

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

Ю. Б. Пономаренко

(Москва)

Найдены достаточные условия устойчивости (1.8), (1.10). Асимптотическими и численными методами рассмотрена устойчивость при больших числах Рейнольдса  $R$ ; найдено, что при  $R \rightarrow \infty$  течение устойчиво.

1. Устойчивость плоского течения Куэтта определяется собственными числами с задачи [1]

$$\begin{aligned} (D^2 - \alpha^2)^2 \varphi - i\alpha R (y - c) (D^2 - \alpha^2) \varphi &= 0 \\ D\varphi(\pm 1) = \varphi(\pm 1) &= 0 \quad (-1 \leq y \leq 1) \quad \left( D = \frac{d}{dy} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

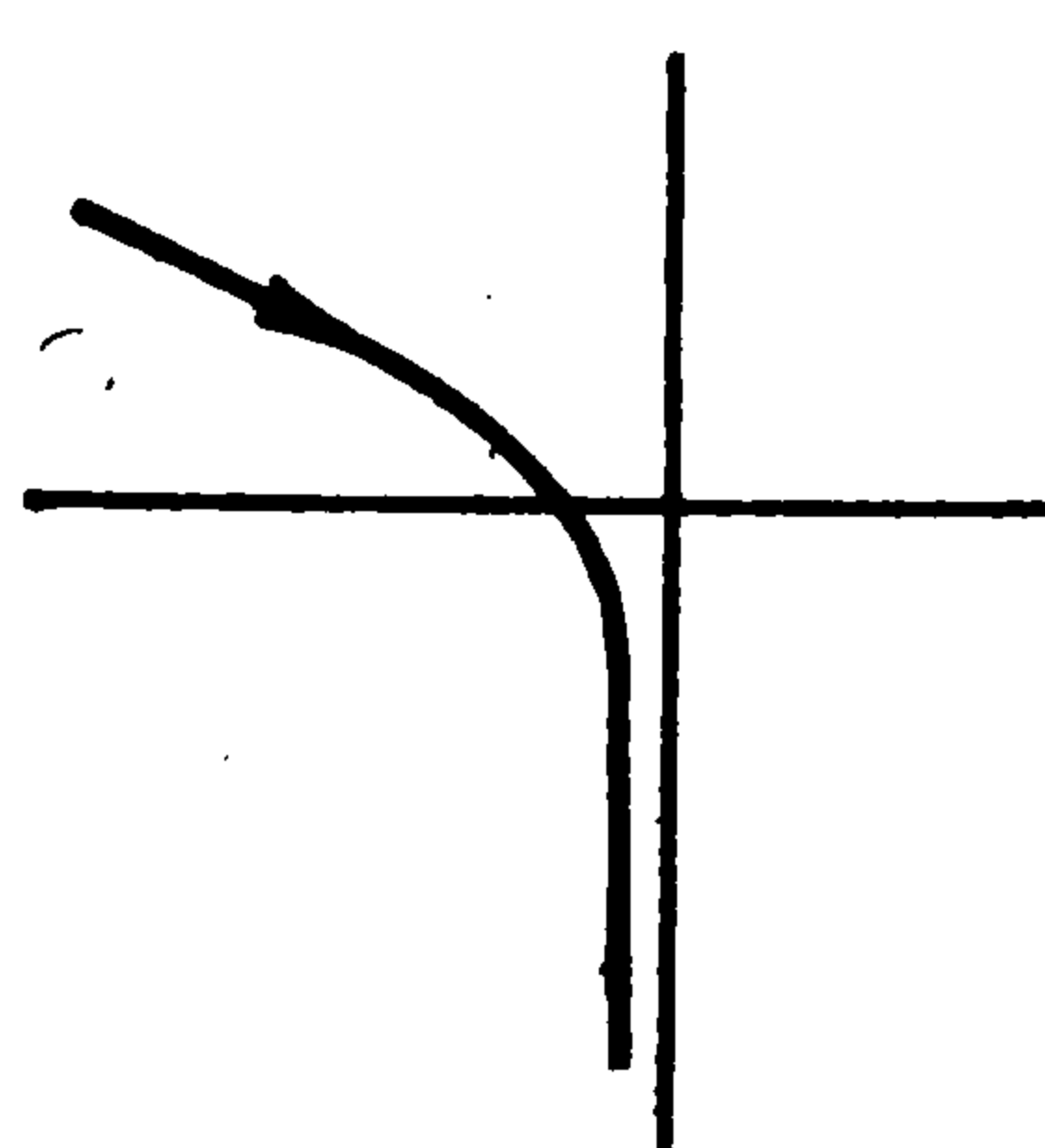
Течение устойчиво, если при любых значениях числа Рейнольдса  $R$  и волнового числа  $\alpha$  все собственные числа  $c = c_r + ic_i$  имеют отрицательную мнимую часть.

Исследователи [2-8] задачи (1.1) предполагают, что течение устойчиво, однако до сих пор это предположение полностью не доказано, так как рассматривались лишь частные значения параметров  $\alpha$ ,  $R$  или частного вида собственные числа. Ниже рассматривается частный случай  $R \rightarrow \infty$ , но в отличие от работ [2,5-7] предполагается малой лишь одна из величин<sup>1</sup>

$$\varepsilon = (\alpha R)^{-1/2}, \quad \delta = \alpha \varepsilon$$

через которые выражаются собственные числа.

Характеристическое соотношение задачи (1.1) можно представить в виде



Фиг. 1

[2]

$$Z_1(\delta) Z_2(-\delta) - Z_1(-\delta) Z_2(\delta) = 0 \quad (1.2)$$

$$Z_{1,2}(\delta) = \int_{\eta_-}^{\eta_+} e^{\delta \eta} \psi_{1,2}(\eta) d\eta$$

$$\eta_{\pm} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \pm 1 - i \frac{\alpha}{R} - c \right) \quad (1.3)$$

Здесь  $\psi_{1,2}$  — независимые решения уравнения

$$i\psi'' + \eta\psi = 0 \quad (1.4)$$

В дальнейшем используются функции [2]

$$A_n(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int \exp(\eta z + 1/3 iz^3) z^{n-1} dz \quad (1.5)$$

где контур интегрирования показан на фиг. 1.

<sup>1</sup> Случай малых  $\varepsilon$  и произвольных  $\delta$  рассмотрен в [6] неточно [2,5].

В качестве решений (1.4) можно взять [2]

$$\psi_1 = A_1, \quad \psi_2 = \omega A_1(\omega\eta) \quad (\omega = e^{2/3 i\pi}) \quad (1.6)$$

После подстановки (1.6), (1.5) в (1.3) и интегрирования по  $\eta$  получается

$$Z_1(\delta) = I(\delta, \eta_+) - I(\delta, \eta_-), \quad Z_2(\delta) = I(\delta/\omega, \omega\eta_+) - I(\delta/\omega, \omega\eta_-)$$

$$I(\delta, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int \exp(\eta\delta + \eta z + 1/3 iz^3) \frac{dz}{z + \delta} \quad (1.7)$$

Здесь контур интегрирования такой же, как и в (1.5), и проходит слева от полюса  $z = -\delta$ .

Относительно собственных чисел задачи (1.1) известно [2,3], что если  $c = c_r + ic_i$  — собственное число, то число  $c = -c_r + ic_i$  — также собственное, причем  $|c_r| \leq 1$ .

Согласно работе [4], чисто мнимые собственные числа соответствуют затухающим возмущениям, поскольку для них выполняется соотношение  $c_i + \alpha/R < 0$ . В приложении показано, что это соотношение выполняется, если

$$\alpha R |c_r| \leq 6 \quad (1.8)$$

Отсюда следует, что при  $\alpha R \leq 6$  течение устойчиво. В связи с этим случай  $\delta \neq 0$  рассматривается в предположении

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad |c_r| \sim 1 \quad (1.9)$$

В приложении показано, что течение устойчиво, если

$$\delta \geq (27/256)^{1/6} \approx 0.7 \quad (1.10)$$

Однако для полноты картины рассмотрен случай произвольных  $\delta$ .

2. В случае (1.9), когда  $c_r \sim -1$

$$|\eta_+| \sim 1/\varepsilon \rightarrow \infty, \quad \Theta = \arg \eta_+ \approx 0$$

и интегралы (1.7) при  $\eta = \eta_+$  можно оценить методом перевала. Вклад точки перевала

$$z_0 = \eta^{1/2} e^{-3/4 i\pi}$$

в интеграл (1.7) есть

$$N(\delta, \eta) = - \frac{\exp(\delta\eta + 2/3 \eta z_0 - 1/4 i\pi)}{2 \sqrt{\pi} z_0^{1/2} (z_0 + \delta)} [1 + O(\eta^{-3/2})]$$

Здесь и ниже аргумент степени числа равен аргументу числа, умноженному на показатель степени.

При  $|\eta_+| \rightarrow \infty$  и любых значениях  $\delta$  будет

$$I(\delta, \eta_+) = N(\delta, \eta_+) \quad (-1/2\pi < \Theta < 1/2\pi) \quad (2.1)$$

$$I(-\delta, \eta_+) = N(-\delta, \eta_+) \quad (-7/6\pi < \Theta < 5/6\pi) \quad (2.2)$$

$$I(\delta/\omega, \omega\eta_+) = N(\delta/\omega, \omega\eta_+) \quad (-11/6\pi < \Theta < 1/6\pi) \quad (2.3)$$

$$I(-\delta/\omega, \omega\eta_+) = N(-\delta/\omega, \omega\eta_+) + \exp(-1/3 i\delta^3) \quad (-1/2\pi < \Theta < 1/6\pi) \quad (2.4)$$

Для получения равномерной по  $\delta$  оценки (2.4) необходимо провести контур интегрирования справа от полюса  $z = \delta/\omega$ , поэтому учтен соответствующий вычет.

Все оценки (2.1) — (2.4) справедливы в области

$$\Delta - 1/2\pi \leq \Theta \leq 1/6\pi - \Delta \quad (\Delta > 0)$$

Из (1.7), (2.1), (2.3) получается, что с точностью до экспоненциально малых членов

$$Z_1(-\delta) = -I(-\delta, \eta_-), \quad Z_2(\delta) = I(\delta/\omega, \omega\eta_+)$$

Остальные выражения для  $Z$  зависят от величины

$$\Lambda = \operatorname{Re}(-\delta\eta_+ - 2/3\eta_+z_0)$$

Пусть  $\Lambda \gg 1$ , тогда  $N$  экспоненциально мало в (2.2) и экспоненциально велико в (2.4); поэтому

$$Z_1(\delta) = -I(\delta, \eta_-), \quad Z_2(-\delta) = I(-\delta/\omega, \omega\eta_+)$$

и соотношение (1.2) принимает вид

$$e^{2\alpha}J(\delta, \eta_-) - He^{-2\alpha}J(-\delta, \eta_-) = 0 \quad (2.5)$$

$$J(\delta, \eta) = e^{\delta\eta}I(-\delta, \eta), \quad H = \frac{J(\delta/\omega, \omega\eta_+)}{J(-\delta/\omega, \omega\eta_+)} = 1 + O\left(\frac{\delta}{\eta_+^{1/2}}\right)$$

Если  $\alpha = \text{const}$ , то  $\delta/\eta_+^{1/2} \sim \alpha\varepsilon^{3/2}$  и поэтому в (2.5) необходимо отбросить члены  $O(\varepsilon^{3/2})$ .

В результате (2.5) переходит в соотношение <sup>1</sup>

$$A_0(\eta) + (\alpha \operatorname{cth} 2\alpha)\varepsilon A_{-1}(\eta) [1 + O(\varepsilon^{3/2})] = 0 \quad (2.6)$$

Это соотношение в пределе при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon = \text{const} \ll 1$  сводится к равенству, установленному ранее [2] другим способом.

Стоит отметить, что в [2] это предельное равенство получено для  $\alpha \neq 0$ ; неточность связана с тем, что отношение отбрасываемых в [2] членов  $O(\delta^{2n})$  к оставленным  $\sim \delta^{2n}A_{4n}(\eta_+)/A_0(\eta_+) \sim \alpha^{2n}$  и мало лишь при малых  $\alpha$ .

В случае  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\delta = \text{const}$  из (2.5) получается с точностью до членов порядка  $\exp(-4\alpha)$

$$J(\delta, \eta) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\exp(\eta z + 1/3 iz^3)}{z - \delta} dz \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n A_{-n}(\eta) = 0 \quad (2.7)$$

Здесь второе выражение для  $J$  получается из первого, если провести контур интегрирования вне круга  $|z| = \delta$  (что всегда возможно), разложить  $1/(z - \delta)$  в ряд по  $\delta/z$  и почленно проинтегрировать.

При получении (2.5), (2.6) предполагалось, что введенная выше величина  $\Lambda \gg 1$ .

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем индекс у  $\eta_-$  опускается.

Если  $\Lambda \lesssim 1$  (что возможно при  $\delta^{-1} = O(\varepsilon^{1/2})$ ), то с точностью до членов  $O(\exp^{2/3}\eta_{\pm}z_0)$  из (1.2), (1.7), (2.1)–(2.4) получается (2.7). Таким образом, соотношения (2.5), (2.7) охватывают любые значения  $\delta$ .

3. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  и конечных  $\alpha$  из (2.6) получается  $A_0(\eta) = 0$ . Корни этого уравнения исследованы в [2,5], они соответствуют затухающим возмущениям. Остается рассмотреть случай конечных  $\delta$ .

Большие по модулю корни уравнения (2.7) можно исследовать при помощи асимптотического выражения

$$J(\delta, \eta) = V_+ + V_- + \exp(\eta\delta + 1/3 i\delta^3) \quad (3.1)$$

$$V_{\pm} = - \frac{\exp[\pm (2/3 \eta z_0 - 1/4 i\pi)]}{2 (\pi z_0)^{1/2} (z_0 \mp \delta)}, \quad z_0 = \eta^{1/2} e^{-3/4 i\pi}$$

$$(|\eta| \rightarrow \infty, \quad -3/2\pi \leq \arg \eta \leq -1/2\pi - \Delta, \quad \Delta > 0)$$

При получении равномерной по  $\delta$  оценки (3.1) контур интегрирования проводится справа от полюса  $z = \delta$ ; величины  $V_{\pm}$  есть вклады точек перевала  $z = \pm z_0$ , а третье слагаемое в (3.1) есть вычет точки  $z = \delta$ .

Удобно представить (3.1) в виде (3.2)

$$J(\delta, \eta e^{-3/4 i\pi}) = \sqrt{\pi} \eta^{-1/4} (\eta + \delta^2 \beta^2) \exp(1/3 i\delta^3 - \delta \eta \beta) - \cos x + \beta \delta \eta^{-1/2} \sin x$$

$$x = 1/4 \pi + 2/3 \eta^{3/2}, \quad \beta = e^{-1/4 i\pi} \quad (-1/3 \pi \leq \arg \eta \leq 2/3 \pi - \Delta)$$

Течение неустойчиво, если  $\arg \eta > 1/6\pi$  для какого-либо корня уравнения  $J = 0$ . Полагая

$$\eta^{1/2} = r e^{i\varphi}, \quad \rho = \delta / r$$

и считая  $\varphi, \rho$  малыми, получим из (3.2)

$$\cos x = \sqrt{\pi} r^{3/2} e^{-\delta^2 r^2} \equiv F(r, \delta), \quad x = (1/4 \pi + 2/3 r^3) + i(2r^3 \varphi) = a + ib \quad (3.3)$$

При больших  $F$  можно принять  $\cos x = 1/2 \exp(\mp ix)$ ; здесь и ниже верхний знак соответствует «верхним» корням, у которых  $\varphi > 0$ .

Из сравнения амплитуд и фаз входящих в (3.3) величин получается

$$b = \pm \ln 2 |F|, \quad a \pm \psi = 2\pi n \quad (\psi = 1/2 \delta r^2, \delta \geq 0, n \geq 1) \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует:

$$r \approx r_0 \mp 1/4 \delta, \quad r_0^3 = 3\pi(n - 1/8), \quad \varphi \approx \pm 1/2 r_0^{-3} \ln 2 |F(r_0, \delta)| \quad (3.5)$$

Выражения (3.5) показывают, что с ростом  $\delta$  оба угла убывают, а радиус увеличивается у нижнего корня и уменьшается у верхнего.

Соотношения (3.4), (3.5) теряют применимость при

$$\delta \sim \delta_1 = 3^{-1/2} r_0^{-2} \ln(\pi r_0^3)$$

когда  $F \sim 1$ . Значение  $\delta_1$  определяется равенством  $|F| = 1$ .

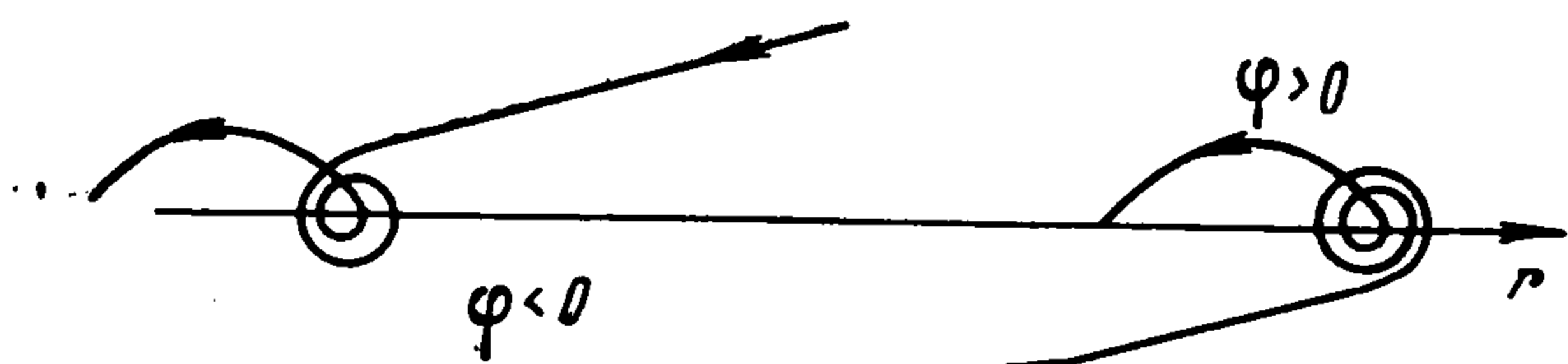
При  $\delta \sim \delta_1$  величина  $\psi \approx 1/2 \delta_1 r_0^2 = \psi_1$  велика, поэтому в круге  $r < r_0$  число верхних корней приблизительно на  $2\psi_1$  больше числа нижних; полное число корней приблизительно такое же, как и при  $\delta = 0$ .

При  $\delta = \infty$  уравнение (3.3) имеет решения  $\varphi = 0$ ,

$$x_m = a(r_m) = 1/2 \pi + \pi m \quad (m \geq 1) \quad (3.6)$$

Для малого отклонения  $\chi = x - x_m$  из (3.3) получается

$$\chi = (-1)^{m+1} F(r_m, \delta) \quad (\delta \rightarrow \infty) \quad (3.7)$$



Фиг. 2

Отсюда следует, что точки (3.6) — устойчивые фокусы; спирали  $\chi(\delta)$  наматываются на фокусы против часовой стрелки.

При  $\delta > \delta_1$  каждый корень  $\eta(\delta_1)$  наматывается на один из ближайших фокусов, для которых  $r_m \approx r(\delta_1)$ .

Отсюда получается<sup>1</sup>

$$m \approx 2n - 1/2 \mp \psi_1 / \pi$$

Наматывание прекращается при

$$\delta \sim \delta_2 \approx 3^{-1/2} r_0^{-2} \ln(3/4 \pi r_0^3)$$

Когда последний член в (3.2) становится сравнимым с  $F$ . Значение  $\delta_2$  определяется равенством  $\rho = |F|$ . Число витков приблизительно равно<sup>2</sup>

$$(\psi_2 - \psi_1)/(2\pi) \approx r_m^2(\delta_2 - \delta_1)/(4\pi) \approx (\ln r_m^3)/(2\pi\sqrt{3})$$

В области  $E$  ( $\delta_2 < \delta < \infty$ ) в (3.1), (3.2) можно пренебречь вычетом<sup>3</sup>; при этом (3.3) можно записать в виде

$$e^{-2ix} = (i\beta\rho + 1)/(i\beta\rho - 1)$$

После умножения и деления этого уравнения на комплексно-сопряженное получается

$$e^{4ib} = \frac{1 + \rho + \rho^2}{1 - \rho + \rho^2}, \quad e^{4ia} = \frac{1 - \rho^2 - i\sqrt{3}\rho}{1 - \rho^2 + i\sqrt{3}\rho} \quad (3.8)$$

Из (3.8) следует, что в области  $E$  величина  $a$  уменьшается от значения  $\approx x_m$  до значения  $\pi m$ , а угол

$$\varphi = 1/8 r^{-3} \ln[(1 + \rho + \rho^2)/(1 - \rho + \rho^2)] \quad (3.9)$$

увеличивается от нуля до максимального значения при  $\rho \approx 1$  и затем уменьшается до нуля.

<sup>1</sup> Можно ожидать, что для небольших  $n$  (когда  $\psi_1 \sim 1$ ) будет  $m = 2n - 1/2 \mp 1/2$ .

<sup>2</sup> Можно ожидать, что для небольших  $m$  (когда  $\psi_2 \sim 1$ ) число витков равно нулю, т. е. корни приближаются к точкам (3.6) аperiodически.

<sup>3</sup> Асимптотические выражения в [6] не учитывают вычета, поэтому результаты [6] применимы лишь в области  $E$ .

На основании вышесказанного можно ожидать, что при больших  $n$  пара корней изменяется при увеличении  $\delta$  так, как показано на фиг. 2.

Из (3.5), (3.9) видно, что при больших  $n$  углы  $\varphi \ll 1$ , поэтому соответствующие возмущения затухают.

Первая пара корней  $\eta = \mu + i\nu$  уравнения (2.7) исследовалась численно. Метод вычислений изложен в приложении, а результаты представлены на фиг. 3.

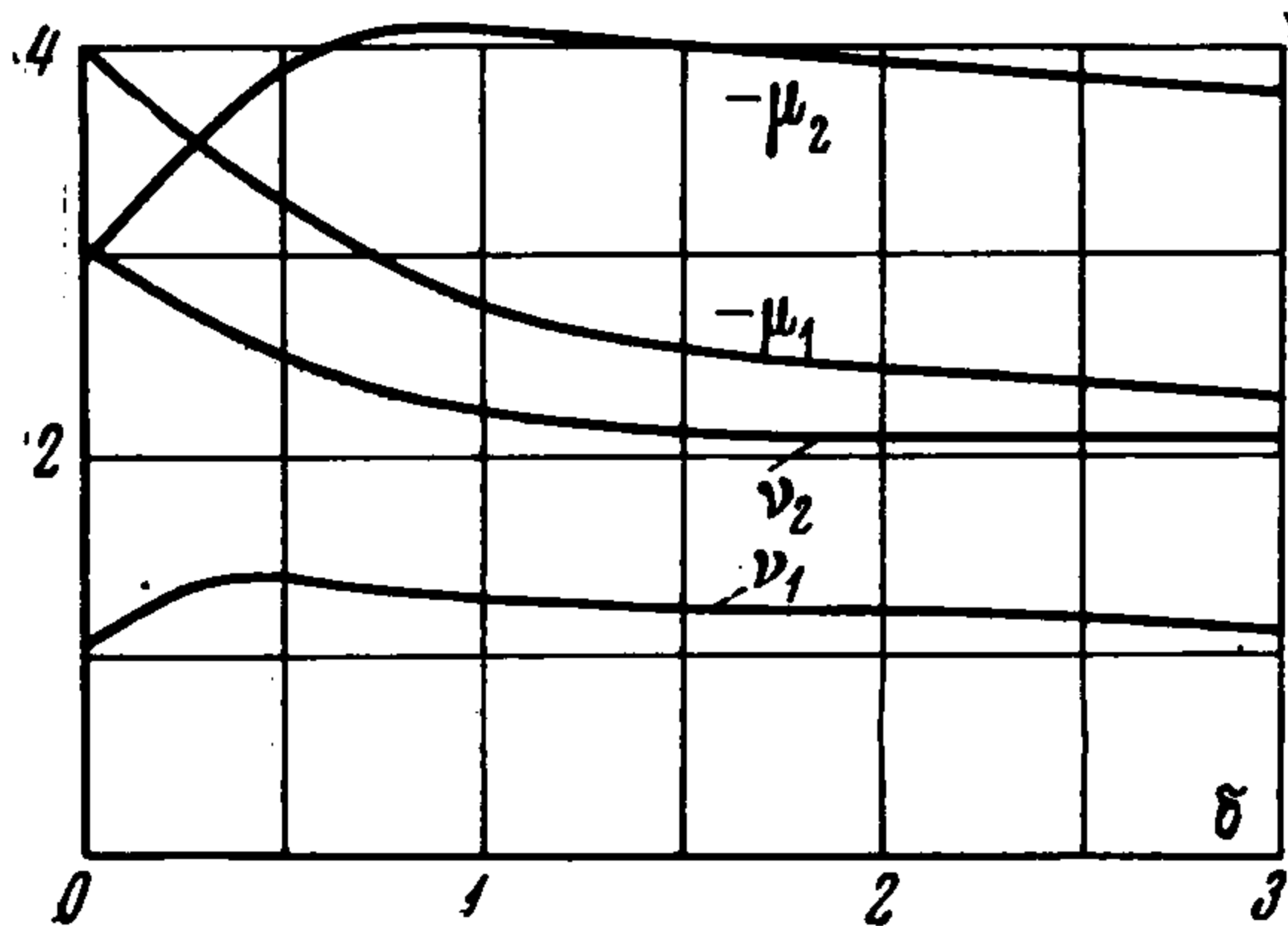
Из фиг. 3 и неравенства (1.10) следует, что первая пара корней описывает затухающие возмущения. Таким образом, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и любых  $\alpha$  течение устойчиво.

4. Характеристическое соотношение для случая  $\delta = 0$ ,  $\varepsilon \geq 0$  получается из (1.2), (1.7) предельным переходом  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ . Это соотношение можно записать в виде (см. также [2])

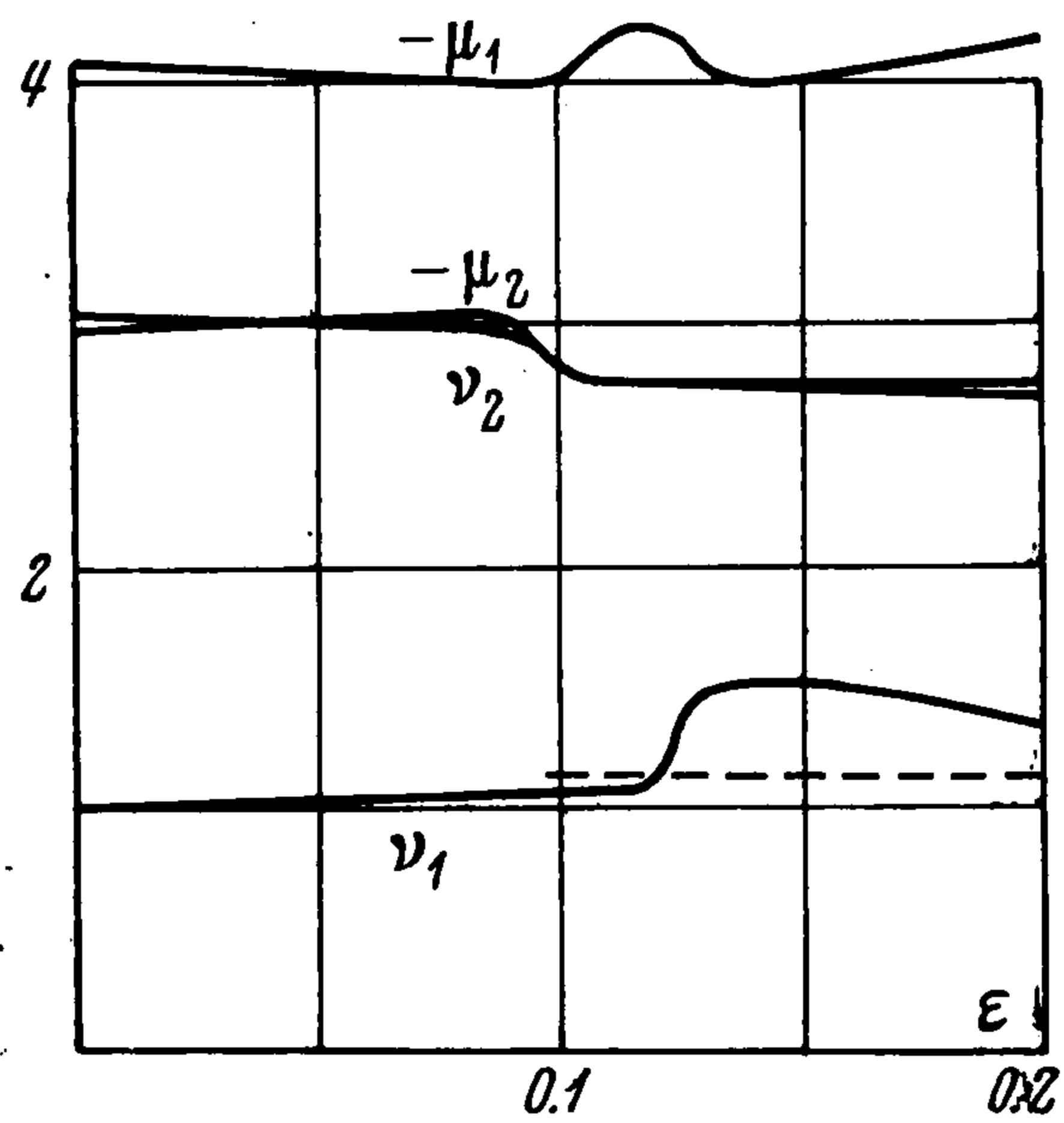
$$J \equiv A_0(\eta) - A_0(T) - \omega [A_2(\eta) - A_2(T)] \frac{A_0(\omega T) - A_0(\omega \eta)}{A_2(\omega T) - A_2(\omega \eta)} = 0 \quad (4.1)$$

$$(T = 2/\varepsilon + \eta, \quad \omega = e^{2/3 i \pi})$$

Отсюда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  можно получить равенство (2.6), в котором  $\alpha = 0$ . При произвольных  $\varepsilon$  корни  $\eta$  определялись численными методами (см. приложение). На фиг. 4 представлены результаты вычислений для первой пары корней. Пунктирной кривой представлены вычисленные в [8] значения  $\nu$  для первого корня. Соответствующее возмущение, по-видимому, при любых  $\varepsilon$  затухает наиболее медленно. Если это так, то из результатов [8] и фиг. 4 следует, что при  $\alpha = 0$  и любых  $\varepsilon$  течение устойчиво. Отсюда и из результатов п. 4 вытекает, что неустойчивость возможна лишь при конечных значениях  $R$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

5. Приложение. При получении (1.8) исходным является найденное в [4] характеристическое соотношение для задачи (1.1), в которой в уравнении вместо явно входящего  $u$  стоит  $ku$ . Это соотношение имеет вид [4]

$$\Delta \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{n=1}^{p-m} a_{p, m, n} d^m \gamma^{2n-1} \right) k^{2p+2} \quad (A.1)$$

где берутся только такие  $n$ , что число  $\nu = 1/3 (p - n - m)$  будет целым, и

$$d = -ic + \alpha/R, \quad \gamma = \alpha/k, \quad a = \alpha R/k^2$$

$$a_{p,m,n} = \frac{2^{2n+1}}{(2p+2)!} (4a)^{p-n-\nu} \sum_{q=0}^{\nu} (-1)^q \binom{2p-2q}{2n-1} \frac{(p-n-q)!}{3^{\nu-q} (\nu-q)! m!}$$

Полагая в (A.1)  $k=1$  и изменяя порядок суммирования, можно получить

$$\Delta \equiv \sum_{m=0}^{\infty} D^m A_m = 0, \quad D = \alpha R d, \quad A_m = 8\alpha \sum_{n=\nu=0}^{\infty} B_{m,n,\nu} (4\alpha^2)^n (16/3\alpha^2 R^2)^{\nu} \quad (\text{A.2})$$

$$B_{m,n,\nu} = \frac{4^m}{m! (2n+1)! (6\nu+2n+2m+4)!} \times \\ \times \sum_{q=0}^{\nu} (-3)^q \frac{(3\nu+m-q)! (6\nu+2n+2m+2-2q)!}{(\nu-q)! (6\nu+2m+1-2q)!}$$

Коэффициенты  $A$  удовлетворяют неравенству

$$A_{m-1} > m^2 A_m \quad (m \geq 1) \quad (\text{A.3})$$

так как ему удовлетворяют величины  $B_{m,n,\nu}$  при любых  $n, \nu$ . В последнем можно убедиться, заметив, что  $B_{m,n,\nu}$  — знакопеременная сумма с монотонно убывающими по модулю членами. Такая сумма не больше первого ее члена  $b_{m,n,\nu}$  и не меньше суммы первых двух членов. С учетом этого получается

$$B_{m-1,n,\nu} - m^2 B_{m,n,\nu} \geq b_{m-1,n,\nu} \left[ 1 - \frac{3\nu(6\nu+2m-1)}{(3\nu+m+n)(6\nu+2m+2n-1)} \right] - \\ - m^2 b_{m,n,\nu} \geq b_{m-1,n,\nu} \left[ 1 - \frac{3\nu}{3\nu+m} - \frac{m}{3\nu+m+1/2} \right] > 0$$

Предположим, что  $D = \gamma + i\Omega = |D| e^{i\varphi}$  при некоторых значениях параметров становится чисто мнимым, т. е.  $\gamma = 0$ . Тогда из (A.2) получается

$$\Delta_r \equiv \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \Omega^{2m} A_{2m} = 0, \quad \Delta_i \equiv \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \Omega^{2m+1} A_{2m+1} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Отсюда и из (A.3) следует, что при  $|\Omega| = \alpha R |c_r| \leq 6$  члены суммы  $\Delta_i$  монотонно убывают по модулю и поэтому  $\Delta_i > 0$ . Это означает, что  $\gamma = \alpha R (c_i + \alpha |R|) \neq 0$  при  $|\Omega| \leq 6$ . Нетрудно видеть, что  $\gamma < 0$ , так как это верно при  $R = 0$  (когда корни  $D$  вещественные [3]), а  $D(R)$  являются непрерывными функциями.

Другие оценки корней получаются при помощи неравенства [9]

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{im\varphi} \neq 0$$

выполняющегося при любых  $\varphi$ , если коэффициенты  $a_m$  положительны и монотонно убывают с увеличением  $m$ . Отсюда и из (A.3) следует

$$\frac{d^n \Delta}{dD^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{n!} A_{m+n} |D|^m e^{im\varphi} \neq 0$$

если  $|D| \leq n + 1$ . Это означает, что в области  $|D| \leq 1$  корней не имеется, а в обла-

сти  $\gamma \geq -n - 1$  лежит не более  $n$  вещественных корней. Аналогично из (А.4) получается

$$\frac{d^n (\Delta_i / \Omega)}{d (-\Omega^2)^n} = \sum_{m=0}^{\infty} (-\Omega^2)^m \frac{(m+n)!}{m!} A_{2m+2n+1} > 0$$

если  $|\Omega| \leq 2(2n+3)\sqrt{n+1} = \Omega_n$ ; отсюда следует, что в области  $0 \leq |\Omega| \leq \Omega_n$  имеется не более  $n$  чисто мнимых корней  $D = i\Omega$ .

При получении (1.10) используется неравенство [1]

$$\sigma = \alpha R c_i (I_1^2 + \alpha^2 I_0^2) \leq \alpha R I_0 I_1 - (I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2)$$

где

$$I_n^2 = \int_{-1}^1 dy \left| \frac{d^n \varphi}{dy^n} \right|^2$$

а  $\varphi$  — решение задачи (1.1). Так как при любых вещественных постоянных  $\zeta, \chi$

$$L = \int_{-1}^1 |\chi \varphi + \zeta \varphi' + \varphi''|^2 dy = \chi^2 I_0^2 + (\zeta^2 - 2\chi) I_1^2 + I_2^2 > 0$$

то<sup>1</sup>

$$\sigma < \alpha R I_0 I_1 - I_1^2 (2\alpha^2 + 2\chi - \zeta^2) - I_0^2 (\alpha^4 - \chi^2) \leq 0$$

если

$$(\alpha R)^2 \leq 4(2\alpha^2 + 2\chi - \zeta^2)(\alpha^4 - \chi^2)$$

и каждый множитель в правой части положителен.

При  $\zeta = 0, \chi = 1/3 \alpha^2$  правая часть последнего неравенства максимальна, и это неравенство совпадает с (1.10).

Для вычисления корней уравнения (2.7) на машине использовался итерационный процесс [10]

$$\eta_{k+1} = \eta_k - F(\eta_k, \delta) \quad (k \geq 0)$$

где

$$F(\eta, \delta) = \frac{J}{J'} + \frac{J''}{2J'} \left( \frac{J}{J'} \right)^2 + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{J''}{J'} \right)^2 - \frac{J'''}{6J'} \right] \left( \frac{J}{J'} \right)^3 \quad (\text{А.5})$$

$$J^{(n)} = \partial^n J(\eta, \delta) / \partial \eta^n$$

а  $\eta_0$  достаточно близко к  $\eta(\delta)$ . В качестве  $\eta_0$  бралось уже известное значение  $\eta(\delta_0)$ , где  $\delta_0$  близко к  $\delta$ . Значения  $\eta$  при  $\delta = 0$  взяты из [2].

Для вычисления  $J$  использовался ряд (2.7) и соотношение [2]

$$iA_{n+3} + \eta A_{n+1} + nA_n = 0 \quad (\text{А.6})$$

Для использования (А.6) достаточно найти коэффициенты  $A_n(\eta)$  при  $n = 0, 1, 2$ . Эти коэффициенты находились при помощи равенств

$$A_n(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^m}{m!} A_{n+m}(0) \quad (\text{А.7})$$

Заметим, что методом перевала можно получить

$$|A_{1+n}| = f_1 |n|^{-1/6} \exp^{1/3} n [\ln |n| - 1 + |\eta n^{-2/3}| f_2] \quad (f_{1,2} \sim 1, |n| \rightarrow \infty)$$

поэтому ряды (А.7), (2.7) сходятся всюду.

<sup>1</sup> В [1] используется неправильное выражение для интеграла типа  $L$ , поэтому соответствующие условия устойчивости также неправильны.

Равенство (А.7) получается из (1.5) разложением  $\exp \eta z$  в ряд и почленным интегрированием. Коэффициенты  $A_n(0)$  определяются при помощи (А.6), если известны три первых коэффициента при  $n = 0, 1, 2$ . Последние равны

$$A_0(0) = 1/3, \quad A_n(0) = 3^{3n-1} \frac{\Gamma(1/3 n)}{2\pi i} [e^{-1/2 i \pi n} - e^{-7/6 i \pi n}] \quad (n > 0)$$

Ряды  $A_{0,1,2}(\eta)$  удобно вычислять одновременно. Производные  $J$  определяются равенством

$$J^{(n)} = A_n + J^{(n-1)} \delta \quad (n \geq 1)$$

Корни уравнения (4.1) вычислялись методом Ньютона (формула (А.5), в которой  $F = J / J'$ ). Для нахождения  $F$  использовались ряды (А.7). Точное выражение (4.1) использовалось при  $\beta = |T|^{3/2} (1/\sqrt{3} - T_i / T_r) < 10$ . При  $10 \leq \beta < 40$  в (4.1) отбрасывались величины  $A$  с отрицательным знаком. При  $\beta \geq 40$  для  $J$  использовалось выражение (2.6), в котором  $\alpha = 0$ . Вычисления начинались с  $\epsilon = 0$ , начальные значения взяты из [2].

Автор благодарит Д. И. Фищук за выполнение части численных расчетов.

Поступила 29 I 1968

Институт земного магнетизма,  
ионосферы и распространения  
радиоволн АН СССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л и н ь Ц з я-ц з я о. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. G r o h n e D. Über das Spektrum bei Eigenschwingungen ebener Laminarströmungen. Z. angew. Math. und Mech., 1954, Bd. 34, N 8/9, S. 344.
3. S o u t h w e l l R. V., C h i t t y L. On the problem of hydrodynamic stability. I. Uniform shearing motion in a viscous liquid. Philos. Trans. Roy Soc. 1930, ser. A, vol. 229, p. 205—253.
4. Д и к и й Л. А. Об устойчивости плоскопараллельного течения Куэтта. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
5. R i i s E. The stability of Couette flow in non—stratified and stratified viscous fluids. Oslo, Geofys. Publ., 1962, vol. 23, p. 4.
6. H o p f L. Der Verlauf kleiner Schwingungen auf einer Strömung reibender Flüssigkeit. Ann. der Phys., 1914, Bd. 44, S. 1—60.
7. W a s o w W. On small disturbances of plane Couette flow. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, vol. 51, p. 195—202.
8. G a l l a g h e r A. P., M e r c e r A. McD. On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, part 1, p. 91.
9. М а р к у ш е в и ч А. П. Теория аналитических функций. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
10. М и к е л а д з е Ш. Е. Решение численных уравнений. Тбилиси, «Мецниерба», 1965.