Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

ЗАДАЧА О СБЛИЖЕНИИ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Н. Н. Красовский, А. И. Субботин

(Свердловск)

Рассматривается задача о встрече преследующего и преследуемого объектов. Приводится схема построения управления преследующего объекта и формулируется условие, при котором данная схема обеспечивает сближение объектов не позже определенного момента времени.

1. Рассмотрим задачу о встрече двух управляемых движений [1–12]

$$dy/dt = A(t)y + B(t)u \tag{1.1}$$

$$dz/dt = f(t, z, v) \tag{1.2}$$

где $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ — фазовые векторы преследующего и преследуемого объектов, соответственно; u — r-мерное управляющее воздействие преследователя; v — s-мерное управление преследуемого; $A(t)$, $B(t)$ — непрерывные матрицы соответствующих размерностей; наконец $f(t, z, v)$ — n-мерная вектор-функция, непрерывная по t и v и удовлетворяющая условию Липшица по z.

Будем предполагать, что ограничения, накладываемые на управление u, имеют вид

$$u \in U \tag{1.3}$$

где U — некоторое выпуклое ограниченное замкнутое множество в евклидовом пространстве E_r.

Характер ограничений, накладываемых на управление v, здесь в явном виде описывать не будем. Предполагается лишь, что преследователь может столкнуться с любой кусочно-непрерывной реализацией $v[t]$ из некоторого класса V, что символически запишем в виде

$$v \in V \tag{1.4}$$

Под встречей движений $y[t]$ и $z[t]$ будем понимать совпадение $m \leqslant n$ наперед выбранных компонент векторов y и z, т. е. будем говорить, что ϑ есть момент встречи движений, если при $t = \vartheta$ впервые имеют место равенства

$$y_{i_j}[t] = z_{i_j}[t] \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.5}$$

В дальнейшем полагаем, что координатам $i_1, \ldots, i_m$ соответствуют m-мерные векторы $\{y\}_m$ и $\{z\}_m$.

Пусть ϑ° — момент поглощения процесса (1.2), (1.4) процессом (1.1), (1.3) [2,6], вычисленный в начальный момент времени $t = t_0$. Известно, что задача о построении управления $u^\circ = u^\circ[t, y, z]$, которое обеспечивает встречу движений (1.1), (1.2) не позже, чем к моменту ϑ°, наталкивается на трудности [3, 4, 5]. В частности, трудно ограничиться лишь обыкновенными решениями $y[t]$ и $z[t]$ в синтезированной системе дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) и требуется введение обобщенных движений. Поэтому в данной статье используется предельный переход от некоторой искретной схемы. В этой схеме предполагается, что управление u_δ на каждом шаге $[\tau_k, \tau_{k+1})$ $(k=0, 1\ldots)$ строится в виде

$$u_\delta = u_\delta[t, y[\tau_k], z[\tau_k], \quad \tau_k, \vartheta_k] \; (\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}, \tau_{k+1} - \tau_k = \delta) \qquad (1.6)$$

где ϑ_k — некоторая вспомогательная переменная, смысл которой поясняется ниже. (Подробное описание схемы дано в работах [3, 4].)

Будем говорить, что из заданного исходного состояния $y^\circ = y(t_0)$, $z^\circ = z(t_0)$ управление $u^* = u^*[t, y[\tau_k], z[\tau_k], \tau_k, \vartheta_k]$ $(k=0, 1\ldots)$ обеспечивает сближение движений $y[t]$ и $z[t]$ не позже, чем к моменту ϑ^*, если выполнено неравенство

$$\gamma_{u^*} = \sup_{\varepsilon > 0} [\lim_{\delta \to 0} \sup (\sup_v \vartheta^\varepsilon_{u_\delta^*, v})] \leqslant \vartheta^* \qquad (1.7)$$

где $\vartheta^\varepsilon_{u_\delta^*, v}$ — момент, когда впервые $\|\{y[\vartheta] - z[\vartheta]\}_m\| \leqslant \varepsilon$.

Неравенство (1.7) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $\Delta > 0$ можно указать такое $\delta^\circ < 0$, что

$$\vartheta^\varepsilon_{u_\delta^* v} \leqslant \vartheta^* + \Delta \quad \text{для } 0 < \delta \leqslant \delta^\circ, \quad v \in V$$

Цель данной статьи — указать условия, при которых возможно построить управление u^*, которое обеспечивало бы сближение движений (1.1) и (1.2) не позже, чем к моменту ϑ°.

2. При исследовании рассматриваемой задачи о встрече движений будем предполагать, что выполнено условие A, которое сформулировано ниже.

Оговорим предварительно вспомогательные понятия.

Пусть $G_1[y, \tau, \vartheta]$, $G_2[z, \tau, \vartheta]$ — области достижимости объектов (1.1), (1.3) и (1.2), (1.4), соответственно [2,6], в пространстве E_m векторов $g = \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_m}\}$, отвечающие моменту $\vartheta \geqslant \tau$ и начальным состояниям $y = y[\tau]$, $z = z[\tau]$.

При построении области достижимости $G_1[y, \tau, \vartheta]$ будем допускать произвольные измеримые вектор-функции $u(t)$, удовлетворяющие условию (1.3) при $\tau \leqslant t \leqslant \vartheta$ по существу. В силу выпуклости множества U область $G_1[y, \tau, \vartheta]$ выпукла, кроме того, эта область будет замкнута. Через $\vartheta^\circ[y, z, \tau]$ будем обозначать момент поглощения процесса (1.2), (1.4) процессом (1.1), (1.3), т. е. $\vartheta^\circ[y, z, \tau]$ — наименьшее значение параметра ϑ, при котором $G_2[z, \tau, \vartheta] \subset^* G_1[y, \tau, \vartheta]$. Если при некоторых y, z, τ не существует момента поглощения, то будем полагать в подобных случаях $\vartheta^\circ[y, z, \tau] = \infty$.

Будем говорить, что имеет место ε-поглощение процесса (1.2), (1.4) процессом (1.1), (1.3), если при данных y, z, τ, ϑ имеем $G_2[z, \tau, \vartheta] \subset G^\varepsilon_1[y, \tau, \vartheta]$, где разность G_1^ε — ε-окрестность множества G_1 ($g \in G_1^\varepsilon$, если существует $g^* \in G_1$ такой, что модуль разности $\|g - g^*\| \leqslant \varepsilon$). Наименьшее число ε, при котором имеет место ε-поглощение, будем обозначать через ε° ($\varepsilon^\circ = \varepsilon^\circ[y, z, \tau, \vartheta]$).

В силу выпуклости области $G_1[y, \tau, \vartheta]$ к каждой граничной точке q множества $G_1^\varepsilon[y, \tau, \vartheta]$ при $\varepsilon > 0$ можно провести одну и только одну опорную гиперплоскость $L(q): (l(q), g) = \mu(q)$. Будем полагать в дальнейшем, что $\|l(q)\| = 1$ и для любого $g \in G_1^\varepsilon[y, \tau, \vartheta]$ $(l(q), g) \leqslant \mu(q)$ (т. е. $l(q)$ определяет направление внешней нормали к границе области G_1^ε в точке q). Через $M_\beta(l)$ и $N_\beta(l)$ будем обозначать множества граничных точек q области $G_1^{\varepsilon}[y, \tau, \vartheta]$, удовлетворяющих, соответственно, неравенствам $\|l(q) - l\| \geqslant \beta$ и $\|l(q) - l\| \leqslant \beta$, где l — заданный единичный вектор, β — положительное число.

Определим еще множество $\Gamma_{a,b}$ элементов $\gamma = \{y, z, \tau, \vartheta\}$ следующим образом

$$\gamma \in \Gamma_{a,b}$$

если

$$\vartheta - \tau \geqslant a > 0,\ t_0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta^\circ [y^\circ, z^\circ, t_0] = \vartheta^\circ,\ \varepsilon^\circ [y, z, \tau, \vartheta] \geqslant b > 0$$
$$y \in Y_\tau = G_1^* [y^\circ, t_0, \tau],\ z \in Z_\tau = G_2^* [z^\circ, t_0, \tau]$$

где a, b — положительные сколь угодно малые числа, G_1^* и G_2^* — области достижимости объектов (1.1), (1.3) и (1.2), (1.4), соответственно построенные в пространстве E_n

Условие А. Существует $\alpha^\circ > 0$ такое, что для любого $0 < \alpha \leqslant \alpha$ можно указать единичный вектор l° и число $\beta > 0$, удовлетворяющее условию $\lim \beta = 0$ при $\alpha \to 0$ такие, что для всех $q \in M_\beta (l^\circ)$ имеет место неравенство $\rho \{q, G_2, [z, \tau, \vartheta]\} \geqslant \alpha$. Указанное свойство выполняется равномерно по всем γ из каждого множества $\Gamma_{a,b}$ при сколь угодно малых a и b. Здесь $\rho (q, G_2)$ — расстояние от точки q до множества G_2.

Сформулированное выше условие выполняется, если при всех γ из каждого $\Gamma_{a,b}$ границы областей $G_1^{\varepsilon^\circ} [y, \tau, \vartheta]$ и $G_2 [z, \tau, \vartheta]$ касаются лишь в одной точке, т. е. множество

$$K [y, z, \tau, \vartheta] = D^{\varepsilon^\circ} [y, \tau, \vartheta] \cap \bar{G}_2 [z, \tau, \vartheta]$$

состоит из единственной точки q°; здесь $D^{\varepsilon^\circ} [y, \tau, \vartheta]$ — замыкание дополнения множества $G_1^{\varepsilon^\circ} [y, \tau, \vartheta]$, а $\bar{G}_2 [z, \tau, \vartheta]$—замыкание области $G_2 [z, \tau, \vartheta]$.

Заметим, что для точки $q^\circ \in K [y, z, \tau, \vartheta]$, $\rho\{q^\circ, G_2, [z, \tau, \vartheta]\} = 0$, поэтому при любом $0 < \alpha \leqslant \alpha^\circ$ в силу условия A имеет место

$$q^\circ \in N_\beta (l^\circ) \tag{2.1}$$

На фиг. 1 изображен случай, когда множество K состоит из единственной точки q°, жирной линией показано множество $N_\beta (l^\circ)$.

Примечание. Пусть уравнение (1.2) имеет вид

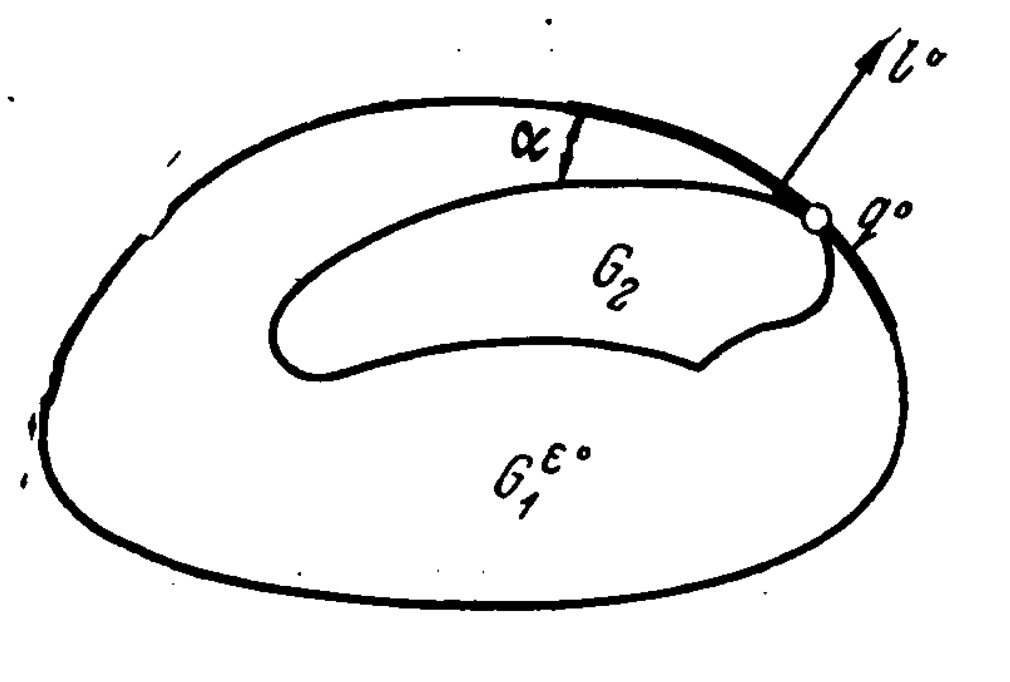
$$\frac{dz}{dt} = C (t) z + D (t) v \tag{2.2}$$

Здесь $C (t)$ и $D (t)$ — непрерывные матрицы соответствующих размерностей, управление $v [t]$ при $\vartheta > \tau$ стеснено ограничением вида ([6], стр. 71)

$$\varkappa_\tau^{(2)} [v] \leqslant \nu [\tau] \tag{2.3}$$

где $\varkappa_\tau^{(2)} [v]$ — норма линейного функционала

$$\varphi_v [h] = \int_\tau^\vartheta (h (t), v [t]) dt$$



Фиг. 1

порожденного вектор-функцией $v [t]$ на подходящем нормированном пространстве $\mathscr{B}_2 \{h\}$ s-мерных вектор-функций $h (t)$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$.

Примем, что условие (1.3) также может быть истолковано, как ограничение $\varkappa_\tau^{(1)} [u] \leqslant \mu$ на норму линейного функционала

$$\varphi_u [g] = \int_\tau^\vartheta (g (t), u [t]) dt$$

порожденного вектор-функцией $u [t]$ на некотором нормированном пространстве $\mathscr{B}_1 \{g\}$ r-мерных вектор-функций $g (t)$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$.

Пусть $\rho_1[g]$ и $\rho_2[h]$ — нормы вектор-функций g и h в $\mathscr{B}_1\{g\}$ и $\mathscr{B}_2\{h\}$, соответственно. В этом случае момент поглощения определяется, как наименьший положительный корень ϑ уравнения [6]

$$\min_{\|\lambda\|\leqslant 1}\{\mu\rho_1[\lambda'\{Y[\vartheta,t]B(t)\}_m]-\nu\rho_2[\lambda'\{Z[\vartheta,t]D(t)\}_m]+$$
$$+\lambda'\{Y[\vartheta,\tau]y[\tau]-Z[\vartheta,\tau]z[\tau]\}_m\}=0 \qquad (2.4)$$

Здесь λ — m-мерный вектор; $Y[\vartheta,t]$ и $Z[\vartheta,t]$ — фундаментальные матрицы системы уравнений (1.1) и (2.2); которые при $u\equiv 0$, $v\equiv 0$, удовлетворяют следующему условию: $Y[\vartheta,\vartheta]=E$, $Z[\vartheta,\vartheta]=E$; $\{F\}_m$ — матрица, строками которой являются i_1-я, i_2-я,..., i_m-я строки матрицы F (F — некоторая матрица, содержащая $n\geqslant m$ строк), символ* означает транспонирование.

Используя (2.4), условие A в данном случае можно проверить эффективно.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. При выполнении условия A можно построить управление u_δ^* вида (1.6), которое обладает следующим свойством: для любого сколь угодно малого числа $\eta>0$ можно указать такое число $\delta^\circ>0$, что для всех $0<\delta\leqslant\delta^\circ$ при выборе преследователем управления u_δ^* и при любом $v\in V$ найдется момент времени $\vartheta\leqslant\vartheta^\circ[y^\circ,z^\circ,t_0]$, когда осуществляется неравенство

$$\|\{y[\vartheta]-z[\vartheta]\}_m\|\leqslant\eta \qquad (2.5)$$

Таким образом, в теореме 2.1 утверждается, что при выполнении условия A существует управление u_δ^*, осуществляющее сближение движений (1.1), (1.2) не позже, чем к моменту ϑ°.

Доказательство теоремы 2.1 составляет содержание п.п. 4 и 5.

3. Рассмотрим построение управления u_δ^*. В начальный момент времени $t=t_0$ определяем момент поглощения $\vartheta^\circ=\vartheta^\circ[y^\circ,z^\circ,t_0]$. Отрезок времени $[t_0,\vartheta^\circ]$ разбиваем на равные полуинтервалы $[\tau_k,\tau_{k+1})$, $\tau_{k+1}-\tau_k=\delta$, $\tau_0=t_0$.В каждый момент времени $t=\tau_k$ вычисляем $\vartheta^\circ[y[\tau_k],z[\tau_k],\tau_k]$. и определяем число

$$\vartheta_k=\min\{\vartheta_{k-1},\vartheta^\circ[y[\tau_k],z[\tau_k],\tau_k]\},\quad \vartheta_0=\vartheta^\circ \qquad (3.1)$$

Если $\vartheta_k=\vartheta^\circ[y[\tau_k],z[\tau_k],\tau_k]$, то строим управление $u^\circ(t)=u^\circ[t,y[\tau_k],z[\tau_k],\tau_k,\vartheta_k]$, прицеливающее [2, 6] движение системы (1.1) в некоторую точку $\{y[\vartheta_k]\}_m=q^\circ[\tau_k]$ из множества $K[y[\tau_k],z[\tau_k],\tau_k,\vartheta_k]$.

Затем полагаем

$$u_\delta^*[t,y[\tau_k],z[\tau_k],\tau_k,\vartheta_k]=u^\circ[t,y[\tau_k],z[\tau_k],\tau_k,\vartheta_k]\quad(\tau_k\leqslant t<\tau_{k+1})$$

Если $\vartheta_k<\vartheta^\circ[y[\tau_k],z,[\tau_k],\tau_k]$, то вычисляем $\varepsilon^\circ[\tau_k],=\varepsilon^\circ[y[\tau_k],z[\tau_k],\tau_k,\vartheta_k]$, находим некоторую точку $q^\circ[\tau_k]$, принадлежащую множеству $K[y[\tau_k],z[\tau_k],\tau_k,\vartheta_k]$ и определяем управление $u_\varepsilon^\circ(t)=u_\varepsilon^\circ[t,y[\tau_k],z[\tau_k],\tau_k,\vartheta_k]$,переводящее систему (1.1) в $\varepsilon^\circ[\tau_k]$-окрестность точки $q^\circ[\tau_k]$. После определения $u_\varepsilon^\circ(t)$, полагаем

$$u_\delta^*[t,y[\tau_k],z[\tau_k],\tau_k,\vartheta_k]=u^\circ_\varepsilon[t,y[\tau_k],z[\tau_k],\tau_k,\vartheta_k]\quad(\tau_k\leqslant t<\tau_{k+1})$$

4. Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 2.1, рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача 4.1. Пусть движение объекта описывается уравнением (1.1), где управление стеснено ограничением вида (1.3). Предположим, что для некоторых значений $\varepsilon \geqslant b > 0$, $\vartheta > \tau$, $y = y[\tau]$ построена область $G_1^\varepsilon [y, \tau, \vartheta]$, пусть q_1 и q_2 — некоторые граничные точки области G_1^ε такие, что

$$\| l(q_1) - l(q_2) \| = \varphi \quad (\varphi \text{ — некоторый малый параметр}) \tag{4.1}$$

Обозначим, через $u_1(t)$ и $u_2(t)$ допустимые программные управления, которые переводят систему (1.1) из состояния $y[\tau]$ в $y_1[\vartheta]$ и $y_2[\vartheta]$, соответственно, такие, что

$$\| \{y_1[\vartheta]\}_m - q_1 \| = \varepsilon, \quad \| \{y_2[\vartheta]\}_m - q_2 \| = \varepsilon \tag{4.2}$$

Предположим, что на отрезке времени $[\tau, \tau + \delta]$, $\tau + \delta < \vartheta$ в системе (1.1) работает управление $u_2(t)$, порождающее движение $y_2[t]$. Если в момент времени $t = \tau + \delta$ по реализовавшемуся значению $y_2[\tau + \delta]$ построить область $G_1^\varepsilon [y_2[\tau + \delta], \tau + \delta, \vartheta]$, то, вообще говоря, $q_1 \overline{\in} G_1^\varepsilon [y_2[\tau + \delta], \tau + \delta, \vartheta]$. Требуется определить ε^* так, чтобы $q_1 \in G_1^{\varepsilon^*} [y_2[\tau + \delta], \tau + \delta, \vartheta]$, и оценить величину $\Delta\varepsilon = \varepsilon^* - \varepsilon$.

Решение задачи 4.1. По формуле Коши имеем

$$\begin{aligned} y_1[\vartheta] &= Y[\vartheta, \tau]\, y[\tau] + \int_\tau^\vartheta Y[\vartheta, t]\, B(t)\, u_1(t)\, dt \\ y_2[\vartheta] &= Y[\vartheta, \tau]\, y[\tau] + \int_\tau^\vartheta Y[\vartheta, t]\, B(t)\, u_2(t)\, dt \end{aligned} \tag{4.3}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \Delta u(t) = u_1(t) - u_2(t) \\ u_1^*(t) = \begin{cases} u_1(t) - \Delta u(t) = u_2(t) & (\tau \leqslant t < \tau + \delta) \\ u_1(t) & (\tau + \delta \leqslant t \leqslant \vartheta) \end{cases} \\ u_2^*(t) = \begin{cases} u_2(t) + \Delta u(t) = u_1(t) & (\tau \leqslant t < \tau + \delta) \\ u_2(t) & (\tau + \delta \leqslant t \leqslant \vartheta) \end{cases} \end{gathered} \tag{4.4}$$

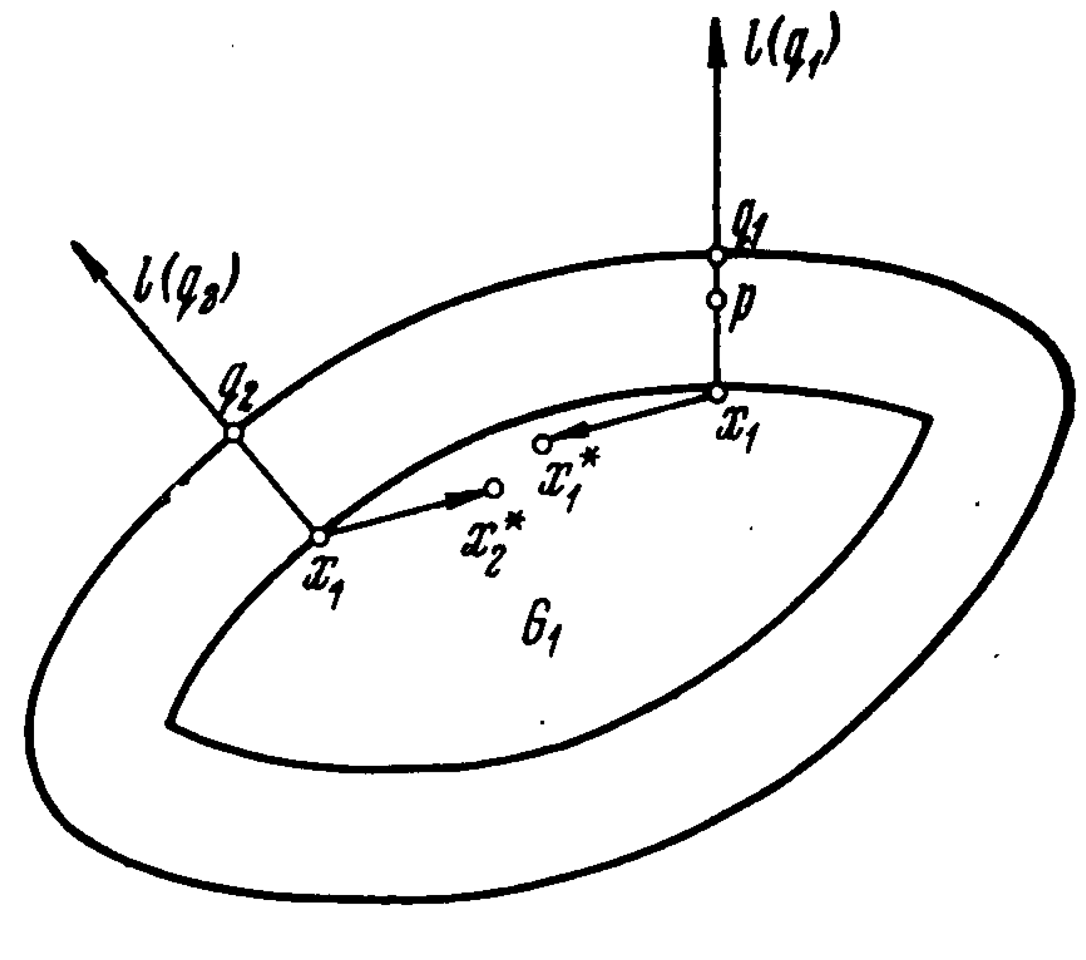
Управления $u_1^*(t)$ и $u_2^*(t)$ будут допустимыми и им отвечают некоторые траектории $y_1^*[t]$ и $y_2^*[t]$, причем из (4.3), (4.4) имеем

$$\begin{aligned} y_1^*[\vartheta] &= y_1[\vartheta] + \Delta y \\ y_2^*[\vartheta] &= y_2[\vartheta] - \Delta y \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\Delta y = -\int_\tau^{\tau+\delta} Y[\vartheta, t]\, B(t)\, \Delta u(t)\, dt \tag{4.6}$$

Положим

$$\{y_i[\vartheta]\}_m = x_i \quad \{y_i^*[\vartheta]\}_m = x_i^*$$
$$\{\Delta y\}_m = \Delta x \qquad (i = 1, 2)$$



Фиг. 2

Заметим теперь, что точка x_i $(i = 1, 2)$ есть ближайшая к q_i $(i = 1, 2)$ точка множества $G_1[y, \tau, \vartheta]$, отсюда можно получить следующие равенства (фиг. 2).

$$q_i - x_i = \varepsilon l(q_i) \qquad (i = 1, 2) \tag{4.7}$$

$$\max\, (l(q_i), x) = (l(q_i), x_i) = \mu_i - \varepsilon \quad (x \in G_1[y, \tau, \vartheta]) \tag{4.8}$$

По определению области достижимости $x_i^* \in G_1[y, \tau, \vartheta]$, поэтому из (4.8) имеем $(l(q_i), x_i^*) \leqslant \mu(q_i) - \varepsilon$ $(i = 1,2)$. Из (4.5) и (4.8) вытекает

$$(l(q_1), \Delta x) \leqslant 0 \tag{4.9}$$

$$(l(q_2), \Delta x) \geqslant 0 \tag{4.10}$$

Пусть $\Delta l = l(q_2) - l(q_1)$, из (4.9), (4.10) имеем $-(\Delta l, \Delta x) \leqslant (l(q_1), \Delta x) \leqslant 0$; отсюда

$$|(l(q_1), \Delta x)| \leqslant \|\Delta l\| \cdot \|\Delta x\| = \varphi \|\Delta x\| \tag{4.11}$$

Обозначим теперь через L гиперплоскость $(l(q_1), x) = 0$. Вектор $l(q_1)$ и гиперплоскость L образуют ортогональное разложение пространства E_m. Пусть g_1 и g_2 — проекции вектора Δx на $l(q_1)$ и L, соответственно. Тогда

$$\|g_2\|^2 = \|\Delta x\|^2 - \|g_1\|^2 \tag{4.12}$$

$$g_1 = (l(q_1), \Delta x)\, l(q_1), \qquad \|g_1\| = |(l(q_1), \Delta x)| \leqslant \varphi \|\Delta x\| \tag{4.13}$$

Оценим расстояние между q_1 и x_1^*. Из (4.5), (4.7), (4.12), (4.13) имеем

$$\|q_1 - x_1^*\|^2 = \|\varepsilon l(q_1) + x_1 - x_1 - \Delta x\|^2 =$$

$$= \|\varepsilon l(q_1) - g_1 - g_2\|^2 = \|\varepsilon l(q_1) - g_1\|^2 + \|\Delta x\|^2 - \|g_1\|^2$$

Полагая $\|\Delta x\|/\varepsilon$ достаточно малым, получим с учетом (4.13)

$$\|q_1 - x_1^*\| \leqslant \varepsilon \left[\left(1 + \frac{\|g_1\|}{\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\|\Delta x\|}{\varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\|g_1\|}{\varepsilon}\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= \varepsilon\left(1 + \frac{\|g_1\|}{\varepsilon}\right) + o\left(\frac{\|\Delta x\|}{\varepsilon}\right) \leqslant \varepsilon\left(1 + \frac{\varphi\|\Delta x\|}{\varepsilon}\right) + o\left(\frac{\|\Delta x\|}{\varepsilon}\right) \tag{4.14}$$

Теперь нетрудно получить искомую оценку для величины $\Delta\varepsilon$. Для этого заметим, что точка x_1^* по построению принадлежит области $G_1^{\varepsilon^*}[y_2[\tau + \delta], \tau + \delta, \vartheta]$. Так как расстояние от q_1 до этой точки оценивается неравенством (4.14), то

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon^* - \varepsilon \leqslant \varepsilon\left(1 + \varphi\frac{\|\Delta x\|}{\varepsilon}\right) + o\left(\frac{\|\Delta x\|}{\varepsilon}\right) - \varepsilon = \varphi\|\Delta x\| + o\left(\frac{\|\Delta x\|}{\varepsilon}\right) \tag{4.15}$$

Полагая в последнем соотношении $\varepsilon \geqslant b$, где b — фиксированное положительное число, получим с учетом (4.6)

$$\Delta\varepsilon \leqslant k\varphi\delta + o(\delta) \tag{4.16}$$

где k — некоторое положительное число. Отметим, что все точки p вида

$$p = q_1 - \|q_1 - p\|\, l(q_1) \qquad \text{при } \|q_1 - p\| \leqslant \varepsilon$$

также принадлежат области $G_1^{\varepsilon+\Delta\varepsilon}[y_2[\tau + \delta], \tau + \delta, \vartheta]$ при $\Delta\varepsilon$, удовлетворяющем (4.16) (фиг. 2).

5. Основная идея доказательства теоремы 2.1 будет состоять в исследовании изменения величины ε° вдоль движения систем (1.1) и (1.2).

Величину ε°, вычисляемую в каждый момент времени $t = \tau$ по реализовавшимся $y[\tau]$ и $z[\tau]$, можно рассматривать, как некоторую функцию времени $\varepsilon^\circ[\tau] = \varepsilon^\circ[y[\tau], z[\tau], \tau, \vartheta_k]$, причем определенному выбору управлений u и v отвечает определенная реализация $\varepsilon^\circ[\tau]$.

Покажем, что на каждом шаге $[\tau_k, \tau_{k+1})$ в случае

$$\gamma[t] = \{y[t], z[t], t, \vartheta_k\} \in \Gamma_{a,b}, \quad \tau_k \leqslant t \leqslant \tau_{k+1}$$

при любом $v \in V$ выбор управления u_δ^* обеспечивает неравенство

$$\varepsilon^\circ[\tau_{k+1}] - \varepsilon^\circ[\tau_k] \leqslant \lambda(\delta) \cdot \delta \tag{5.1}$$

Здесь

$$\lambda(\delta) \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0 \tag{5.2}$$

равномерно по γ из $\Gamma_{a,b}$.

Будем предполагать, что $\vartheta_k = \vartheta_{k+1} = \vartheta$; в противном случае из (3.1) и из определений момента поглощения ϑ° и величины ε° следует равенство $\varepsilon^\circ[\tau_{k+1}] = 0$, откуда вытекает (5.1).

Пусть в момент $t = \tau_k$ реализовавшиеся значения фазовых векторов $y[\tau_k]$, $z[\tau_k]$ определяют области достижимости $G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_k], \tau_k, \vartheta]$ и $G_2[z[\tau_k], \tau_k, \vartheta]$. По смыслу величины $\varepsilon^\circ[\tau_k]$

$$G_2[z[\tau_k], \tau_k, \vartheta] \subset G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_k], \tau_k, \vartheta]$$

К моменту времени $t = \tau_{k+1} = \tau_k + \delta$ управление u_δ^* переведет систему (1.1) в состояние $y[\tau_{k+1}]$, а управление $v \in V$ — систему (1.2) в состояние $z[\tau_{k+1}]$. Вообще говоря, включение

$$G_2[z[\tau_{k+1}], \tau_{k+1}, \vartheta] \subset G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_{k+1}], \tau_{k+1}, \vartheta]$$

не имеет место, поэтому требуется подобрать новое, вообще говоря, бóльшее значение $\varepsilon^\circ[\tau_{k+1}]$, обеспечивающее в момент времени $t = \tau_{k+1}$ ε-поглощение процесса (1.2), (1.4) процессом (1.1), (1.3). Оценим сверху изменение величины ε°. Будем при этом опираться на следующее утверждение.

Для любого $\delta > 0$ можно указать такое $\zeta(\delta)$, зависящее только от δ, что при любом допустимом выборе управления $u(t)$, осуществляющего перевод системы (1.1) из $y[\tau]$ в $y[\tau+\delta]$, будет иметь место

$$\rho\{g, G_1^\varepsilon[y[\tau+\delta], \tau+\delta, \vartheta]\} \leqslant \zeta(\delta)$$

$$\zeta(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0, \; \varepsilon \geqslant 0, \quad \tau + \delta < \vartheta \tag{5.3}$$

Здесь g — произвольная точка из $G_1[y[\tau], \tau, \vartheta]$, $\{y[\tau], \tau, \vartheta\}$ принадлежит любой ограниченной области в E_{n+2}. Справедливость этого утверждения следует из вида системы (1.1) и характера ограничений (1.3).

Пусть выбрано достаточно малое число $\delta > 0$ такое, что $\varsigma(\delta) \leqslant \min\{\alpha^\circ, b\}$, положим

$$\alpha = \alpha(\delta) = \zeta(\delta) \tag{5.4}$$

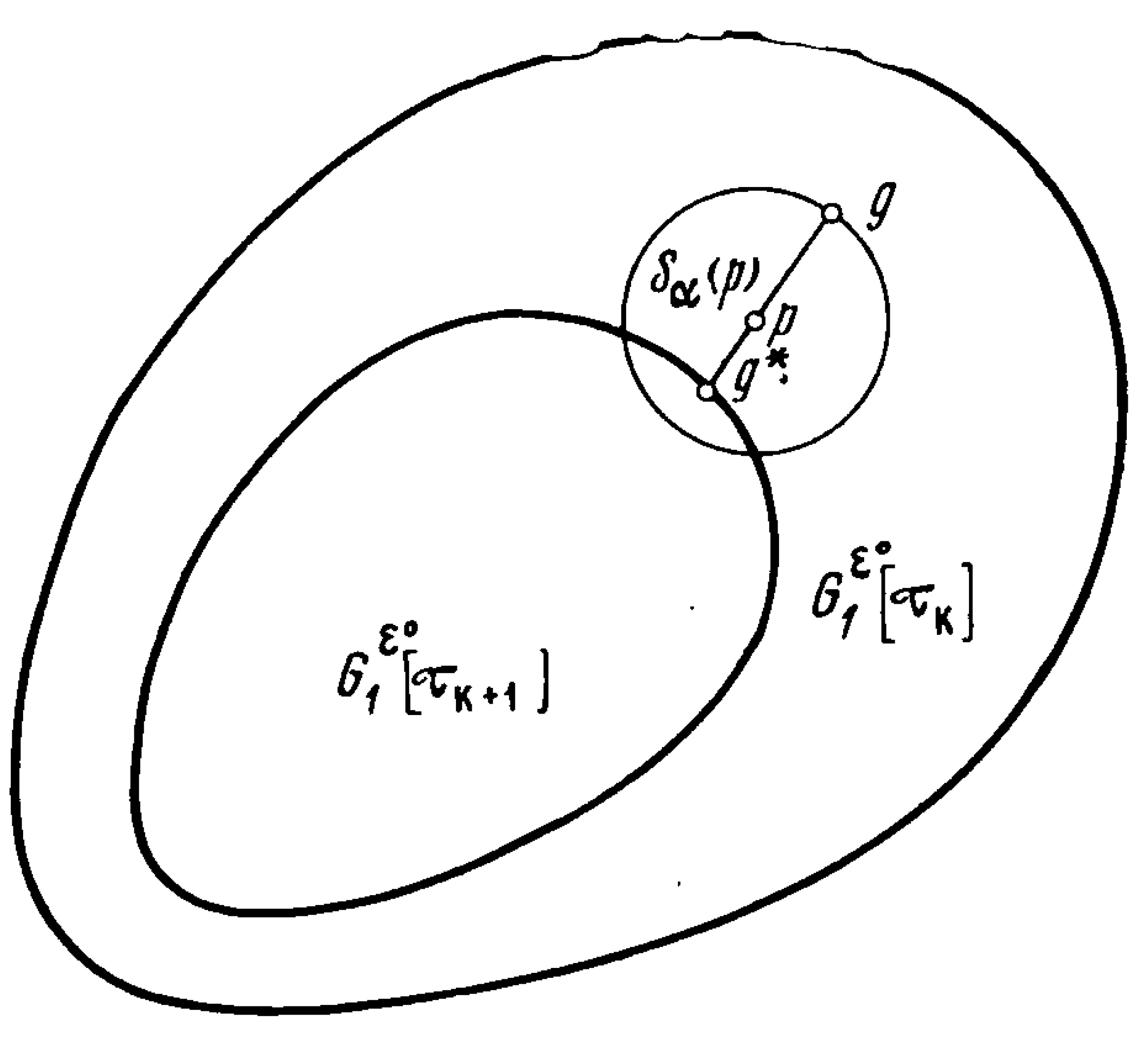
и найдем в силу условия A соответствующее число $\beta(\alpha) > 0$.

Пусть p — произвольная точка области $G_2[z[\tau_k], \tau_k, \vartheta]$. Возможны два случая

(1) $\quad S_\alpha(p) \subset G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_k], \tau_k, \vartheta]$ (5.5)

(2) $\quad S_\alpha(p) \overline{\in} G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_k], \tau_k, \vartheta]$ (5.6)

где $S_\alpha(p)$ — замкнутая сфера в E_m радиуса α с центром в точке p.



Фиг. 3

Рассмотрим первый случай. Допустим, что

$$p \overline{\in} G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_{k+1}], \tau_{k+1}, \vartheta] \tag{5.7}$$

Положим

$$g = p + \frac{\alpha(p - g^*)}{\|p - g^*\|}$$

Здесь g^* — ближайшая к p точка (фиг. 3) области $G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_{k+1}], \tau_{k+1}, \vartheta]$.

В силу (5.5)

$$g \in G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_k], \tau_k, \vartheta]$$

Можно показать, что

$$\rho\{g, G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_{k+1}], \tau_{k+1}, \vartheta] = \|g - g^*\| = \alpha + \|p - g^*\| > \alpha = \zeta(\delta)$$

Последнее неравенство противоречит (5.3), следовательно, предположение (5.7) неверно, т. е. в первом случае

$$p \in G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_{k+1}], \tau_{k+1}, \vartheta] \qquad (5.8)$$

Рассмотрим второй случай. В силу (5.6) найдется точка q, принадлежащая границе области $G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_k]\ \tau_k, \vartheta]$ такая, что $\|q - p\| \leqslant \alpha$, пусть q^* — ближайшая к p точка границы области $G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_k], \tau_k, \vartheta]$; так как $\|q^* - p\| \leqslant \alpha$, то $q^* \in N_\beta(l^\circ)$. Можно показать, что

$$p = q^* - l(q^*)\|q^* - p\| \qquad (5.9)$$

Заметим теперь, что на отрезке времени $[\tau_k, \tau_{k+1})$ в системе (1.1) работает управление $u_\delta{}^*$, которое переводит систему (1.1) к моменту $t = \vartheta$ в $\varepsilon^\circ[\tau_k]$-окрестность некоторой точки $q^\circ[\tau_k]$, принадлежащей множеству $K[y[\tau_k], z[\tau_k], \tau_k, \vartheta]$, причем $q^* \in N_\beta(l^\circ)$ и $q^\circ[\tau_k] \in N_\beta(l^\circ)$ (см. (2.1)), следовательно, $\|l(q^*) - l(q^\circ[\tau_k])\| \leqslant 2\beta$, поэтому, как отмечалось при решении задачи 4.1, точки p, определяемые соотношением вида (5.9) при $q^* - p\| \leqslant \alpha \leqslant b \leqslant \varepsilon^\circ[\tau_k]$, принадлежат области

$$G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]+\Delta\varepsilon}[y[\tau_{k+1}], \tau_{k+1}, \vartheta]$$

где

$$\Delta\varepsilon \leqslant 2k\beta\delta + o(\delta) \qquad (5.10)$$

Учитывая соотношение (5.8), теперь можно утверждать, что

$$G_2[z[\tau_k], \tau_k, \vartheta] \subset G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]+\Delta\varepsilon}[y[\tau_{k+1}], \tau_{k+1}, \vartheta] \qquad (5.11)$$

Но по определению области достижимости

$$G_2[z[\tau_{k+1}], \tau_{k+1}, \vartheta] \subset G_2[z[\tau_k], \tau_k, \vartheta] \qquad (5.12)$$

Поэтому из (5.11) вытекает неравенство

$$\varepsilon^\circ[\tau_{k+1}] - \varepsilon^\circ[\tau_k] \leqslant 2k\beta\delta + o(\delta) \qquad (5.13)$$

Полагая в (5.13)

$$2k\beta\delta + o(\delta) = \lambda(\delta)\cdot\delta,$$

получим из (5.3), (5.4) и из условия A, что $\lambda(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ равномерно по γ из $\Gamma_{a,b}$; отсюда и из (5.10), (5.13) вытекает справедливость (5.1), (5.2).

Допустим теперь, что на некотором промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ найдется точка t_* такая, что $\gamma[t_*] \overline{\in} \Gamma_{a,b}$.

Оценим в этом случае величину $\Delta\varepsilon^\circ = \varepsilon^\circ[\tau_{k+1}] - \varepsilon^\circ[\tau_k]$. Поскольку здесь рассматривается оценка величины $\Delta\varepsilon^\circ$ лишь сверху, то будем опять предполагать, что $\vartheta_k = \vartheta_{k+1} = \vartheta$.

Для определения искомой оценки воспользуемся соотношением (5.3) из которого можно получить, что

$$G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]}[y[\tau_k], \tau_k, \vartheta] \subset G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_k]+\Delta\varepsilon}[y[\tau_{k+1}], \tau_{k+1}, \vartheta] \qquad (\Delta\varepsilon \leqslant \zeta(\delta))$$

Из (5.12) вытекает, что в рассматриваемом случае

$$\Delta\varepsilon^\circ = \varepsilon^\circ[\tau_{k+1}] - \varepsilon^\circ[\tau_k] \leqslant \zeta(\delta) \qquad (5.14)$$

Сформулируем теперь последнее вспомогательное утверждение.

Область достижимости $G_1[y, \tau, \vartheta]$ принадлежит некоторой сфере S_ρ радиуса ρ, причем

$$\rho(a) \to 0 \quad \text{при } a = \vartheta - \tau \to 0 \qquad (5.15)$$

монотонно и равномерно по всем $\{y, \tau, \vartheta\}$ из любой ограниченной области

Справедливость этого утверждения вытекает из вида системы (1.1) и характера ограничений (1.3).

Покажем, наконец, как по заданному числу $\eta > 0$ определить такое $\delta^\circ > 0$, чтобы имело место (2.2). Выберем числа $a > 0$, $b > 0$ так, чтобы)

$$2b + \rho(a) \leqslant {}^1/_4\,\eta \qquad (5.16)$$

Это всегда возможно в силу (5.15). Числа a и b в свою очередь определят область $\Gamma_{a,b}$.

Предположим теперь, что τ_* — момент времени, когда впервые нарушается неравенство $\vartheta_i - \tau \geqslant a$ $(\tau_i \leqslant \tau < \tau_{i+1})$. (Заметим, что по построению чисел ϑ_i такой момент обязательно наступит.) Возможны два случая

$$(1)\ \varepsilon^\circ[y[\tau_*], z[\tau_*], \tau_*, \vartheta_i] = \varepsilon^\circ[\tau_*] < b$$

$$(2)\ \varepsilon^\circ[y[\tau_*], z[\tau_*], \tau_*, \vartheta_i] = \varepsilon^\circ[\tau_*] \geqslant b$$

Рассмотрим первый случай. По смыслу величины $\varepsilon^\circ[\tau_*]$

$$G_2[z[\tau_*], \tau_*, \vartheta_i] \subset G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_*]}[y[\tau_*], \tau_*, \vartheta_i] \qquad (5.17)$$

Причем, как отмечалось выше, область $G_1[y[\tau_*], \tau_*, \vartheta_i]$ принадлежит некоторой сфере радиуса $\rho(\vartheta_i - \tau_*) \leqslant \rho(a)$, поэтому область $G_1^{\varepsilon^\circ[\tau_*]}[y[\tau_*], \tau_*, \vartheta_i]$ лежит в сфере радиуса

$$r = \rho(a) + 2\varepsilon^\circ[\tau_*] < \rho(a) + 2b \leqslant {}^1/_4\,\eta$$

В силу (5.17) в момент времени ϑ_i при любом выборе управлений u и v $\{y[\vartheta_i]\}_m$ и $\{z[\vartheta_i]\}_m$ будут лежать внутри сферы радиуса $r \leqslant {}^1/_4\,\eta$; отсюда вытекает, что $\|\{y[\vartheta_i] - z[\vartheta_i]\}_m\| \leqslant 2\,\eta/4 = {}^1/_2\eta$; при этом в силу (3.1) $\vartheta_i \leqslant \vartheta^\circ$, таким образом в первом случае имеет место (2.5).

Рассмотрим второй случай. Пусть τ_{**} — последний момент времени, когда $\varepsilon^\circ[y[\tau], z[\tau], \tau, \vartheta_j] = b$, $\tau_j \leqslant \tau < \tau_{j+1}$. Из (5.14) получим, что

$$\varepsilon^\circ[\tau_{j+1}] \leqslant b + \zeta(\delta)$$

при этом, начиная с момента τ_{**} до τ_*, вектор $\gamma[t] \in \Gamma_{a,b}$; следовательно, начиная с момента τ_{j+1} до момента τ_* можно использовать оценки (5.1), (5.2); отсюда с учетом неравенства $\tau_* - \tau_{j+1} \leqslant \vartheta^\circ - t^\circ$ получим

$$\varepsilon^\circ[\tau_*] \leqslant b + \zeta[\delta] + \lambda(\delta)(\vartheta^\circ - t_0)$$

Так же как и в первом случае, отсюда вытекает, что точки $\{y[\vartheta_i]\}_m$ и $\{z[\vartheta_i]\}_m$ лежат в сфере радиуса

$$r = \rho(a) + 2\varepsilon^\circ[\tau_*] \leqslant \rho(a) + 2b + 2(\zeta(\delta) + \lambda(\delta)(\vartheta^\circ - t_0))$$

В силу (5.2), (5.3) можно указать такое $\delta^\circ > 0$, что

$$2(\zeta(\delta) + \lambda(\delta)(\vartheta^\circ - t_0)) \leqslant {}^1/_4\eta \quad \text{при } 0 < \delta \leqslant \delta^\circ$$

При таком выборе числа δ° имеем $r \leqslant {}^1/_2\eta$, поэтому

$$\|\{y[\vartheta_i] - z[\vartheta_i]\}_m\| \leqslant \eta \qquad (\vartheta_i \leqslant \vartheta^\circ)$$

Следовательно, теорема 2.1 доказана.

6. При доказательстве теоремы 2.1 было показано, что управление $u_\delta{}^*$ вида (1.6), построение которого описано в п.3, обеспечивает выполнение соотношений (5.1), (5.2). Это управление на каждом шаге $[\tau_k, \tau_{k+1})$ $(k = 0, 1,\ldots)$ является некоторой вектор-функцией времени. Покажем теперь, что среди управлений u_δ вида

$$u_\delta = u_\delta[y[\tau_k], z[\tau_k], \tau_k, \vartheta_k] \tag{6.1}$$

т. е. управлений, постоянных на каждом полуинтервале $[\tau_k, \tau_{k+1})$, существует допустимое управление $u_\delta{}^\circ$, определяемое равенством

$$u_\delta{}^\circ = \frac{1}{\delta}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} u_\delta{}^*[t, y[\tau_k], z[\tau_k], \tau_k, \vartheta_k]\, dt \tag{6.2}$$

которое также обеспечивает выполнение соотношений (5.1), (5.2).

Для этого, используя формулу Коши, получим неравенство

$$\|y^*[\tau_{k+1}] - y^\circ[\tau_{k+1}]\| \leqslant \sigma(\delta)\cdot\delta \tag{6.3}$$

где $y^*[\tau_{k+1}]$, $y^\circ[\tau_{k+1}]$ — состояния системы (1.1), в которые переводят ее управления $u_\delta{}^*$ и $u_\delta{}^\circ$, соответственно, из состояния $y = y[\tau_k]$, а $\sigma(\delta)$ удовлетворяет условию

$$\sigma(\delta) \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0 \tag{6.4}$$

равномерно в каждой области $\Gamma_{a,b}$.

Из (6.3), (6.4) нетрудно получить, что при $u = u_\delta{}^\circ$ и при любом $v \in V$ имеют место соотношения (5.1), (5.2). Так же как и при доказательстве еоремы 2.1, затем можно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема. 6.1. Если выполнено условие A, то управление $u_\delta{}^\circ$ вида (6.1) обеспечивает сближение движений $y[t]$ и $z[t]$ не позже, чем в момент времени $t = \vartheta^\circ$.

В качестве примера рассмотрим задачу о встрече двух материальных точек единичной массы M_1 и M_2, движущихся в вертикальной плоскости. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$y_1{}^\cdot = y_3, \quad y_2{}^\cdot = y_4, \quad y_3{}^\cdot = u_1, \quad y_4{}^\cdot = u_2 - g \tag{6.5}$$

$$z_1{}^\cdot = z_2, \quad z_2{}^\cdot = z_4, \quad z_3{}^\cdot = v_1, \quad z_4{}^\cdot = v_2 - g \tag{6.6}$$

где y_1, y_2 и z_1, z_2 — координаты преследующей и преследуемой точек, соответственно; y_3, y_4 и z_3, z_4 — компоненты скоростей преследующего и преследуемого объектов; g— ускорение силы тяжести; управления $u = \{u_1, u_2\}$ и $v = \{v_1, v_2\}$ стеснены ограничениями вида

$$u_1{}^2 + u_2{}^2 \leqslant \mu^2, \qquad v_1{}^2 + v_2{}^2 \leqslant \nu^2, \qquad \mu > \nu \tag{6.7}$$

Под встречей объектов (6.5), (6.6) будем понимать совпадение координат точек M_1 и M_2.

Областями достижимости $G_1[y, \tau, \vartheta]$ и $G_2[z, \tau, \vartheta]$, построенными в плоскости g_1, g_2, будут круги

$$[g_1 - (y_1 + Ty_3)]^2 + [g_2 - (y_2 + Ty_4 - {}^1/_2 gT^2)]^2 \leqslant R^2 \qquad (6.8)$$

$$[g_1 - (z_1 + Tz_3)]^2 + [g_2 - (z_2 + Tz_4 - {}^1/_2 gT^2]^2 \leqslant r^2 \qquad (6.9)$$

радиусы которых $R = {}^1/_2 \mu T^2$ и $r = {}^1/_2 \nu T^2$, где $T = \vartheta - \tau$. Из (6.8), (6.9) нетрудно получить для определения момента поглощения $\vartheta^\circ[y, z, \tau]$ следующее уравнение

$$^1/_4 (\mu - \nu)^2 (\vartheta - \tau)^4 - [x_1 + x_3 (\vartheta - \tau)]^2 - [x_2 + x_4 (\vartheta - \tau)]^2 = 0 \qquad (6.10)$$

$$x_i = y_i - z_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Величина $\vartheta^\circ[y,z,\tau]$ будет наименьшим положительным корнем этого уравнения.

Так как $R > r$ при $\mu > \nu$ и $T = \vartheta - \tau > 0$, то границы областей $G_1^{\varepsilon^\circ}$ и G_2 всегда касаются в единственной точке q^0, поэтому условие A в рассматриваемом примере выполняется.

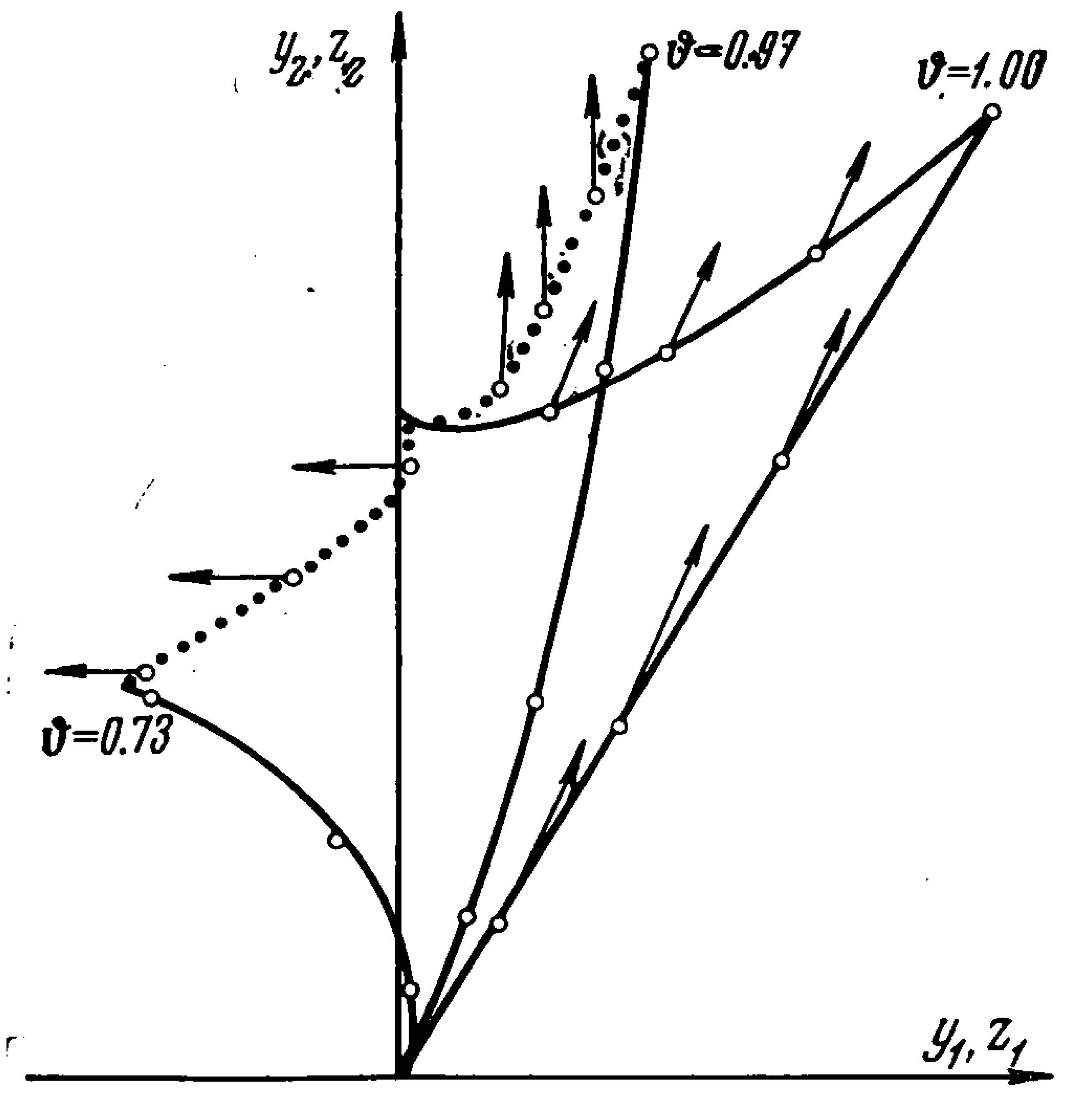
На фиг. 4 представлены некоторые реализации процесса преследования при $\mu = 60$, $\nu = 60-10\sqrt{5}$, $g = 10$, смоделированные на ЭЦВМ. В исходный момент $t_0 = 0$ объекты находились в состоянии

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0$$

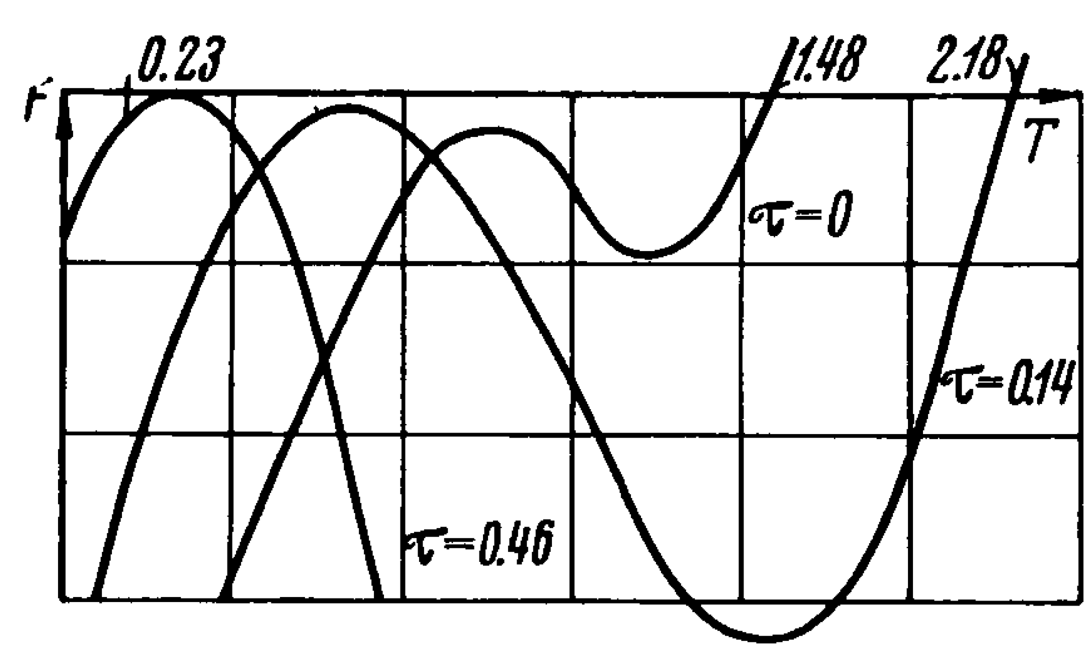
$$z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 15, \quad z_3(0) = 5, \quad z_4(0) = -5$$

Сплошными линиями на фиг. 4 изображены траектории объектов (6.5), (6.6) в случае использования преследователем управления $\overset{\circ}{u}_\delta$ и преследуемым — экстремального управления v_e, т. е. управления, прицеливающего на каждом шаге движение системы (6.6) в точку касания границ областей достижимости. Встреча в этом случае происходит в момент $t = \vartheta^\circ[t_0] = 1$.

Пунктирными линиями изображены траектории преследуемого объекта для случая, когда преследователь использует управление $u_\delta{}^\circ$, а преследуемый отклоняется от экстремальной стратегии. Так траекториям, идущим вверх, отвечает случай, когда преследуемый все время в процессе движения направляет силу v, величиной ν в сторону от преследователя, встреча в этом случае происходит в момент $t = 0{,}97 < \vartheta^\circ[t_0] = 1$. Траектории, идущие влево, реализуются, когда преследуемый выбирает $v = \{-\nu, 0\}$ все время в процессе движения. Встреча здесь происходит при $t = 0{,}73 < \vartheta^\circ[t_0] = 1$.



Фиг. 4



Фиг 5

В рассмотренных реализациях процесса преследования на каждом шаге выполнялось неравенство $\vartheta_k \leqslant \vartheta_{k-1}$, поэтому управление $\overset{\circ}{u}_\delta$ здесь совпадало с экстремальным управлением.

Заметим, что для рассматриваемого примера $T^\circ = \vartheta^\circ[t_0] - t_0$ является минимаксом времени до встречи движений, а экстремальное управление u_e решает задачу о минимаксе времени до встречи движений $y[t]$ и $z[t]$, однако пара экстремальных управлений u_e, v_e не доставляет седловую точку игры, как показывает пример.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$

$$y_1(0) = -3/2\sqrt{2}, \quad y_2(0) = {}^1/_2\sqrt{2}, \quad y_3(0) = \sqrt{2}, \quad y_4(0) = 0.1 / 8\sqrt{2}$$

$$z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = z_4(0) = 0$$

Полагаем $\mu = 1.5$, $\nu = 0.5$, $g = 0$. На фиг. 5 представлены графики кривых

$$F = F(\tau, T) = {}^1/_4(\mu - \nu)^2 T^4 - \{x_1[\tau] + Tx_3[\tau]\}^2 - \{x_2[\tau] + Tx_4[\tau]\}^2$$

для различных значений τ при $v = v_e$ и $u = \{0, -\mu\}$, которое не является экстремальным.

Из процесса деформации кривой $F = F(\tau, T)$ видно, что с момента времени $\tau = t_0 = 0$ до момента $\tau_* = 0.46$ наименьший положительный корень уравнения (6.10) возрастает, однако в момент времени $\tau_* = 0.46$ появляется новый корень уравнения (6.10) $T = \vartheta - \tau = 0.23$; если, начиная с этого момента, преследователь перейдет на экстремальное управление, то при любом допустимом выборе управления $v[t]$ при $t \geqslant \tau_*$ он обеспечит встречу движений не позже, чем к моменту $\vartheta = 0.46 + 0.23 = 0.69$, т. е. гораздо раньше, чем в момент $\vartheta^\circ[t_0] = 1.48$.

Таким образом, показано, что в рассматриваемом случае неравенство $T_{u, v_e} \geqslant T_{u_e, v_e}$ неверно, следовательно, пара u_e, v_e не доставляет седловую точку данной игры.

Вычисления для данного примера были выполнены Л. М. Куперман и В. Е. Третьяковым, которых авторы благодарят.

Поступила 8 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Красовский Н. Н., Репин Ю. М., Третьяков В. Е. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1965, № 4.
3. Красовский Н. Н. К задаче об игровой встрече движений. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 3.
4. Красовский Н. Н. Об одной особенности игровой встречи движений. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 5.
5. Красовский Н. Н. Регуляризация задачи о встрече движений. Докл. АН СССР, 1968, т. 179, № 2.
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
7. Петросян Л. А., Мурзов Н. В. Динамическая игра преследования. Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 6.
8. Пожарицкий Г. К. Импульсные преследования в случае линейных однотипных объектов второго порядка. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
9. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. Усп. матем. наук, 1966, т. 21, вып. 4.
10. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх, 1. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6.
11. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх, 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
12. Пшеничный Б. Н. О задаче преследования. Кибернетика, 1967, № 6.