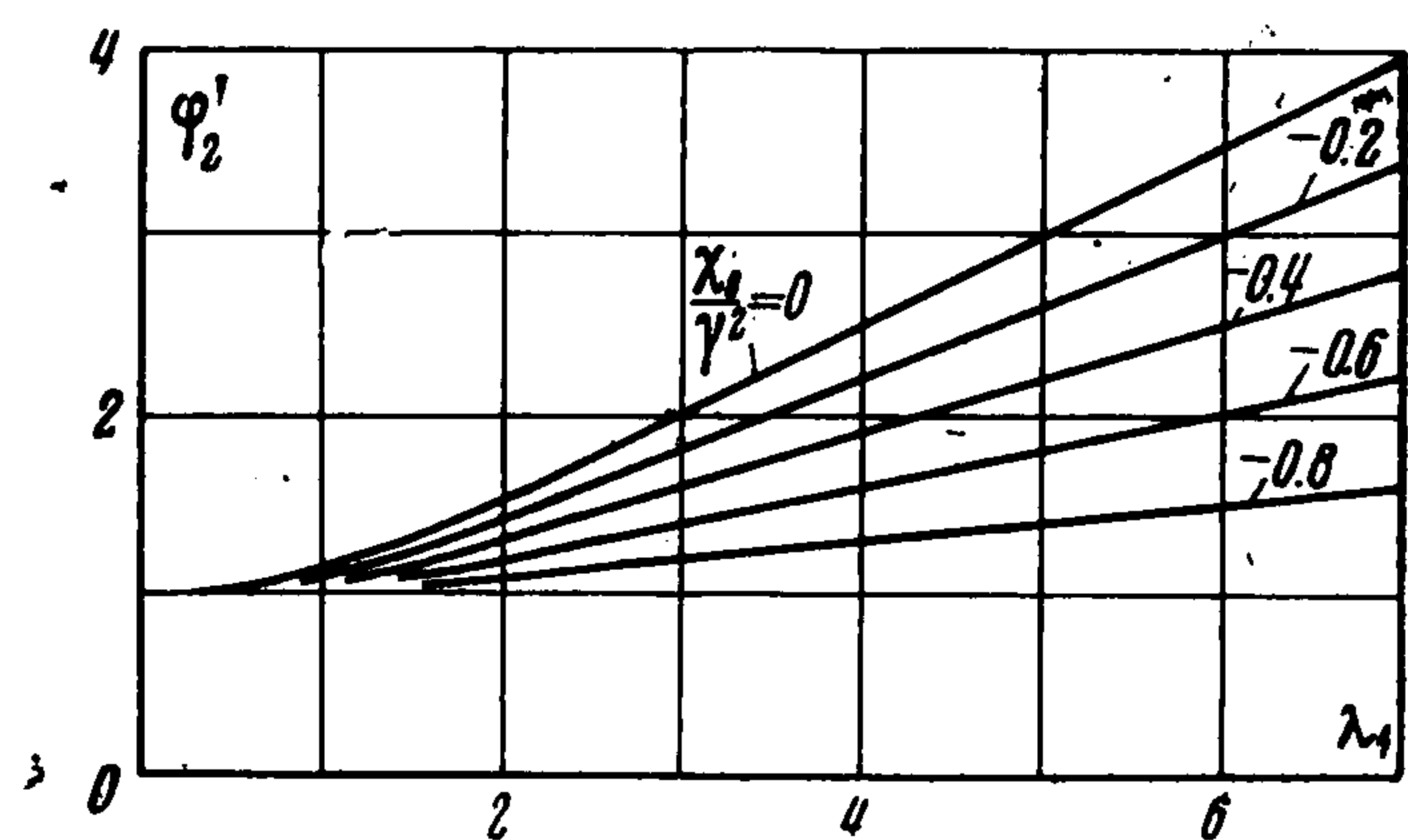
Решение этой задачи зависит от значения параметра m и величины χ_0/γ^2 , являющейся вторым параметром задачи.

Остановимся теперь на анализе течений с градиентом давления для конкретных значений параметра m , рассмотренных в § 3.

В случае $m = -0.5$ уравнение (5.4) уже нельзя проинтегрировать и получить точное решение. Найти асимптотику при $\lambda_1 \rightarrow \infty$ также не удастся. Решение может быть получено численно. На фиг. 2 приведены результаты расчетов $\varphi_2'(\lambda_1)$ для различных



Фиг. 2



Фиг. 3

значений отношения χ_0/γ^2 в диапазоне $0 \geq \chi_0/\gamma^2 \geq -1$. Из этой фигуры видно, что $\varphi_2'(\lambda_1) \rightarrow \text{const}$ при $\lambda_1 \rightarrow \infty$. При $\chi_0/\gamma^2 = 0$ получается известное точное решение. При $\chi_0/\gamma^2 = -1$ для всех значений параметра m получается тоже точное решение $\varphi_2(\lambda_1) = \lambda_1$.

В случае $m = 1$ уравнение (5.4) легко сводится к (3.7). Изменится только значение $\varphi_2'''(0)$. Оно будет $\varphi_2'''(0) = \varepsilon/3$, где $\varepsilon = 1 + \chi_0/\gamma^2$. Предполагая, что $\varepsilon > 0$ и действуя так же, как в § 3, можно изучить асимптотическое поведение решения $\varphi_2(\lambda_1)$ при наличии градиента давления. Интегральное уравнение, аналогичное (3.8), теперь будет

$$g(\lambda_1) = \exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{3}\right) \exp\left[-\frac{\varepsilon}{27} \int_0^{\lambda_1} g(\xi) (\lambda_1 - \xi)^3 d\xi\right] \quad \left(g(\lambda_1) = \frac{3}{\varepsilon} \varphi_2'''(\lambda_1)\right) \quad (5.5)$$

Оценка (3.10) примет вид

$$\Phi(h) - \Phi(q) \leq \frac{\varepsilon A}{3e^2} \quad (5.6)$$

Соотношения (3.14) — (3.18) не изменятся, но постоянные a и b естественно будут другими и будут зависеть от отношения χ_0/γ^2 .

На фиг. 3 приведены кривые, иллюстрирующие изменение профиля $\varphi_2'(\lambda_1)$ в зависимости от отношения χ_0/γ^2 .

Этот случай соответствует той же физической картине течения, что и при $p = \text{const}$. Из фиг. 3 видно, что для значений отношения χ_0/γ^2 , изменяющегося в диапазоне $0 > \chi_0/\gamma^2 > -1$ увеличение абсолютной величины давления приводит к выпрямлению профиля скорости, приближению его к вертикальному. Это связано с тем, что градиент давления противоположен направлению скорости.

Случай $m = 0$ ничем не отличается от рассмотренного в § 3.

В случае $m = -1$, вводя функцию $w = \varphi_2'$, получаем задачу

$$w'' + w^2 + \chi_0/\gamma^2 = 0, \quad w(0) = 1, \quad w'(0) = 0 \quad (5.7)$$

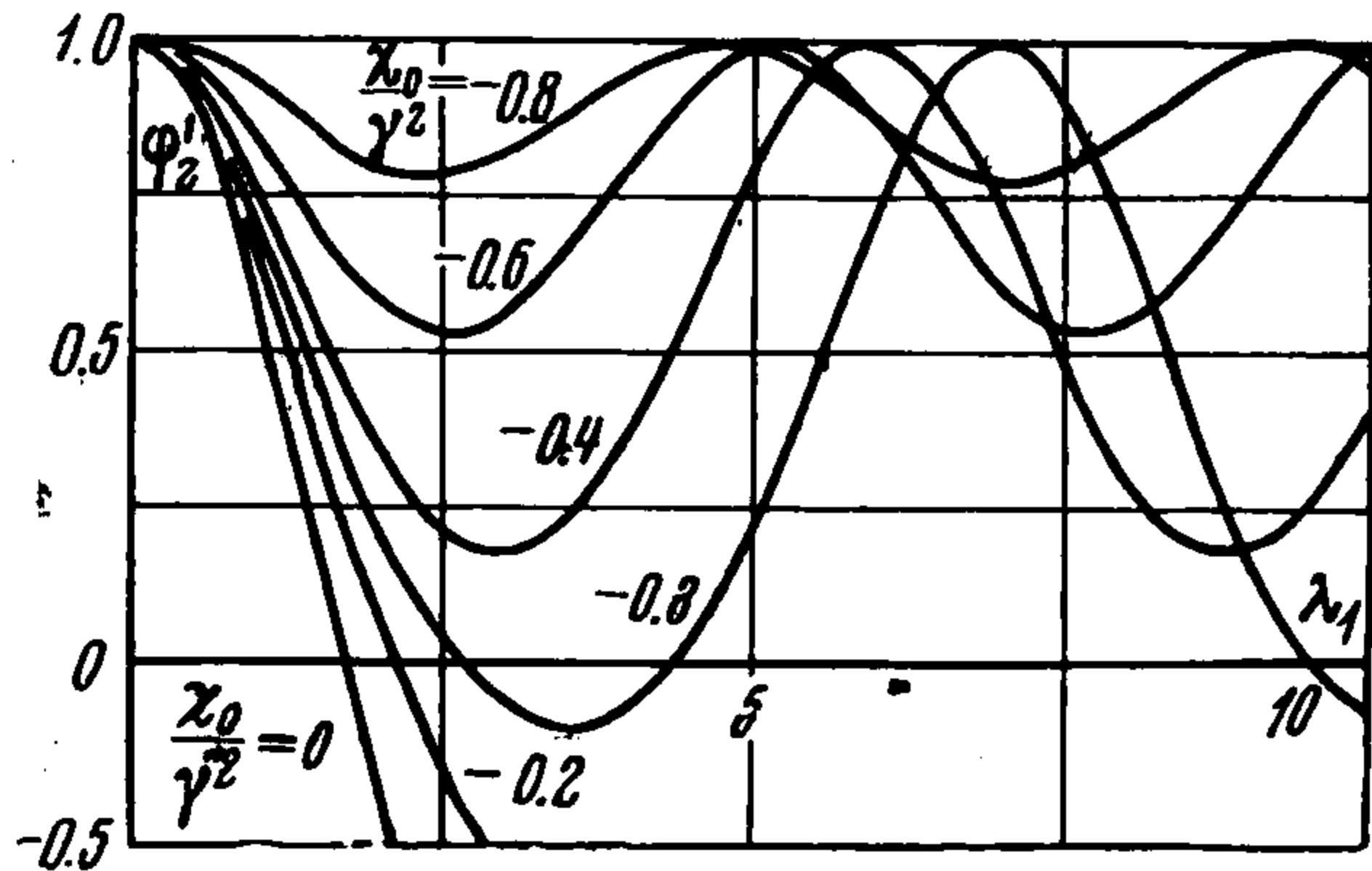
решение которой сводится к эллиптическому интегралу

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} \int_w^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}} \quad \left(\xi_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \left[-3 \left(\frac{1}{4} + \frac{\chi_0}{\gamma^2} \right) \right]^{1/2} \right) \quad (5.8)$$

Как и в предыдущем, можно найти такое λ_1^0 , при котором $w = 0$. Однако λ_1^0 будет существовать только для значений χ_0/γ^2 , для которых неравенство

$$\frac{1}{3} (1 - \xi^3) + (1 - \xi) \chi_0 / \gamma^2 > 0 \quad (5.9)$$

выполняется для всех ξ из сегмента $[0, 1]$. Отсюда следует, что $\chi_0 / \gamma^2 > -1/3$. В физической плоскости этот случай при $0 > \chi_0 / \gamma^2 > -1/3$ будет соответствовать течению в прямолинейном расширяющемся канале; при этом λ_1^0 будет зависеть от отношения χ_0 / γ^2 и для нахождения профиля скорости $u(x, y)$ нужно задавать не только угол наклона стенки канала в физической плоскости, но и давление $p(x)$.



Фиг. 4

Интеграл (5.8) легко может быть сведен к стандартному для эллиптических интегралов виду (см. [10]).

Если $0 > \chi_0 / \gamma^2 > -1/4$, то

$$\lambda_1 = (2/3t)^{-1/2} F(2 \operatorname{arctg} \sqrt{(1-w)t^{-1}}, \sqrt{1/2 + 3/4 t^{-1}}) \quad (t = \sqrt{3(1 + \chi_0 / \gamma^2)}) \quad (5.10)$$

Если $-1/4 > \chi_0 / \gamma^2 > -1$, то

$$\lambda_1 = \left(\frac{6}{1-\xi_2} \right)^{1/2} F(\mu, r), \quad F(\mu, r), \quad \mu = \operatorname{arcsin} \left(\frac{1-w}{1-\xi_1} \right)^{1/2}, \quad r = \left(\frac{1-\xi_1}{1-\xi_2} \right)^{1/2} \quad (5.11)$$

Выражение (5.11) записывается при условии $1 > w \geq \xi_1 > \xi_2$, из которого следует, что

$$1 \geq \varphi_2'(\lambda_1) \geq -1/2 + \sqrt{-3(1/4 + \chi_0 / \gamma^2)} \quad (5.12)$$

На фиг. 4 приведены графики $\varphi_2'(\lambda_1)$, которые показывают, различный характер изменения $\varphi_2'(\lambda_1)$, зависящий от того, в каком из двух вышеуказанных диапазонов находится χ_0 / γ^2 . При $-1/4 > \chi_0 / \gamma^2 > -1$ зависимость $\varphi_2'(\lambda_1)$ является периодической. Минимальное значение $\varphi_2'(\lambda_1)$ можно найти из соотношения (5.12).

Поступила 14 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. А б р а м о в и ч Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
2. Б а й Ш и - и. Теория струй. М., Физматгиз, 1960.
3. В у л и с Л. А., К а ш к а р о в В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
4. К о р я в о в П. П. Численный расчет турбулентного смешения двух однородных потоков газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 3, стр. 495—511.
5. О в с я н н и к о в Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во Сиб. отд. АН СССР, 1962.
6. П а в л о в с к и й Ю. Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 2, стр. 280—294.
7. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1957.
8. W e y l H. Concerning the differential equations of some boundary layer problems. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1942, vol. 28, No. 3.
9. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1953.
10. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, М., Физматгиз, 1962.