

## К РЕШЕНИЮ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА С ИНОРОДНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

А. Н. Крайко, А. А. Осипов

(Москва)

Рассматриваются вопросы, возникающие при решении вариационной задачи о построении оптимальных контуров сверхзвуковой части плоских и осесимметричных сопел при наличии в потоке каких-либо неравновесных процессов. Исследование проведено на примере течения газа с инородными (твердыми или жидкими) частицами и основано на использовании метода множителей Лагранжа в форме, которая к задачам сверхзвуковой газовой динамики впервые применена Дж. Армитейджем и К. Гудерлеем [1].

В точной постановке решению вариационной задачи о построении сверхзвуковой части плоских и осесимметричных сопел при неравновесных течениях посвящены работы [2,3], а для течения газа с инородными частицами — работы [4,5]. Авторы этих работ при получении необходимых условий, определяющих форму оптимального контура, рассматривали лишь такой случай, когда характеристика первого семейства, ограничивающая справа область влияния искомого контура, пересекает замыкающую характеристику пучка волн разрежения, который возникает при обтекании излома в его начальной точке или при ограничении на кривизну — начального участка максимально допустимой кривизны<sup>1</sup>. Рассмотрение только этого случая представлялось естественным, так как для равновесных течений данная конфигурация является единственно возможной [6]. В то же время решение аналогичных вариационных задач в одномерном приближении [7-10] показало, что при заданном противодавлении в отличие от равновесного случая, когда имеется некоторая длина сопла, при превышении которой тяга перестает увеличиваться, для неравновесных течений увеличение длины оптимального сопла всегда приводит к росту его тяги. Кроме того, из решения вариационной задачи о построении тонкого оптимального профиля при неравновесном течении [11] следует, что неравновесность ведет к уменьшению величины излома в начальной точке. Данные выводы согласуются и с общими физическими соображениями о связи потерь тяги с отклонением от равновесия. В соответствии с этим, наряду со схемой, обследованной в [2-5], представляется целесообразным рассмотреть в качестве возможной оптимальной конфигурации контур, замыкающая характеристика которого начинается на оси симметрии вне начального пучка волн разрежения. При этом оказывается, что если такой контур оптимален, то он должен иметь внутренние точки излома.

1. Рассмотрим в приближении модели двухскоростной и двухтемпературной сплошной среды стационарное плоское или осесимметричное течение смеси газа с инородными (твердыми или жидкими) частицами. Пусть  $x, y$  — прямоугольные координаты, причем ось  $x$  направлена по оси симметрии слева направо,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $h$  — удельная энтальпия и  $\mathbf{V} = (u, v)$  — вектор скорости газа,  $\rho_s$  — средняя плотность,  $T_s$  — температура,  $e_s = e_s(T_s)$  — удельная внутренняя энергия и  $\mathbf{V}_s = (u_s,$

<sup>1</sup> Как будет видно из дальнейшего, в системе условий, полученных для этого случая в [4,5], потеряны условия на линии тока частиц, отделяющей область, занятую частицами, от области чистого газа.

$v_s$ ) — вектор скорости «газа» частиц;  $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$  — сила взаимодействия газа и частиц, а  $q$  — тепловой поток между ними, отнесенные к единице массы частицы, и  $v = 0$  и  $1$  в плоском и осесимметричном случаях соответственно. Тогда при отсутствии фазовых переходов, внешних сил и источников тепла и при пренебрежении объемом частиц исследуемое течение описывается уравнениями (см., например, [12])

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho_s}{\rho} f_x = 0 \\ L_2 &\equiv u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\rho_s}{\rho} f_y = 0 \\ L_3 &\equiv \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{v\rho v}{y} = 0 \\ L_4 &\equiv u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{v}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + N = 0 \\ L_5 &\equiv u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} - f_x = 0, \quad L_6 \equiv u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y} - f_y = 0 \\ L_7 &\equiv \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial y} + \frac{u_s}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial x} + \frac{v_s}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial y} + \frac{v v_s}{y} = 0 \\ L_8 &\equiv u_s \frac{\partial e_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial e_s}{\partial y} - q = 0 \quad \left( N = \frac{\rho_s}{\rho} [(\mathbf{V}_s - \mathbf{V}) \mathbf{f} + q] \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Система (1.1) замыкается выражениями для  $h$ ,  $\mathbf{f}$  и  $q$ ; примем их в виде

$$h = h(p, \rho), \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(p, \rho, u, v, u_s, v_s, T_s), \quad q = q(p, \rho, u, v, u_s, v_s, T_s)$$

Это, в частности, предполагает термодинамическое равновесие в газе (но не между газом и частицами).

При  $w \equiv |\mathbf{V}| > a$ , где  $a$  — скорость звука в газе, равная

$$a^{-2} = (1 - \rho h_p) / \rho h_\rho \quad (\omega_p = (\partial \omega / \partial p)_\rho, \quad \omega_\rho = (\partial \omega / \partial \rho)_p)$$

система (1.1) имеет четыре семейства действительных характеристик. Это — линии тока газа, на которых

$$v x' - u = 0, \quad \rho v h' - v p' + \rho N = 0, \quad v [p' + \rho (w^2 / 2)'] + \rho_s \mathbf{f} \mathbf{V} = 0 \quad (1.2)$$

Линии тока частиц, где

$$v_s x' - u_s = 0, \quad v_s (w_s^2)' - 2 \mathbf{f} \mathbf{V}_s = 0, \quad v_s e_s' - q = 0 \quad (w_s = |\mathbf{V}_s|) \quad (1.3)$$

и два семейства линий Маха, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} x' &= \frac{-uv \pm a \sqrt{w^2 - a^2}}{a^2 - v^2} \\ &\frac{a^2 + u(vx' - u)}{\rho x'} p' + a^2 v u' + \frac{u v'}{x'^2} [a^2 - (vx' - u)^2] + \\ &+ a^2 (vx' - u) \left( \frac{v v'}{y} - \frac{\rho_s}{\rho a^2} \mathbf{f} \mathbf{V} - \frac{N}{\rho h_\rho} \right) + \frac{\rho_s}{\rho} [a^2 + u(vx' - u)] \left( f_x + \frac{1}{x'} f_y \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

В (1.2) — (1.4) штрихом обозначены производные по  $y$  вдоль соответствующего направления, а верхний (нижний) знак в (1.4) дает направление характеристик первого (второго) семейства.

2. Пусть требуется построить контур сопла  $ag$ , который обеспечивает максимум тяги  $\chi$  при известном сверхзвуковом течении на входе, т. е. левее некоторой характеристики второго семейства  $ac$ , как показано на фиг. 1,

где тонкими линиями даны характеристики первого и второго семейств. Кроме того, могут фиксироваться максимально допустимая длина сопла  $X$ , площадь его боковой поверхности и т. п.

В общем случае по тем же соображениям, что и в задачах, рассматривавшихся ранее, в точке  $a$  имеется излом (ограничения на кривизну предполагаются отсутствующими), а при ограничении на длину оптимальный контур может содержать торец  $bg$ , где  $x \equiv X$ .

Ограничимся случаем, когда в  $a$  реализуется обтекание выпуклого угла, а давление  $p^+$ , действующее на возможный торец, постоянно и не зависит от формы искомого контура (предполагается, что торец или участок, получающийся при его варьировании, газом не обтекается). Тогда с точностью до несущественных слагаемого и множителя

$$\chi = \int_a^b y^v p dy + \int_b^g y^v p^+ dy$$

а возможные  $m$  изопериметрических условий представим в виде

$$K^j = \int_a^b \varphi^j(y, x, x', v, p, \rho) dy + \int_b^g \varphi^{oj}(y, x, x') dy \quad (j=1, \dots, m) \quad (2.1)$$

где  $K^j$  — заданные константы;  $\varphi^j$  и  $\varphi^{oj}$  — известные функции, индексы  $a, b, \dots$  приписаны параметрам в соответствующих точках (исключение — индекс  $s$ ), интегралы берутся вдоль контура сопла.

Обычно из-за отставания частиц у стенки образуется слой чистого газа [13, 14], что и учтено при написании (2.1). Однако, в принципе, частицы все же могут попадать на стенку, что в общем случае нежелательно. Учитывая это, из всех возможных контуров с уравнением  $x = \xi(y)$  будем рассматривать лишь те, для которых

$$\zeta(y) - \xi(y) \geq H > 0 \quad \text{при } y_a \leq y \leq y_b \quad (2.2)$$

где  $x = \zeta(y)$  — уравнение линии тока частиц  $a'b'$ , ограничивающей снизу область чистого газа и изображенной на фиг. 1 штриховой линией, а  $H$  — заданная константа или известная функция  $y$ .

3. Для решения задачи составим функционал

$$I = \int_a^b \left[ \Phi + \alpha \left( \xi' - \frac{u}{v} \right) \right] dy + \int_b^g F dy + \int_{a'}^{b'} \rho_s [\beta_1 (v_s \zeta' - u_s) + \beta_2 L_5 + \beta_3 L_6 + \beta_4 L_8] dy + \iint_G \left( \sum_{k=1}^4 \mu_k L_k + \rho_s \sum_{k=5}^8 \mu_k L_k \right) dx dy$$

$$\Phi(y, x, x', v, p, \rho, \lambda) = y^v p + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi^j(y, x, x', v, p, \rho)$$

$$F(y, x, x', \lambda) = y^v p^+ + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi^{oj}(y, x, x')$$

Здесь  $\lambda_j$  — постоянные, а  $\alpha = \alpha(y)$ ,  $\beta_i = \beta_i(y)$  и  $\mu_i = \mu_i(x, y)$  — переменные множители Лагранжа;  $G$  — область влияния искомого контура,

в общем случае ограниченная последней характеристикой пучка  $ah$ , осью симметрии  $hd$ , характеристикой первого семейства  $db$  и самим контуром  $ab$ .

При допустимом варьировании вариации  $I$  и  $\chi$  в силу (1.1) — (1.3) и (2.1) совпадают.

Необходимые условия максимума  $\chi$ , определяющие форму оптимального контура, получаются из исследования первой вариации  $\delta\chi = \delta I$ . При этом рассматриваемые контуры  $ab$  могут в соответствии с (2.2) состоять из участков двух типов (фиг. 1): участков  $ak$  и  $mb$ , где

$$z \equiv \zeta(y) - \xi(y) - H > 0 \quad (3.1)$$

и контур сопла может варьироваться произвольным образом, а также участков (на фиг. 1 — один участок  $km$ ), где

$$z \equiv \zeta(y) - \xi(y) - H = 0 \quad (3.2)$$

и допустимы лишь вариации, увеличивающие расстояние между стенкой

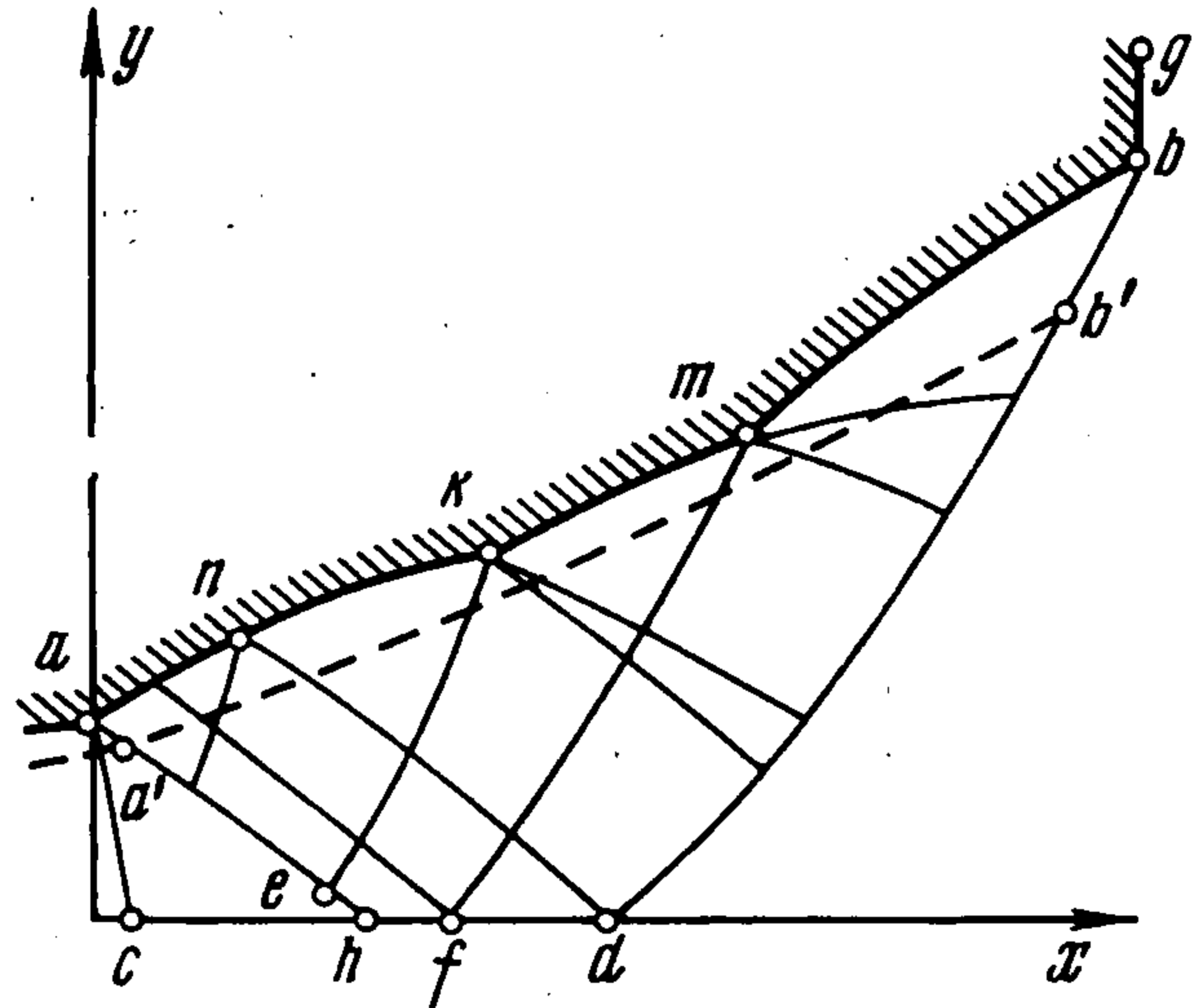
и граничной линией тока  $a'b'$ , т. е. такие, что  $\delta z \geq 0$ . Точки стыковки различных участков контура в общем случае будут точками излома. В точках излома могут соединяться и отрезки, удовлетворяющие (3.1). Граничная линия  $a'b'$ , как и другие линии тока частиц, где  $x' = u_s/v_s$ , в силу уравнений движения частиц при  $H > 0$ , имеет не менее двух непрерывных производных ( $\zeta'$  и  $\zeta''$ ).

Варьирование  $I$  производится в соответствии с [1,2,15]. При этом особого рассмотрения требует варьирование положения точек излома [15], и допускаются линии разрыва множителей Лагранжа [2,15]. При варьировании концов участков (3.2) произвольны лишь перемещения в направлении  $x' = \zeta'(y)$ , в то время как перемещения в других направлениях ограничены условием  $\delta z \geq 0$ . Кроме того, учитывается, что на  $ab$  из-за отсутствия частиц  $\delta\rho = -\rho u\delta u - \rho v\delta v$ ,  $\delta\rho = a^{-2}\delta\rho$ .

4. Выбор множителей Лагранжа проводится так, чтобы в  $\delta\chi$  исчезли все вариации, кроме  $\delta\xi$  на участках (3.1),  $\delta z$  на участках (3.2) и приращений координат  $\Delta x$  и  $\Delta y$  точек излома. Такой выбор возможен для произвольного (не обязательно оптимального) контура и приводит к уравнениям и граничным условиям, определяющим множители Лагранжа.

Уравнения для  $\mu_1, \dots, \mu_4$  в подобластях их непрерывности области влияния  $abdha$  эквивалентны дифференциальным связям

$$\begin{aligned} u\mu_1' + v\mu_2' + \rho\mu_3' - \mu_1\left(u' + \frac{vu}{y}\right) - \mu_2\left(v' + \frac{vv}{y}\right) - \left(\mu_1\frac{u}{\rho} + \mu_2\frac{v}{\rho} + \right. \\ \left. + \mu_4 h_\rho\right)\rho' + \mu_4\frac{h_\rho}{a^2}\rho' - \mu_3\frac{v\rho}{y} + \mu_4\frac{\rho_s}{\rho}(x'f_x + f_y) - \rho_s[x'P(u) + P(v)] = 0 \\ v\mu_3' + v h_\rho\mu_4' - \mu_1\frac{v}{\rho}u' - \mu_2\frac{v}{\rho}v' - \mu_4\frac{v}{\rho^2}\rho' - \\ - \mu_4\frac{v h_\rho}{\rho}\rho' - \mu_3\frac{vv}{y} - \mu_4 h_\rho\frac{vv}{y} + \mu_4\frac{N}{\rho} - \rho_s P(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$



Фиг. 1

выполняющимся вдоль линий тока газа (1.2), и двум уравнениям, соответствующим двум значениям  $x'$  в (1.4)

$$\begin{aligned} & \frac{vx' - u}{\rho} v\mu_1' + \frac{u - vx'}{\rho} u\mu_2' + (v + ux')\mu_3' - \mu_1 \left( \frac{ux' + v}{\rho} u' + \right. \\ & \left. + \frac{vx' - u}{\rho^2} v\rho' + \frac{vx' - u}{y\rho} v v \right) - \mu_2 \left( \frac{ux' + v}{\rho} v' - \frac{vx' - u}{\rho^2} u\rho' - \right. \\ & \left. - \frac{vx' - u}{y\rho} v v x' \right) - \mu_3 \frac{v}{y} (ux' + v) - \mu_4 \left\{ \frac{ux' + v}{\rho} h_\rho \rho' + \frac{vx' - u}{a^2} v^2 h_\rho \left( \frac{u}{v} \right)' + \right. \\ & \left. + \frac{1 + x'^2}{y} v v h_\rho - \frac{\rho_s}{\rho} h_\rho (vx' - u) (f_x - x' f_y) - \left[ 1 + x'^2 - \frac{(vx' - u)^2}{\rho h_\rho} \right] \frac{N}{\rho} \right\} - \\ & - \frac{\rho_s}{\rho} (vx' - u) [P(u) - x'P(v) + \rho(vx' - u)P(\rho)] - \rho_s(1 + x'^2)P(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

которые выполняются вдоль характеристик первого и второго семейств (1.4). В (4.1) и (4.2) штрихом, как и ранее, обозначены полные производные по  $y$  вдоль соответствующих направлений, а

$$\begin{aligned} P(r) = & \frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial f_x}{\partial r} + \frac{\mu_2}{\rho} \frac{\partial f_y}{\partial r} + \frac{\mu_4}{\rho} \left[ (u_s - u) \frac{\partial f_x}{\partial r} + \right. \\ & \left. + (v_s - v) \frac{\partial f_y}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial r} \right] - \mu_5 \frac{\partial f_x}{\partial r} - \mu_6 \frac{\partial f_y}{\partial r} - \mu_8 \frac{\partial q}{\partial r} \end{aligned}$$

где  $r$  означает любой из параметров, от которых зависят  $\mathbf{f}$  и  $q$ .

Множители  $\mu_5, \dots, \mu_8$ , вводящие в  $I$  уравнения движения частиц, нужны лишь в области  $a'b'dha'$  и определяются здесь системой

$$\begin{aligned} & u_s \mu_5' + \mu_7' - \frac{\mu_4}{\rho v_s} \mathbf{V}_s \mathbf{f} - \mu_5 \left( u_s' + \frac{u_s}{\rho_s} \rho_s' + \frac{v u_s}{y} \right) - \\ & - \mu_6 \left( v_s' + \frac{v_s}{\rho_s} \rho_s' + \frac{v v_s}{y} \right) - \mu_7 \frac{v \rho_s}{y} - \mu_8 e_s' - P(v_s) - x'P(u_s) = 0 \\ & v_s \mu_7' - \frac{1}{\rho} (\mu_1 f_x + \mu_2 f_y) - \mu_4 \frac{N}{\rho_s} - \mu_7 \frac{v v_s}{y} = 0 \\ & v_s C_s \mu_8' - \mu_8 C_s v_s \left( \frac{1}{\rho_s} \rho_s' + \frac{v}{y} \right) - P(T_s) = 0 \\ & u_s \mu_5' + \frac{\partial \mu_7}{\partial x} - \mu_4 \frac{f_x}{\rho} - P(u_s) = 0 \quad \left( C_s = \frac{de_s}{dT_s} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь штрихом обозначены полные производные по  $y$  вдоль линии тока частиц.

Условия для интегрирования (4.1) — (4.3) формулируются на замыкающей характеристике  $db$ , отрезке оси  $hd$ , контуре тела  $ab$  и на граничной линии тока частиц  $a'b'$ . На  $db$ ,  $hd$  и  $ab$  эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} & x' \mu_1 + \mu_2 = 0, \quad (u - vx')\mu_1 + \rho \mu_3 = 0 \\ & \mu_3 + h_\rho \mu_4 = 0, \quad \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 = 0 \quad (\text{на } db) \\ & \mu_2 = 0 \quad (\text{на } hd) \\ & \mu_1 - \xi' \mu_2 + v w^{-2} \Phi_v - \rho \Phi_p - \rho a^{-2} \Phi_\rho = 0 \quad (\text{на } ab) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь индексы  $v$ ,  $p$  и  $\rho$  приписаны соответствующим частным производным, а штрихом, как и ранее, обозначены полные производные по  $y$  вдоль соответствующих линий.

При переходе через  $a'b'$  множители  $\mu_1 \div \mu_4$  терпят разрыв. Если  $[\mu_i]$  — разность верхнего и нижнего предельных значений  $\mu_i$  на  $a'b'$ , то здесь

$$\begin{aligned} (u - v\zeta') [\mu_1] + \rho [\mu_3] - D(u) &= 0 \\ (u - v\zeta') [\mu_2] - \rho\zeta' [\mu_3] - D(v) &= 0 \\ [\mu_1] - \zeta' [\mu_2] - \rho h_\rho a^{-2} (u - v\zeta') [\mu_4] + \rho D(\rho) &= 0 \\ (u - v\zeta') [\mu_3] + h_\rho (u - v\zeta') [\mu_4] + D(\rho) &= 0 \\ \left( \rho_s^{-1} D(r) = \beta_2 \frac{\partial f_x}{\partial r} + \beta_3 \frac{\partial f_y}{\partial r} + \beta_4 \frac{\partial q}{\partial r} \right) & \end{aligned} \quad (4.5)$$

где множители  $\beta_1, \dots, \beta_4$  определяются уравнениями

$$\begin{aligned} (\beta_1 \rho_s v_s)' + \mu_7 [(\rho_s v_s)' + v y^{-1} \rho_s v_s] &= 0 \quad \text{при } z > 0 \\ (\beta_1 \rho_s v_s)' + \mu_7 [(\rho_s v_s)' + v y^{-1} \rho_s v_s] - \{ \Phi_x - (\Phi_x)' - \alpha' + \\ + (\xi' \mu_2 - \mu_1) v u' - \rho \mu_3 [(\rho v)' + v y^{-1} \rho v] \}_{x=\xi(v)} &= 0 \quad \text{при } z = 0 \\ (\beta_2 \rho_s v_s)' + \beta_1 \rho_s + D(u_s) + \rho_s \mu_7 &= 0 \\ (\beta_3 \rho_s v_s)' - \rho_s (\beta_1 \zeta' + \beta_2 u_s' + \beta_3 v_s' + \beta_4 C_s T_s' + \zeta' \mu_7) + D(v_s) &= 0 \\ C_s (\beta_4 \rho_s v_s)' + D(T_s) &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

на  $a'b'$  и граничными условиями в точке  $b'$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \quad (4.7)$$

В (4.5) и (4.6) все величины, кроме слагаемого в фигурной скобке второго уравнения (4.6), берутся на  $a'b'$ . При этом для величин, определенных только в области, занятой частицами (например,  $u_s, v_s, \mu_7$ ), на  $a'b'$  используются нижние предельные значения. Член в фигурной скобке из (4.6) вычисляется для тех же  $y$  по параметрам на стенке, где множитель  $\alpha$  определяется равенством

$$\alpha = v [(\mu_1 - \xi' \mu_2) u - \rho \mu_3 - \rho u \Phi_p - \rho u a^{-2} \Phi_\rho] \quad (4.8)$$

В силу (4.7) и (4.5) в точке  $b'$

$$[\mu_1]_{b'} = [\mu_2]_{b'} = [\mu_3]_{b'} = [\mu_4]_{b'} = 0$$

т. е. здесь при переходе через  $a'b'$  множители  $\mu_1, \dots, \mu_4$  непрерывны.

Множители  $\mu_1, \dots, \mu_4$  могут терпеть разрыв не только на линии  $a'b'$  — границе двух различных областей течения, при переходе через которую терпят разрыв нормальные производные параметров газа, но и на некоторых характеристиках первого и второго семейства. Если  $[\mu_i]$  — разность  $\mu_i$  с двух сторон разрыва, то на таких характеристиках

$$\begin{aligned} x' [\mu_1] + [\mu_2] &= 0, \quad (u - vx') [\mu_1] + \rho [\mu_3] = 0 \\ [\mu_3] + h_\rho [\mu_4] &= 0, \quad [\mu_5] = [\mu_6] = [\mu_7] = [\mu_8] = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Данные равенства вместе с дифференциальным уравнением, которое получается если в (4.2) заменить  $\mu_1, \dots, \mu_4$  на их скачки и опустить слагаемые, пропорциональные  $\mu_5, \dots, \mu_8$ , полностью определяют изменения скачков множителей Лагранжа на линиях разрыва.

Проводя необходимое интегрирование, получим, что

$$[\mu_2]_i = k_i y^{1/2} x' \left( \frac{\rho}{(ux' + v)(u - vx')} \right)^{1/2} \exp \left( \int_0^y U dy \right) \quad (i = 1, 2) \quad (4.10)$$

где константа интегрирования  $k_1$  ( $k_2$ ) соответствует случаю, когда разрыв есть характеристика первого (второго) семейства, а  $U$  — функция параметров потока, равная

$$\begin{aligned} \frac{2\rho(ux' + v)}{\rho_s} U = & \frac{\partial f_x}{\partial u} - x' \left( \frac{\partial f_{xx'}}{\partial u} + \frac{\partial f_x}{\partial v} - x' \frac{\partial f_y}{\partial v} \right) + \\ & + \frac{V_s - V}{h_\rho} \left[ \frac{vx' - u}{\rho} \left( x' \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} \right) - (vx' - u)^2 \frac{\partial f}{\partial p} - (1 + x^2) \frac{\partial f}{\partial \rho} \right] + \\ & + \rho(vx' - u) \left( \frac{\partial f_x}{\partial p} - x' \frac{\partial f_{xx'}}{\partial p} \right) + \frac{1 + x^2}{vx' - u} \left( \rho \frac{\partial f_x}{\partial \rho} - f_x - \rho x' \frac{\partial f_y}{\partial \rho} + x' f_y \right) + \\ & + \frac{vx' - u}{\rho h_\rho} \left[ f_x - \frac{\partial q}{\partial u} - x' f_y + x' \frac{\partial q}{\partial v} - \rho(vx' - u) \frac{\partial q}{\partial p} \right] - \\ & - \frac{1 + x^2}{h_\rho} \frac{\partial \eta}{\partial \rho} + \left[ 1 + x^2 - \frac{(vx' - u)^2}{\rho h_\rho} \right] \frac{(V_s - V) f + q}{\rho h_\rho} \end{aligned}$$

5. Кроме точек излома контура, которые в соответствии с последним условием (4.4) вызывают разрыв множителей  $\mu_1 \div \mu_4$  на характеристиках первого семейства, приходящих в эти точки ( $ek$  и  $fm$  — в случае фиг. 1), имеется и другая причина образования разрывов, описываемых соотношениями (4.9) и (4.10).

Действительно, так же как и при выводе (4.10), покажем, что на  $db$

$$\mu_2 = k_1 y^{1/2} x' \left( \frac{\rho}{(ux' + v)(u - vx')} \right)^{1/2} \exp \left( \int_0^y U dy \right) \quad (5.1)$$

причем в соответствии с первым и последним условиями (4.4), записанными в точке  $b$

$$k_1 = v_b y_b^{-1/2} \left[ \frac{u - vx'}{\rho(ux' + v)} \right]_b^{1/2} \exp \left( - \int_0^{y_b} U dy \right)$$

Поэтому, например, в плоском случае ( $v = 0$ ) всюду на  $db$  и в том числе в точке  $d$  множитель  $\mu_2$  при  $v_b \neq 0$  также отличен от нуля. Однако на отрезке  $hd$  оси симметрии в силу предпоследнего условия (4.4) имеем  $\mu_2 = 0$ , и, следовательно, характеристика второго семейства, приходящая в  $d$ , есть линия разрыва множителей  $\mu_1 \div \mu_4$ . Учитывая, что на оси  $v = 0$ , а  $x'$  для характеристик первого и второго семейств отличаются только знаком, из (5.1) и (4.10) найдем, что при  $v = 0$  на «отраженной» характеристике второго семейства  $dn$  разрыв  $\mu_2$  определяется формулой (4.10)

$$k_2 = k_1 \sqrt{-1} \quad (5.2)$$

если под  $[\mu_j]$  понимается разность значений  $\mu_j$  слева и справа от характеристики.

Как видно из (5.1), в осесимметричном случае  $\mu_{2d} = 0$  при  $k_1 \neq 0$ , и, таким образом, условие  $\mu_2 = 0$  в точке  $d$  не нарушается. Можно показать, однако, что в то время как  $\mu_{2x} \equiv \partial \mu_2 / \partial x$  слева от  $d$  тождественно равно нулю, величина  $\mu_{2x}$  на  $db$  при приближении к оси симметрии в случае  $v = 1$

стремится к бесконечности, как  $y^{-1/2}$ . Данное обстоятельство приводит к тому, что отраженная характеристика  $dn$  оказывается линией разрыва не только  $\mu_{2x}$ , но и самого множителя  $\mu_2$ . При этом  $k_2$  в (4.10), так же как и в плоском случае, определяется из (5.2).

Не останавливаясь на деталях довольно громоздкого доказательства приведенных утверждений, заметим, что оно основывается на использовании полухарактеристических переменных  $y\xi^i$ , где  $\xi^i$  — константа на каждой характеристике  $i$ -го семейства, причем для исследования поведения  $\mu_{2x}$  на  $db$  берутся переменные  $y\xi^1$ , а для исследования изменения  $[\mu_{2x}]$  на отраженной характеристике — переменные  $y\xi^2$ .

Условие (5.2) справедливо и тогда, когда от оси симметрии отражается разрыв, пришедший, например, вдоль характеристики первого семейства (как в точке  $f$  на фиг. 1). При этом несущественно: понимается ли под  $[\mu_i]$  разность левого и правого значений  $\mu_i$  или наоборот. Важно лишь, чтобы определение  $[\mu_i]$  было одинаковым для приходящей и отраженной характеристик.

Разрыв множителей, приходящий на стенку по характеристике второго семейства, отражается по характеристике первого семейства. Припишем нижний индекс минус (плюс) параметрам течения и множителям Лагранжа на стенке слева (справа) от точки отражения, а нижние индексы 1 и 2, как и в (4.10), — величинам на характеристиках первого и второго семейств соответственно. Если точка отражения  $n$  — точка непрерывности  $\xi'$ , то в ней в силу (4.8), (4.9) и последнего равенства (4.4)

$$[\mu_2]_1 = -\frac{x_1'(ux_2' + v)}{x_2'(ux_1' + v)} [\mu_2]_2, \quad \alpha_- - \alpha_+ = \frac{\rho v w^2 (x_2' - x_1')}{x_2'(ux_1' + v)} [\mu_2]_2 \quad (5.3)$$

где все параметры берутся в точке отражения. При этом в  $\delta\chi$  появляется внеинтегральный член  $(\alpha_- - \alpha_+)_n \delta x_n$ .

Интенсивность разрыва на характеристике первого семейства, приходящей в точку излома, вне зависимости от того, является ли одна из характеристик пучка линией разрыва  $\mu_1 \div \mu_4$ , определяется по последнему равенству (4.4), записанному на стенке слева от угловой точки, и по значениям  $\mu_i$  в верхней точке характеристики второго семейства, ограничивающей слева пучок волн разрежения (на фиг. 1 — граничные характеристики пучков, выходящих из  $k$  и  $m$ , как и другие характеристики, даны тонкими сплошными линиями).

6. После того, как множители Лагранжа выбраны в соответствии с уравнениями и условиями двух предыдущих пунктов, выражение для  $\delta\chi$  принимает вид (вариации точки  $g$  здесь не рассматриваются)

$$\delta\chi = (U^{(1)}\Delta x + U^{(2)}\Delta y)_b + \sum_j (V^{(1)}\Delta x + V^{(2)}\Delta y)_j + (\alpha_- - \alpha_+)_n \delta x_n + \int_{z(\cdot) > 0} S \delta x dy + \int_{z(y) = 0} S \delta z dy + \int_b^g [F_x - (F_x)'] \delta x dy \quad (6.1)$$

Здесь два первых интеграла берутся вдоль  $ab$ , суммирование ведется по всем точкам излома,  $\Delta x$  и  $\Delta y$  — приращения координат этих точек,  $n$  — точка непрерывности  $\xi'$ , являющаяся точкой отражения разрыва множителей  $\mu_1 \div \mu_4$  (если таких точек несколько, то в (6.1) следует написать еще один знак суммирования).

Коэффициенты  $U^{(i)}$  и  $V^{(i)}$  и  $S$  даются формулами

$$U^{(1)} = (\Phi_{x'} + \alpha)_- - F_{x'+}, \quad U^{(2)} = (\Phi - x'\Phi_{x'} - \alpha x')_- - F_+$$

$$V_j^{(1)} = (\Phi_{x'_-} + \alpha_- - \Phi_{x'_+} - \alpha_+)_j - \int_{j-}^{j+} \left[ \mu_1 v du + \mu_2 \left( v dv + \frac{1}{\rho} dp \right) + \right. \\ \left. + \mu_3 d(\rho v) + \mu_4 \left( v dh - \frac{v}{\rho} dp \right) \right]$$

$$V_j^{(2)} = [(\Phi - x'\Phi_{x'} - \alpha x')_- - (\Phi - x'\Phi_{x'} - \alpha x')_+]_j + \int_{j-}^{j+} \left[ \mu_1 \left( u du + \frac{1}{\rho} dp \right) + \right. \\ \left. + \mu_2 u dv + \mu_3 d(\rho u) + \mu_4 \left( u dh - \frac{u}{\rho} dp \right) \right]$$

$$S = \Phi_x - (\Phi_{x'})' - \alpha' + v(\xi'_2 - \mu_1)u' - \rho\mu_3[(\rho v)' + v\gamma^{-1}\rho v]$$

Интегралы в  $V_j^{(i)}$  вычисляются в угловой точке, т. е. при значениях  $y \equiv y_j$  и  $x \equiv x_j$ , а  $x' = u/v$ .

Если контур  $ag$  оптимален (реализует максимум  $\chi$ ), то в соответствии с (6.1) и (5.3) он должен удовлетворять следующим необходимым условиям:

$$S = 0 \quad \text{при } z(y) > 0, \quad S > 0 \quad \text{при } z(y) = 0 \quad (\text{на } ab)$$

$$F_x - (F_{x'})' \geq 0 \quad (\text{на } bg), \quad U_b^{(1)} \geq 0, \quad U_b^{(2)} = 0$$

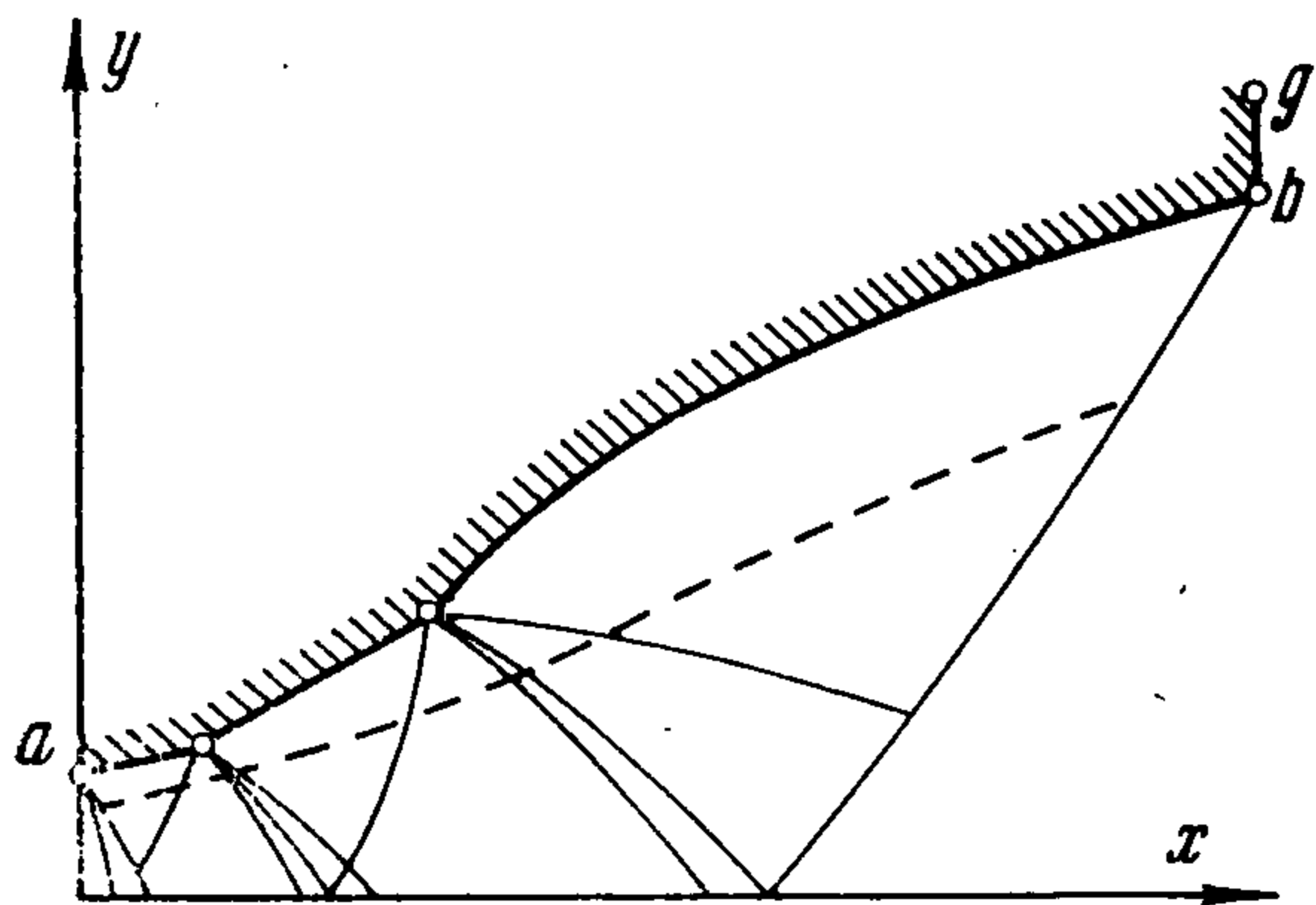
$$V_j^{(1)} = V_j^{(2)} = 0 \quad \text{при } z(y_j) > 0 \quad (6.2)$$

$$V_j^{(1)}\xi'(y_j) + V_j^{(2)} \geq 0, \quad V^{(1)}_j \geq 0 \quad \text{при } z(y_j) = 0$$

$$[\mu_2]_{2n} = 0 \quad \text{при } (\xi'_- - \xi'_+)_n = 0$$

где условия в точке  $b$  выписаны лишь для случая  $y_b < y_g$ .

Для оптимального контура характеристики второго семейства, которые будут линиями разрыва множителей Лагранжа, как видно из последнего условия (6.2), или вообще отсутствуют или приходят в точки излома стенки, т. е. принадлежат соответствующим



Фиг. 2

пучкам волн разрежения. Отсюда в соответствии с (5.1), (5.2) и (4.10) находим, что или  $v_b = 0$ , или (фиг. 1)  $n$  — угловая точка. Данная ситуация повторяется до тех пор, пока характеристика первого семейства, вышедшая из очередной угловой точки, не пересечет характеристику  $ah$ . Если  $\Phi_{x'} \equiv 0$ , что, например, имеет место при отсутствии изопериметрических условий, то равенство  $v_b = 0$  в общем случае выполнено быть не может. В то же время двум равенствам из (6.2), появляющимся при  $z(y_n) > 0$  в каждой угловой точке, соответствуют два дополнительных произвола: ко-

ордината  $x_n$  и величина излома  $(\xi'_+ - \xi'_-)_n$ . Таким образом, если замыкающая характеристика оптимального контура начинается на оси симметрии вне начального

веера волн разрежения и если в области влияния отсутствуют ударные волны, то такой контур на участке  $ab$  будет иметь не менее одной точки излома (фиг. 2 — обозначения те же, что и на фиг. 1).

Авторы признательны Л. Е. Стернину, привлечшему их внимание к рассмотренной задаче.

Поступила 26 III 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G u d e r l e y K. G., A r m i t a g e J. V. A general method for the determination of best supersonic rocket nozzles. Paper presented at the Symposium on extremal problems in aerodynamics, Boeing Scientific Research Laboratories, Flight Sciences Laboratory, Seattle, Washington, December 3—4, 1962. (Рус. пер.: «Механика», Период. сб. перев. иностр. статей, 1963, № 6, стр. 85—101).
2. К р а й к о А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2, стр. 285—295.
3. H o f f m a n J. D. A general method for determining optimum thrust nozzle contours for chemically reacting gas flows. AIAA Paper № 66—638, 1966; AIAA J., 1967, vol. 5, № 4, p. 670—676. (Рус. пер.: «Ракетная техника и космонавтика», «Мир», 1967, т. 5, № 4, стр. 76—84).
4. H o f f m a n J. D., T h o m p s o n H. D. A general method for determining optimum thrust nozzle contour for gas—particle flows. AIAA, Paper № 66—538, 1966. (Рус. пер.: Сб. «Вопросы ракетной техники», «Мир», 1967, № 3, стр. 46—63).
5. H o f f m a n J. D., T h o m p s o n H. D. Optimum thrust—nozzle contours for gas—particle flows. AIAA J., 1967, vol. 5, No. 10, p. 1886—1887.
6. Ш м ы г л е в с к и й Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. Вычисл. центра АН СССР, 1963.
7. Г а л ю н Н. С., К р а й к о А. Н. Об одной вариационной задаче одномерной неравновесной газовой динамики. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2, стр. 27—36.
8. M a r b l e F. E. Nozzle contour for minimum particle—lag loss. AIAA J., 1963, vol. 1, № 12, p. 2793—2801. (Рус. пер. «Ракетная техника и космонавтика», «Мир», 1963, № 12, стр. 95—105).
9. С т е р н и н Л. Е. Экстремальные контуры сопел для потоков газа с отставанием частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5, стр. 14—22.
10. К р а й к о А. Н., С т а р к о в В. К., С т е р н и н Л. Е. Решение в одномерном приближении вариационной задачи о построении сопла максимальной тяги при течении газа с инородными частицами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
11. К р а й к о А. Н., Т к а л е н к о Р. А. Тонкие плоские тела минимального волнового сопротивления в неравновесном сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4, стр. 56—63.
12. К р а й к о А. Н., С т е р н и н Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, стр. 418—429.
13. K l i e g e l J. R. Gas particle nozzle flows. 9-th Symposium (International) on Combustion. N. Y., Acad. Press., 1963, p. 811—826 (рус. пер.: Сб. «Вопросы ракетной техники», «Мир», 1965, № 10, стр. 3—29).
14. В е р е щ а к а Л. П., Г а л ю н Н. С., К р а й к о А. Н., С т е р н и н Л. Е. Результаты расчета методом характеристик течения газа с частицами в осесимметричных соплах и сравнение с результатами одномерного приближения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3, стр. 133—138.
15. К р а й к о А. Н. К решению вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2, стр. 312—320.