МИНИМАКСНАЯ ЗАДАЧА ОДНОРАЗОВОЙ КОРРЕКЦИИ ПРИ ПОГРЕШНОСТЯХ ИЗМЕРЕНИЙ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Рассматривается простейшая модельная задача одноразовой коррекции движения системы с одной степенью свободы при наличии погрешностей измерений. Приводится формулировка и решение задачи оптимальной коррекции в минимаксной (гарантирующей) постановке, т. е. с расчетом на наихудший случай, допускаемый текущими данными измерений.

Подобные задачи рассматривались ранее на основе вероятностного подхода (см. [1]). Близкие, но несколько иные минимальные задачи исследованы в недавно опубликованной статье [2].

1. Постановка задачи. Пусть система с одной степенью свободы при отсутствии управления движется равномерно, а управление осуществляется при помощи одного импульса, который может быть приложен в любой момент движения. Тогда движение системы определяется равенствами

$$
\begin{aligned}
&x = x_0 + v_0 t, \quad v = v_0 && (0 \leqslant t \leqslant \tau)\\
&x = x_0 + v_0 t + u\,(t - \tau), \quad v = v_0 + u && (\tau < t \leqslant T)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь t — время, x — координата системы, v — ее скорость, x_0 и v_0 — значения координаты и скорости в начальный момент времени $t = 0$, T — момент окончания процесса, τ — момент коррекции, u — величина корректирующего импульса. На управляющие параметры τ и u наложены ограничения

$$0 \leqslant \tau \leqslant T, \qquad |u| \leqslant U \tag{1.2}$$

Здесь U — максимальная абсолютная величина импульса коррекции.

Начальные значения координаты и скорости известны с некоторыми погрешностями, т. е. на них наложены ограничения

$$|x_0 - a| \leqslant \varepsilon, \qquad |v_0 - b| \leqslant \delta \tag{1.3}$$

Здесь a и b — известные приближенные значения координаты и скорости, ε и δ — заданные погрешности измерений. В процессе движения непрерывно измеряются координата и скорость системы, причем справедливы неравенства

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \varepsilon, \qquad |v(t) - z(t)| \leqslant \delta \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1.4}$$

Здесь $y(t)$ и $z(t)$ — приближенные измеренные значения координаты и скорости в момент t. Очевидно, $y(0) = a$, $z(0) = b$.

Требуется выбрать момент коррекции τ и импульс коррекции u, подчиненные ограничениям (1.2), так, чтобы минимизировать отклонение (промах) в конце процесса, т. е. величину $|x(T)|$. При этом предполагается, что в каждый момент времени становятся известны данные измерений $y(t)$ и

z (t), так что управление находится с учетом получаемой информации. Задача рассматривается в минимаксной постановке, т. е. с расчетом на наихудший случай, допускаемый данными измерений. Получаемые результаты поэтому являются наиболее надежными (гарантирующими).

Определить оптимальное управление — это значит указать правило, по которому в каждый момент времени можно найти параметры τ, u в зависимости от полученных к этому моменту времени данных измерений. Пусть t_0 — некоторый момент времени до произведения коррекции. Тогда оптимальные в минимаксном смысле значения τ, u, соответствующие моменту t_0, определяются при нахождении следующего минимакса:

$$J(t_0) = \min_{\tau} \max_{y,z} \min_{u} \max_{x_0, v_0} |x(T)|, \quad x(T) = x_0 + v_0 T + u(T - \tau) \tag{1.5}$$

Поясним это соотношение. Формула для $x(T)$ следует из (1.1). Первый минимум в (1.5) вычисляется по τ, лежащим в интервале $[t_0, T]$, а второй минимум по u, удовлетворяющим условию $|u| \leqslant U$. Первый максимум в (1.5) должен вычисляться по всем функциям $y(t)$, $z(t)$, определенным на интервале $(t_0, \tau]$ и таким, что существует хотя бы одна траектория системы, которая удовлетворяла бы ограничениям (1.4) при всех t в интервале $[0, \tau]$. Другими словами, данные измерений должны быть непротиворечивы. В остальном функции $y(t)$, $z(t)$ могут быть произвольны. Второй из максимумов в (1.5) должен вычисляться по всем начальным значениям x_0, v_0, которые допускаются данными измерений, сделанными до момента τ. Эти данные измерений можно разделить на две части: те, которые сделаны при $0 \leqslant t \leqslant t_0$, и те, которые сделаны при $t_0 < t \leqslant \tau$. Обозначим через D_0 множество точек в плоскости параметров x_0, v_0, ограниченное неравенствами

$$|x_0 + v_0 t - y(t)| \leqslant \varepsilon, \qquad |v_0 - z(t)| \leqslant \delta \tag{1.6}$$

причем t пробегает значения от 0 до t_0. Неравенства (1.6) следуют из (1.1) и (1.4). Аналогично, через D_1 обозначим множество точек в плоскости x_0, v_0, ограниченное неравенствами (1.6) для всех t из интервала $(t_0, \tau]$. Множество D_0, очевидно, может быть определено уже в момент $t = t_0$, а множество D_1 зависит от функций $y(t)$, $z(t)$ на интервале $(t_0, \tau]$.

Второй из максимумов в соотношении (1.5) следует искать по всем x_0, v_0 из множества $D = D_0 \cap D_1$, являющегося пересечением множеств D_0 и D_1. Сформулированное выше требование о непротиворечивости данных измерений, наложенное на функции $y(t)$ и $z(t)$, можно сформулировать так: множество D должно быть непусто. Отметим, что множества D_0, D_1, D представляют собой замкнутые выпуклые множества. Таким образом, полностью охарактеризованы области, по которым вычисляются экстремумы в (1.5). Порядок следования экстремумов в (1.5) определяется порядком поступления информации и принятия решения.

В принципе, оптимальный алгоритм управления сводится к следующему. В каждый момент времени t_0 становятся известны новые данные измерений $y(t_0)$, $z(t_0)$. Это дает возможность построить в этот момент область D_0 и вычислить минимакс (1.5). Попутно определится величина $\tau(t_0)$, лежащая в интервале $[t_0, T]$. Если окажется, что $\tau > t_0$, то в момент t_0 не следует производить коррекцию, а следует продолжать наблюдения, постоянно вычисляя текущее значение $\tau(t_0)$. Когда будет выполнено равенство $\tau(t_0) = t_0$, то в этот момент нужно производить коррекцию. При этом первый максимум в (1.5) можно опустить, так как интервал $[t_0, \tau]$ стягивается в точку. Величина u корректирующего импульса здесь определяется при вычислении последних двух (по порядку записи) экстремумов в (1.5), причем область D при этом совпадает с D_0. При $t \geqslant \tau$ движение будет неуправляемо.

Изложенный подход может быть распространен и на более сложные (в частности, многомерные) задачи коррекции при неполных данных измерений. Однако даже в рассмотренной простой задаче реализация оптимального управления требует в каждый момент времени находить минимакс (1.5), что приводит к трудоемким вычислениям.

Возможно еще следующее видоизменение постановки задачи. Пусть на получение или обработку данных наблюдений требуется время $t_* < T$. Тогда при $t < t_*$ движение будет неуправляемо. В любой момент $t = t_0 \geqslant t_*$ момент коррекции $\tau(t_0)$ должен подсчитываться путем вычисления минимакса (1.5) с той лишь разницей, что область D_0 определяется неравенствами (1.6) при $0 \leqslant t \leqslant t_0 - t_*$, область D_1 — неравенствами (1.6) при $t_0 - t_* < t \leqslant \tau - t_*$, а функции $y(t)$ и $z(t)$ рассматриваются на интервале $(t_0 - t_*, \tau - t_*]$. В остальном схема расчета оптимальной коррекции остается прежней.

2. Некоторые упрощения. Минимакс (1.5) можно упростить. Отметим, что функции $y(t)$, $z(t)$, по которым вычисляется первый максимум в (1.5), влияют лишь на область D_1, определяемую неравенствами (1.6) для $t_0 < t \leqslant \tau$. Покажем, что эти функции можно брать в виде (Y — некоторая постоянная)

$$y(t) = y(t_0) + \frac{Y - y(t_0)}{\tau - t_0}(t - t_0), \qquad z(t) = z(t_0) \qquad (t_0 < t \leqslant \tau) \tag{2.1}$$

Построим область D_1, соответствующую функциям (2.1). Подставляя (2.1) в левые части неравенств (1.6) при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$, получим

$$\begin{gathered}|x_0 + v_0 t - y(t)| = (\tau - t_0)^{-1}\,|x_0(\tau - t_0) + v_0 t(\tau - t_0) - \\ - y(t_0)(\tau - t_0) - [Y - y(t_0)](t - t_0)| = \frac{\tau - t}{\tau - t_0}|x_0 + v_0 t_0 - y(t_0)| + \\ + \frac{t - t_0}{\tau - t_0}|x_0 + v_0\tau - Y|, \qquad |v_0 - z(t)| = |v_0 - z(t_0)|\end{gathered} \tag{2.2}$$

Полагая $t = t_0$ и $t = \tau$, получим из (2.2) и (1.6) неравенства

$$|x_0 + v_0 t_0 - y(t_0)| \leqslant \varepsilon, \quad |v_0 - z(t_0)| \leqslant \delta, \quad |x_0 + v_0\tau - Y| \leqslant \varepsilon \tag{2.3}$$

Неравенства (2.3) входят в число неравенств, определяющих область D_1. Нетрудно проверить при помощи соотношений (2.2), что если неравенства (2.3) выполнены, то будут выполнены также и неравенства (1.6) при всех t из интервала $[t_0, \tau]$. Таким образом, неравенства (2.3) полностью определяют область D_1 для функций (2.1). Но первые два неравенства (2.3) совпадают с (1.6) при $t = t_0$, т. е. они входят в число неравенств, определяющих область D_0. Так как область D есть пересечение областей D_0 и D_1, то первые два неравенства (2.3) можно опустить, так как это не отразится на области D. Итак, в качестве области D_1, соответствующей функциям (2.1), можно принять область плоскости x_0, v_0, заданную неравенством

$$|x_0 + v_0\tau - Y| \leqslant \varepsilon \tag{2.4}$$

Пусть $y(t)$, $z(t)$ — любая пара функций, заданная на интервале $(t_0, \tau]$, причем $y(\tau) = Y$. Тогда в число неравенств вида (1.6), определяющих область D_1 для этих функций, будет обязательно входить (при $t = \tau$) неравенство (2.4). Следовательно, если заменить заданные функции $y(t)$, $z(t)$ на функции вида (2.1), то область D_1 во всяком случае не уменьшится. Поэтому область D также не уменьшится, и максимум по этой области может лишь возрасти. Следовательно, при отыскании максимума в (1.5) можно ограничиться функциями вида (2.1) и искать максимум по постоянным Y.

Соотношение (1.5) перепишется в виде

$$J(t_0) = \min_{\tau} \max_{Y} \min_{u} \max_{x_0, v_0} |x_0 + v_0 T + u(T - \tau)| \tag{2.5}$$

Область D, по которой ищется последний максимум в (2.5), есть пересечение области D_0 и области D_1, определяемой неравенством (2.4). Величина Y ограничена тем условием, что область D должна быть непуста. Остальные области изменения параметров при вычислении (2.5) — те же, что и в (1.5).

При любых данных наблюдений величина $J(t_0)$ из (2.5) не возрастает с ростом t_0. Это следует из того, что J — гарантированная оценка величины $|x(T)|$ в расчете на наихудшие будущие данные наблюдений, и в результате наблюдений J может лишь уменьшаться. Наибольшее значение $J(0) = J_0$ функционал $J(t_0)$ имеет в начальный момент, когда известны лишь результаты измерений начальных данных (1.3). Величина J_0 представляет собой оценку того промаха $|x(T)|$, который может быть достигнут при наилучшем управлении и наихудших данных измерений. Отметим, что при вычислении J_0 учитывается возможность измерений в будущем, хотя сами данные измерений заранее не известны.

3. Вычисление функционала. Определим величины $J_0 = J(0)$, $\tau = \tau(0)$ и u, соответствующие моменту $t_0 = 0$ в соотношении (2.5). Область D_0 при $t_0 = 0$ определяется двумя неравенствами (1.3). Из этих неравенств следует

$$a - \varepsilon + (b - \delta)\tau \leqslant x_0 + v_0\tau \leqslant a + \varepsilon + (b + \delta)\tau \tag{3.1}$$

С другой стороны, из неравенства (2.4), определяющего область D_1, получим

$$Y - \varepsilon \leqslant x_0 + v_0\tau \leqslant Y + \varepsilon \tag{3.2}$$

Введем обозначения

$$Y' = a + (b - \delta)\tau, \quad Y'' = a + (b + \delta)\tau \tag{3.3}$$

Сравнивая соотношения (3.1) и (3.2), заметим, что при $Y < Y'$ левое неравенство (3.1) влечет за собой выполнение левого неравенства (3.2), а при $Y > Y''$ правое неравенство (3.1) влечет за собой выполнение правого неравенства (3.2). Поэтому при $Y < Y'$ или при $Y > Y''$ область D получится заведомо меньше, чем при $Y = Y'$ или $Y = Y''$, соответственно. Так как в (2.5) ищется максимум по Y, а этот максимум не возрастает с уменьшением области D, зависящей от Y, то поэтому максимум в (2.5) можно разыскивать лишь по Y, заключенных в пределах

$$Y' \leqslant Y \leqslant Y'' \tag{3.4}$$

Область D, определяемую неравенствами (1.3) и (3.2), можно задать в виде

$$a - \varepsilon \leqslant x_0 \leqslant a + \varepsilon, \qquad v' \leqslant v_0 \leqslant v''$$

$$v' = \max\,[b - \delta,\ (Y - \varepsilon - x_0)/\tau]v'' = \min\,[b + \delta, (Y + \varepsilon - x_0)/\tau] \tag{3.5}$$

Нетрудно проверить, что при выполнении условий (3.4) имеем $v' \leqslant v''$ при любом x_0 из интервала, определяемого неравенствами (3.5). Поэтому область D непуста при условиях (3.4). Перепишем (2.5), избавляясь от знака модуля и вычисляя максимум по v_0 при ограничениях (3.5)

$$J_0 = \min_\tau \max_Y \min_u \max\,\{[\max_{x_0,\, v_0}(x_0 + v_0T) + u\,(T - \tau)],$$

$$[\max_{x_0,\, v_0}(-x_0 - v_0T) - u\,(T - \tau)]\} =$$

$$= \min_\tau \max_Y \min_u \max\,\{[\max_{x_0}(x_0 + v''T) + u\,(T - \tau)],$$

$$[\max_{x_0}(-x_0 - v'T) - u\,(T - \tau)]\} \tag{3.6}$$

Пользуясь выражением (3.5) для v'', можно написать

$$\max_{x_0}\,(x_0 + v''T) = \max_{x_0} \min\,[f_1\,(x_0), f_2\,(x_0)], \qquad a - \varepsilon \leqslant x_0 \leqslant a + \varepsilon$$

$$f_1\,(x_0) = x_0 + (b + \delta)\,T, \quad f_2\,(x_0) = [(Y + \varepsilon)\,T - x_0\,(T - \tau)]/\tau \tag{3.7}$$

Функции $f_1(x_0)$ и $f_2(x_0)$ линейны по x_0, причем первая из них возрастает, а вторая убывает с ростом x_0. Поэтому максимум (3.7) достигается при условии $f_1\,(x_0) = f_2\,(x_0)$, если корень этого уравнения, равный

$$x'' = Y + \varepsilon - (b + \delta)\,\tau \tag{3.8}$$

лежит в интервале $[a - \varepsilon,\ a + \varepsilon]$. Из правого неравенства (3.4) следует, что всегда $x'' \leqslant a + \varepsilon$. Если же $x'' < a - \varepsilon$, то $f_2\,(x_0) < f_1(x_0)$ при всех x_0 из интервала $[a - \varepsilon,\ a + \varepsilon]$, и тогда максимум (3.7) достигается при $x_0 = a - \varepsilon$ и равен $f_2\,(a - \varepsilon)$. Таким образом, максимум (3.7) достигается при $x_0 = \max\,(x'',\ a - \varepsilon)$ и равен

$$F'' = \max_{x_0}\,(x_0 + v''\,T) = f_2\,[\max\,(x'',\ a - \varepsilon)]$$

Учитывая соотношения (3.7) и (3.8), полученное равенство можно записать в развернутом виде

$$F''(Y,\ \tau) = [(Y - a + 2\varepsilon)\,T + (a - \varepsilon)\,\tau]/\tau, \qquad Y \leqslant Y_2$$
$$F''(Y,\ \tau) = Y + \varepsilon + (b + \delta)\,(T - \tau), \qquad Y \geqslant Y_2 \tag{3.9}$$
$$Y_2 = a + (b + \delta)\,\tau - 2\varepsilon$$

Соотношение (3.6) примет вид

$$J_0 = \min_\tau \max_Y \min_u \max\,[F''(Y,\ \tau) + u\,(T - \tau), F'(Y, \tau) - u(T - \tau)] \tag{3.10}$$

Здесь функция F' подсчитывается аналогично F'' из (3.9) и равна

$$F'(Y, \tau) = -Y + \varepsilon - (b - \delta)\,(T - \tau), \qquad Y \leqslant Y_1$$
$$F'(Y,\ \tau) = [(-Y + a + 2\varepsilon)\ T - (a + \varepsilon)\,\tau]/\tau, \qquad Y \geqslant Y_1$$
$$Y_1 = a + (b - \delta)\tau + 2\varepsilon \tag{3.11}$$

Минимум по u при $|u| \leqslant U$ в (3.10) нетрудно найти, так как минимизируемая функция представляет собой максимум из двух функций, линейных по u. Искомый минимум достигается либо в точке пересечения графиков этих функций, либо на границах интервала.Точнее, минимизирующее значение u равно

$$u = -U \quad \text{при } F' - F'' \leqslant -2U\,(T - \tau)$$
$$u = U \quad \text{при } F' - F'' \geqslant 2U\,(T - \tau)$$
$$u = (F' - F'')\,/\,[2\,(T - \tau)] \quad \text{при } |\,F' - F''\,| \leqslant 2U\,(T - \tau) \tag{3.12}$$

Указанным трем значениям u отвечают следующие значениея минимизируемой функции, соответственно:

$$F'' - U\,(T - \tau), \qquad F' - U\,(T - \tau), \qquad (F'' + F')/2 \tag{3.13}$$

Из неравенств (3.12) легко видеть, что тому значению u, которое надлежит выбирать согласно этим неравенствам, всегда отвечает наибольшее из трех выражений (3.13). Следовательно, соотношение (3.10) можно переписать в виде

$$J_0 = \min_\tau \max_Y \max\,[F'' - U\,(T - \tau),\ F' - U\,(T - \tau),\ (F' + F'')/2] \tag{3.14}$$

Операцию максимизации по Y и операцию выбора максимума из трех выражений (3.14) можно переставить местами. Так как функция F'', согласно (3.9), монотонно возрастает с ростом Y, а F', согласно (3.11), монотонно убывает с ростом Y, то их максимумы достигаются на границах интервала (3.4). Следовательно, получим

$$J_0 = \min_\tau \max\,(F_1,\ F_2,\ F_3),\ F_1 = F'\,(Y',\ \tau) - U\,(T - \tau)$$
$$F_2 = F''\,(Y'',\ \tau) - U\,(T - \tau),\ F_3 = \max_{Y' \leqslant Y \leqslant Y''} [F'\,(Y,\ \tau) + F''(Y, \tau)]/2 \tag{3.15}$$

Из соотношений (3.3), (3.9),(3.11) для Y', Y'', Y_1, Y_2 следуют неравенства $Y' \leqslant Y_1$, $Y'' \geqslant Y_2$. Вычислим функции F_1, F_2, учитывая приведенные неравенства и пользуясь соотношениями (3.15), (3.9), (3.11), (3.3)

$$F_1 = -Y' + \varepsilon - (b - \delta)(T - \tau) - U(T - \tau) = \\ = -(a + bT) + \varepsilon + \delta T - U(T - \tau)$$

$$F_2 = Y'' + \varepsilon + (b + \delta)(T - \tau) - U(T - \tau) = \\ = a + bT + \varepsilon + \delta T - U(T - \tau)$$

Подставляя полученные равенства, перепишем формулу (3.15) в виде

$$J_0 = \min_\tau \max [F_0(\tau), F_3(\tau)]$$

$$F_0(\tau) = |a + bT| + \varepsilon + \delta T - U(T - \tau)$$

$$F_3(\tau) = \max_{Y' \leqslant Y \leqslant Y''} F_4(Y, \tau), \qquad F_4(Y, \tau) = [F'(Y, \tau) + F''(Y, \tau)] / 2 \quad (3.16)$$

При вычислении функции F_3 рассмотрим три случая.

1. Пусть $\delta\tau \leqslant \varepsilon$. Тогда из равенств (3.3), (3.9), (3.11) следует

$$Y_2 \leqslant Y' \leqslant Y'' \leqslant Y_1 \quad (3.17)$$

Вычислим функции F_4, F_3, пользуясь соотношениями (3.16), (3.9), (3.11) и условием (3.17)

$$F_4(Y, \tau) = \varepsilon + \delta(T - \tau), \qquad F_3(\tau) = \varepsilon + \delta(T - \tau) \quad (3.18)$$

Функция F_4 здесь оказалась не зависящей от Y.

2. Если $\varepsilon \leqslant \delta\tau \leqslant 2\varepsilon$, то согласно (3.3), (3.9), (3.11) получим

$$Y' \leqslant Y_2 \leqslant Y_1 \leqslant Y'' \quad (3.19)$$

Из равенств (3.16), (3.9), (3.11) при условиях (3.19) следует, что функция F_4 кусочно-линейна по Y, причем на интервале $[Y', Y_2]$ она возрастает, на интервале $[Y_2, Y_1]$ остается постоянной, а на интервале $[Y_1, Y'']$ убывает с ростом Y. Следовательно, максимум ее достигается, например, при $Y = Y_1$.

Подсчитывая $F_3(\tau) = F_4(Y_1, \tau)$ при помощи соотношений (3.9), (3.11) и неравенств (3.19), придем к прежней формуле (3.18) для F_3.

3. При $\delta\tau \geqslant 2\varepsilon$ имеем, согласно (3.3), (3.9), (3.11)

$$Y' \leqslant Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant Y'' \quad (3.20)$$

При условиях (3.20) из равенств (3.16), (3.9), (3.11) следует, что функция F_4 на интервале $[Y', Y_1]$ возрастает, на интервале $[Y_1, Y_2]$ остается постоянной, а на интервале $[Y_2, Y'']$ убывает с ростом Y. Ее максимум, достигаемый при $Y = Y_1$, найдем при помощи соотношений (3.9), (3.11), (3.16), (3.20)

$$F_3(\tau) = F_4(Y_1, \tau) = [F'(Y_1, \tau) + F''(Y_1, \tau)] / 2 = \varepsilon(2T - \tau) / \tau \quad (3.21)$$

Учитывая равенства (3.18), (3.21), получим для всех рассмотренных случаев

$$F_3(\tau) = \varepsilon + \delta(T - \tau) \text{ при } \tau \leqslant 2\varepsilon\delta^{-1}, \quad F_3(\tau) = \varepsilon(2T - \tau) / \tau \text{ при } \tau \geqslant 2\varepsilon\delta^{-1} \quad (3.22)$$

Функция $\max [F_0(\tau), F_3(\tau)]$, определяемая равенствами (3.16), (3.22), характеризует минимаксное значение промаха как функцию момента коррекции τ. Найдем теперь ее минимум по τ при $0 \leqslant \tau \leqslant T$. Прежде всего, заметим, что функции $F_0(\tau)$ и

$F_3(\tau)$ определены равенствами (3.16), (3.22) при всех вещественных τ, непрерывны и монотонны, причем $F_0(\tau)$ строго возрастает, а $F_3(\tau)$ строго убывает при всех τ. Следовательно, абсолютный минимум по τ функции $\max(F_0, F_3)$ достигается при условии $F_0(\tau) = F_3(\tau)$.

Это уравнение имеет, очевидно, единственный корень τ_*, который нетрудно найти при помощи равенств (3.16), (3.22). После вычислений получим

$$\begin{gathered}\tau_* = t_1 = (UT - |a + bT|)(U + \delta)^{-1} \quad \text{при} \quad t_1 \leqslant 2\varepsilon\delta^{-1} \\ \tau_* = t_2 = {}^1\!/_2\, U^{-1}\{[(|a + bT| + 2\varepsilon + \delta T - UT)^2 + \\ + 8U\varepsilon T]^{1/2} + UT - |a + bT| - 2\varepsilon - \delta T\} \quad \text{при} \quad t_1 \geqslant 2\varepsilon\delta^{-1}\end{gathered} \tag{3.23}$$

Два случая, из которых всегда реализуется лишь один, отвечают здесь двум аналитическим выражениям для функции F_3 в соотношениях (3.22).

Функция $\max(F_0, F_3)$ монотонно убывает при $\tau \leqslant \tau_*$ и монотонно возрастает при $\tau \geqslant \tau_*$. Можно проверить при помощи равенств (3.23), что $t_1 \leqslant T$ и $t_2 \leqslant T$, так что всегда $\tau_* \leqslant T$. Поэтому минимум (3.16) по τ из интервала $[0, T]$ достигается либо при $\tau = 0$, либо при $\tau = \tau_*$. Первый случай имеет место, если $F_0(0) \geqslant F_3(0)$, или, что то же самое, если $t_1 \leqslant 0$. Второй случай реализуется при $t_1 \geqslant 0$ и разбивается, в свою очередь, на два случая, согласно соотношениям (3.23). Функционал во всех случаях можно подсчитывать по формуле $J_0 = F_0(\tau)$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}&\tau = 0, && J_0 = |a + bT| + \varepsilon + \delta T - UT && \text{при } t_1 \leqslant 0 \\ &\tau = t_1, && J_0 = |a + bT| + \varepsilon + \delta T - U(T - t_1) && \text{при } 0 \leqslant t_1 \leqslant 2\,\varepsilon\delta^{-1} \\ &\tau = t_2, && J_0 = |a + bT| + \varepsilon + \delta T - U(T - t_2) && \text{при } t_1 \geqslant 2\varepsilon\delta^{-1}\end{aligned} \tag{3.24}$$

Подставляя в (3.24) выражения для t_1 и t_2 из (3.23), получим после преобразований

$$\begin{gathered}J_0 = |a + bT| + \varepsilon + \delta T - UT, \qquad \tau = 0 \qquad (UT \leqslant |a + bT|) \\ J_0 = \varepsilon + \frac{\delta(|a + bT| + \delta T)}{U + \delta}, \qquad \tau = \frac{UT - |a + bT|}{U + \delta} \\ (UT \geqslant |a + bT|, \quad U(T - 2\varepsilon\delta^{-1}) \leqslant |a + bT| + 2\varepsilon) \\ J_0 = {}^1\!/_2\{[(|a + bT| + 2\varepsilon + \delta T - UT)^2 + 8U\varepsilon T]^{1/2} + |a + bT| + \delta T - UT\} \\ \tau = {}^1\!/_2 U^{-1}\{[(|a + bT| + 2\varepsilon + \delta T - UT)^2 + 8U\varepsilon T]^{1/2} + UT - |a + bT| - 2\varepsilon - \delta T\} \\ (U(T - 2\varepsilon\delta^{-1}) \geqslant |a + bT| + 2\varepsilon)\end{gathered} \tag{3.25}$$

Формулы (3.25) определяют искомую величину $J_0 = J(0)$ во всех случаях. Отметим, что результат (3.25) не изменится, если предполагать, что при $t > 0$ производятся лишь измерения координаты. Это связано с тем, что при вычислении (3.25) предполагались наихудшие результаты измерений, и наихудшими данными измерений скорости будут такие: $z(t) = b$ при $t > 0$. Эти измерения, очевидно, ничего не добавляют к известным начальным данным измерений (1.3).

Если же предполагать, что при $t > 0$ не производятся также измерения координаты, то результат (3.25) изменится. В этом случае управление будет основано лишь на данных начальных измерений (1.3). Тогда минимаксное значение функционала будет равно

$$J_1 = \min_{\tau} \min_{u} \max_{x_0, v_0} |x_0 + v_0 T + u(T - \tau)| \tag{3.26}$$

где максимум вычисляется по прямоугольнику, определяемому неравенствами (1.3). Минимакс (3.26) подсчитывается аналогично, но значительно более просто, чем (2.5).

Определяя максимум, получим вместо (3.10)

$$J_1 = \min_{\tau} \min_{u} \max \left[F'' + u(T-\tau),\ F' - u(T-\tau) \right]$$

$$F'' = a + \varepsilon + (b + \delta)\, T, \qquad F' = -a + \varepsilon - (b - \delta) T \tag{3.27}$$

Здесь величины F', F'' не зависят от Y, τ. Вычисляя минимум по u, получим аналогично (3.16)

$$J_1 = \min_{\tau} \max \left[|a + bT| + \varepsilon + \delta T - U(T-\tau),\ \varepsilon + \delta T \right]$$

Функция, минимум которой здесь следует найти, не убывает с ростом τ. Поэтому минимум достигается при $\tau = 0$. Искомый функционал, соответствующий момент коррекции и величина импульса в этом случае равны:

при $UT \leqslant |a + bT|$

$$J_1 = |a + bT| + \varepsilon + \delta T - UT, \qquad \tau = 0, \qquad u = -U \operatorname{sgn}(a + bT)$$

при $UT \geqslant |a + bT|$

$$J_1 = \varepsilon + \delta T, \qquad \tau = 0, \qquad u = -(a + bT) / T \tag{3.28}$$

Управление u здесь подсчитано по прежним формулам (3.12) с учетом значений F', F'' из (3.27) и равенства $\tau = 0$. Сравнивая (3.25) и (3.28), видим, что $J_0 = J_1$ лишь в том случае, когда $\tau = 0$ в (3.25). В остальных случаях, когда $\tau > 0$ в соотношениях (3.25), будем иметь $J_0 \leqslant J_1$, что следует из самой постановки задачи, но может быть проверено и непосредственно.

Рассмотрим формулы (3.25) в случае $U \to \infty$. Это соответствует большому возможному импульсу коррекции по сравнению с ошибками в начальных условиях и с погрешностями измерений. Тогда из соотношений (3.25) получим при любых a, b, ε, δ, T

$$J_0 = \varepsilon + O(U^{-1}), \quad \tau = T - (|a + bT| + \delta T)U^{-1} + O(U^{-2})$$

Промах в этом случае близок к погрешности измерения координаты ε, а момент коррекции τ — к моменту T окончания процесса.

Соотношения (2.5) показывают, что при решении минимаксной задачи существенно лишь измерение координаты в предполагаемый момент коррекции τ, т. е. величина $Y = y(\tau)$. Поэтому решение (3.25) можно рассматривать также как расчет оптимальной коррекции для случая, когда возможно лишь одно измерение в процессе движения. Это измерение выгоднее всего производить непосредственно перед коррекцией, т. е. в момент τ, определяемый равенствами (3.25).

Поступила 10 IV 1968

Институт проблем механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Рясин В. А. Оптимальная одноразовая коррекция в модельной задаче. Теория вероятностей и ее применения, 1966, т. 11, вып. 4, стр. 708—714.
2. Шелементьев Г. С. Об оптимальном сочетании управления и наблюдения, ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.