Прикладная математика и механика. Том 32, 1968

КОЛЕБАНИЯ В АВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМАМ ЛЯПУНОВА

А. Ф. Клеймёнов

(Свердловск)

Для нелинейной автономной системы, близкой к системе Ляпунова и содержащей запаздывание в малых добавках, доказывается теорема существования периодического решения и дается практический способ его построения.

Уравнениями типа (1.1) описываются механические системы при наличии в них материалов с существенно нелинейной упругой характеристикой (пластмасса, резина) [2], нелинейные демпферы с неупругой восстанавливающей силой, а также системы с задержкой в цепи обратной связи (устройства типа локатора [3] и др.)

Для автономной системы без запаздывания, близкой к консервативной, Л. С. Понтрягиным доказана теорема существования периодического решения [4].

В предлагаемой статье методом вспомогательных систем С. Н. Шиманова [5,6] исследуются существование и построение периодических решений уравнений (1.1).

1. Рассматривается система, описываемая дифференциальными уравнениями с запаздыванием вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mu\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau), \mu) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x} = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{X} = \left\| \begin{matrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{F} = \left\| \begin{matrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{matrix} \right\|, \quad A = \left\| \begin{matrix} 0 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

Здесь λ, a_{ij} — постоянные, X_k — аналитические функции переменных $x_1,\ldots, x_n$ в окрестности точки $x_1 = \ldots = x_n = 0$, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка; функции F_k аналитичны по отношению к переменным $x_1(t),\ldots, x_n(t)$, $x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)$, в некоторой окрестности начала координат, а также по отношению к малому параметру μ в окрестности точки $\mu = 0$; τ — постоянное запаздывание.

Предполагается, что порождающая система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

будет системой Ляпунова, т. е. выполнены следующие условия [1]:

а) характеристическое уравнение $|a_{ij} - \rho\delta_{ij}| = 0$ не имеет нулевых корней и корней вида $N\lambda\sqrt{-1}$ (N — целое число);

б) система (1.2) допускает первый интеграл вида

$$H = x_1^2 + x_2^2 + W(x_3,\ldots, x_n) + S(x_1,\ldots, x_n) = \mathrm{const} \tag{1.3}$$

Здесь W — квадратичная форма переменных $x_3, \ldots, x_n$, а S — аналитическая функция переменных $x_1, \ldots, x_n$, разложение которой начинается членами не ниже третьего порядка.

Здесь и в дальнейшем точки между векторами $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ обозначают скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$: производная $dH/d\mathbf{x}^\circ$ вычисляется для порождающего решения (2.1).

2. Известно [1], что система (1.2) при сделанных предположениях допускает периодическое решение, зависящее от двух произвольных постоянных c, η

$$\begin{aligned}
&x_1^\circ(t+\eta, c) = c\cos\omega + c^2 x_{12}(\omega) + \ldots \\
&x_2^\circ(t+\eta, c) = c\sin\omega + c^2 x_{22}(\omega) + \ldots \\
&x_s^\circ(t+\eta, c) = c x_{s1}(\omega) + c^2 x_{s2}(\omega) + \ldots \qquad (s = 3, \ldots, n) \\
&\omega = \lambda(t+\eta)\,[1 + h(c)]^{-1}, \qquad h(c) = h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $x_{ij}(\omega)$ — периодические функции ω периода 2π, удовлетворяющие условиям $x_{1j}(0) = x_{2j}(0) = 0$ $(j \geqslant 2)$, а $h_2, h_3, \ldots$ — некоторые постоянные, из которых первая отличная от нуля имеет четный индекс. Ряды (2.1) сходятся при всех значениях η и при значениях c из некоторой окрестности G точки $c = 0$. Период решения (2.1) определяется формулой

$$T = 2\pi/\lambda\,[1 + h(c)] \tag{2.2}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы система (1.1) допускала периодическое решение, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее, принадлежащее семейству (2.1), необходимо, чтобы параметр c удовлетворял уравнению

$$R(c) = \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{x}^\circ(t),\ \mathbf{x}^\circ(t-\tau),\ 0) \cdot \frac{dH}{d\mathbf{x}^\circ}\, dt = 0 \tag{2.3}$$

Всякому простому корню $c = c_1$ уравнения (2.3), т. е. когда выполнено условие

$$(dR/dc)_{c=c_1} \neq 0 \tag{2.4}$$

соответствует одно и только одно периодическое решение системы (1.1), аналитическое относительно μ в окрестности точки $\mu = 0$. Период этого решения будет также аналитической функцией μ.

Доказательство. Обозначим через $T(1 + \mu\alpha)$ период искомого периодического решения, причем величина α, вообще говоря, отлична от нуля. В системе (1.1) сделаем замену времени $t = t_1(1 + \mu\alpha)$, после чего она примет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt_1} = [A\mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mu\mathbf{F}(\mathbf{x}(t_1),\ \mathbf{x}(t_1 - \tau_1),\ \mu)]\,(1 + \mu\alpha) \qquad (\tau = \tau_1(1 + \mu\alpha)) \tag{2.5}$$

Задача сводится к отысканию периодических решений системы (2.5) периода T. Сделав в системе (2.5) замену

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^\circ(t_1, c) + \mu\mathbf{z}(t_1)$$

получим следующую систему относительно z:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt_1} = (A + P)\,\mathbf{z} + \mathbf{F}^\circ + \alpha\frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_1} + \mu\boldsymbol{\Phi}(t_1,\ \mathbf{z}(t_1),\ \mathbf{z}(t_1 - \tau_1),\ \mu) \tag{2.6}$$

где

$$P = \|p_{ij}\| = \left\|\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)_0\right\|, \qquad \mathbf{F}^\circ = \mathbf{F}(\mathbf{x}^\circ(t_1),\ \mathbf{x}^\circ(t_1 - \tau_1),\ 0) \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{2}Q(\mathbf{z})\,\mathbf{z} + \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{z} + \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}(t_1 - \tau_1)}\right)_0 \mathbf{z}(t_1 - \tau_1) + \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mu}\right)_0 +$$

$$+\, \alpha[(A + P)\,\mathbf{z} + \mathbf{F}^\circ] + \mu[\ldots], \qquad Q(\mathbf{z}) = \|q_{ij}\| = \left\|\left(\frac{d}{d\mathbf{x}}\left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right]\right)_0 \cdot \mathbf{z}\right\|$$

Скобки $(\ldots)_0$ обозначают, что после дифференцирования произведена подстановка порождающего решения. Для того чтобы система (2.6) допускала периодическое решение периода T, необходимо, чтобы выполнялось условие существования периодического решения для системы, получающейся из (2.6) при $\mu = 0$. Это условие имеет вид [1]:

$$\int_0^T \left(\mathbf{F}^\circ + \alpha \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt}\right) \cdot \boldsymbol{\Psi}\, dt = 0 \qquad \left(\boldsymbol{\Psi} = \frac{dH}{d\mathbf{x}^\circ}\right) \tag{2.8}$$

Здесь вектор-функция $\boldsymbol{\Psi}$ представляет собой единственное периодическое решение периода T системы, сопряженной с системой в вариациях для уравнений (1.2). Учитывая, что

$$\int_0^T \alpha \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_1} \cdot \frac{dH}{d\mathbf{x}^\circ}\, dt_1 = \alpha \int_0^T \frac{dH}{dt_1}\, dt_1 \equiv 0$$

получим необходимость условия (2.3).

Предположим, что выбором $c = c_1$ условие (2.3) выполнено и что точка $c = c_1$ находится в области G сходимости рядов (2.1). Покажем, что если выполнено условие (2.4), то существует единственное периодическое решение системы (2.6). Наряду с системой (2.6) рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt_1} = (A + P)\,\mathbf{u} + \mathbf{F}^\circ + \alpha \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt} + \mu\boldsymbol{\Phi} + W\varphi \qquad \varphi = \left(\frac{d\mathbf{x}^\circ}{dc} + \frac{t_1}{T}\frac{dT}{dc}\frac{d\mathbf{x}^\circ}{d\eta}\right)_{c=c_1} \tag{2.9}$$

Здесь постоянная W определяется соотношением

$$W = -\frac{\mu}{T}\int_0^T \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{\Psi}\, dt_1 \tag{2.10}$$

Периодическое решение вспомогательной системы (2.9), (2.10) находим методом последовательных приближений. В качестве первого приближения принимаем

$$\mathbf{u}^{(1)} = (dx^\circ / dt_1)_{c=c_1}, \quad W^{(1)} = 0$$

Приближение нумера m определяется из системы

$$\frac{d\mathbf{u}^{(m)}}{dt_1} = (A + P)\,\mathbf{u}^{(m)} + \mathbf{F}^\circ + \alpha \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_1} + \mu\boldsymbol{\Phi}^{(m-1)} + W^{(m)}\varphi \tag{2.11}$$

$$W^{(m)} = -\frac{\mu}{T}\int_0^T \boldsymbol{\Phi}^{(m-1)}\boldsymbol{\Psi}\, dt_1, \qquad \boldsymbol{\Phi}^{(m-1)} = \boldsymbol{\Phi}\,(t_1, \mathbf{u}^{(m-1)}(t_1), \mathbf{u}^{(m-1)}(t_1 - \tau_1), \mu)$$

Периодическое решение системы (2.11) находим в виде

$$\mathbf{u}^{(m)} = M^{(m)}\left(\frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_1}\right)_{c=c_1} + \mathbf{L}\left(t_1, \mathbf{F}^\circ + \alpha\frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_1}\right) + \mathbf{L}\,(t_1, \mu\boldsymbol{\Phi}^{(m-1)} + W^{(m)}\varphi)$$

Здесь оператор $\mathbf{L}$ удовлетворяет тем же условиям, что и в работе [1] (стр. 110). Исходная система автономна, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $u_2(0) = 0$. Тогда постоянные $M^{(m)}$ однозначно определятся из условия $u_2^{(m)}(0) = 0$, поскольку $\varphi_2(0) \neq 0$. При сделанных предположениях о правых частях уравнений (1.1) можно показать (например, как в [5]), что при достаточно малом $|\mu|$ последовательности $\mathbf{u}^{(m)}, W^{(m)}$ равномерно сходятся к вектор-функции $\mathbf{u}^*(t_1, \alpha, \mu)$ и к функции $W^*(\alpha, \mu)$.

Для того чтобы система (2.6) имела периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$W^*(\alpha, \mu) = -\frac{\mu}{T}\int_0^T \boldsymbol{\Phi}\,(t_1, \mathbf{u}^*(t_1), \mathbf{u}^*(t_1 - \tau_1), \mu) \cdot \boldsymbol{\Psi}\, dt_1 = 0 \tag{2.12}$$

Учитывая вид вектор-функции Φ (2.7), уравнение (2.12) может быть представлено в виде

$$W^* (\alpha, \mu) = -(\mu/T)\,[A_1 \alpha^2 + B\alpha + C + \mu\,(..)] = 0 \tag{2.13}$$

Здесь

$$A_1 = \int_0^T \left(\frac{1}{2} Q\,(\mathbf{u}')\,\mathbf{u}' + (A+P)\,\mathbf{u}'\right) \cdot \Psi\, dt_1$$

$$B = \int_0^T \left[Q\,(\mathbf{u}')\,\mathbf{u}'' + \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{u}' + \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}\,(t_1-\tau_1)}\right)_0 \mathbf{u}'\,(t_1-\tau_1) + (A+P)\,\mathbf{u}'' + \mathbf{F}^\circ\right] \cdot \Psi\, dt_1$$

$$C = \int_0^T \left[\frac{1}{2} Q\,(\mathbf{u}'')\,\mathbf{u}'' + \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}}\right)_0 \mathbf{u}'' + \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}\,(t_1-\tau_1)}\right)_0 \mathbf{u}''\,(t_1-\tau_1) + \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mu}\right)_0\right] \cdot \Psi\, dt_1$$

Здесь вектор-функции $\mathbf{u}'$, $\mathbf{u}''$ представляют собою периодические решения следующих систем, соответственно

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt_1} = (A+P)\,\mathbf{x} + \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_1}, \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt_1} = (A+P)\,\mathbf{x} + \mathbf{F}^\circ \tag{2.14}$$

При этом из общей теории известно [1], что

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{\beta}\frac{d\mathbf{x}^\circ}{dc} + t_1 \frac{d\mathbf{x}^\circ}{d\eta} \qquad \left(\beta = [1 + h\,(c)]\,\frac{dh\,(c)}{dc}\right) \tag{2.15}$$

Несложными, но довольно громоздкими выкладками можно показать, что

$$A_1 = 0, \qquad B = \frac{1}{\beta}\frac{dR}{dc}$$

Тогда на основании теоремы о неявных функциях уравнение (2.13) при выполнении условия (2.4) однозначно разрешимо относительно α, причем α будет аналитической функцией $\alpha = \alpha^* (\mu)$ в окрестности точки $\mu = 0$. Тем самым период искомого периодического решения определяется однозначно. Периодическое решение исходной системы (1.1) представляется в виде

$$\mathbf{x}\,(t_1) = \mathbf{x}^\circ\,(t_1 + \eta,\ c_1) + \mu \mathbf{u}^*\,(t_1,\ \alpha^*\,(\mu),\ \mu)$$

и будет аналитической функцией μ в окрестности точки $\mu = 0$. Теорема доказана.

3. Укажем теперь практический способ построения [периодического решения системы (1.1). В системе (1.1) сделаем замену времени

$$t = t_1\,(1 + \mu\alpha), \qquad \alpha = \alpha_1 + \mu\alpha_2 + \mu^2\alpha_3 + \ldots$$

и будем искать периодическое решение формально в виде рядов]

$$\mathbf{x}\,(t_1,\ \mu) = \mathbf{x}^\circ\,(t_1,\ c) + \mu \mathbf{x}_1\,(t_1) + \mu^2\,\mathbf{x}_2\,(t_1) + \ldots \tag{3.1}$$

с неизвестными периодическими коэффициентами $\mathbf{x}_i\,(t_1)$ периода T.

Эти периодические коэффициенты удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt_1} = (A+P)\,\mathbf{x}_i + \mathbf{F}^{(i)} + \alpha_i \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_1} \tag{3.2}$$

где вектор -функции $\mathbf{F}^{(i)}$ периодичны по t_1 с периодом T и являются целыми рациональными функциями относительно $\mathbf{x}\,(t_1)$ $\mathbf{x}\,(t_1 - \tau_1)$.

Периодические решения систем (3.2) можно искать, применяя метод вспомогательных систем непосредственно к системам (3.2), как это делалось при доказательстве теоремы существования. Однако представляется более простым и удобным для практики следующий способ.

В системе (3.2) сделаем замену времени $t_1 = t_2\,[1 + h(c)]$, где $h(c)$ определена в (2.1). Система примет вид

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt_2} = [(A + P)\,\mathbf{x}_i + \mathbf{F}^{(i)}]\,[1 + h(c)] + \alpha_i \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_2} \tag{3.3}$$

где вектор-функции $\mathbf{F}^{(i)}$ периодичны по t_2 с периодом $2\pi/\lambda$.

Рассмотрим систему (3.3) при $i = 1$

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt_2} = [(A + P)\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{F}^\circ]\,[1 + h(c)] + \alpha_i \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_2} \tag{3.4}$$

Вектор-функция $\mathbf{F}^\circ$ определена в (2.7). Наряду с системой (3.4) рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{d\mathbf{u}_1}{dt_2} = [(A + P)\,\mathbf{u}_1 + \mathbf{F}^\circ]\,[1 + h(c)] + \alpha_1 \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_2} + W_{11}\Omega_1 + W_{21}\Omega_2 \tag{3.5}$$

$$W_{k1} = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi/\lambda}\left[(P\mathbf{u}_1 + \mathbf{F}^\circ)\,[1 + h(c)] + A\mathbf{u}_1 h(c) + \alpha_1 \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_2}\right]\Omega_k\,dt_2$$

$$\mathbf{u}_1 = \left\|\begin{matrix}\mathbf{u}_{11}\\ \cdots\\ \mathbf{u}_{1n}\end{matrix}\right\|, \qquad \Omega_1 = \left\|\begin{matrix}\cos\lambda t_2\\ \sin\lambda t_2\\ 0\\ \cdots\cdots\\ 0\end{matrix}\right\|, \qquad \Omega_2 = \left\|\begin{matrix}\sin\lambda t_2\\ -\cos\lambda t_2\\ 0\\ \cdots\cdots\\ 0\end{matrix}\right\| \qquad (k = 1,\ 2)$$

Периодическое решение вспомогательной системы (3.5) ищем в виде рядов

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{\gamma=0}^{\infty} u_1^{(\gamma)} c^\gamma, \qquad W_{k1} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} W_{k1}^{(\gamma)} c^\gamma \qquad (k = 1,\ 2)$$

где $\mathbf{u}_1^{(\gamma)}$ — неизвестные периодические вектор-функции t_2 периода $2\pi/\lambda$, $W_{l1}^{(\gamma)}$ — неизвестные постоянные. Как уже отмечалось, при подсчете периодического решения, не ограничивая общности, можно положить $u_{12}(0) = 0$. Поэтому в качестве начальных условий примем

$$u_{11}^{(0)}(0) = \beta_1, \quad u_{12}^{(0)}(0) = 0, \quad u_{11}^{(\gamma)}(0) = u_{12}^{(\gamma)}(0) = 0 \quad (\gamma \geqslant 1) \tag{3.6}$$

Здесь β_1 — постоянная, подлежащая определению.

Периодическое решение системы (3.5) с начальными условиями (3.6) всегда существует и может быть вычислено с любой степенью точности. Вследствие линейности систем (3.5) постоянные W_{l1} имеют вид

$$W_{k1} = cE_k(c)\,\beta_1 + \alpha_1 V_k(c) + H_k^{(1)}(c) \qquad (k = 1,2) \tag{3.7}$$

Здесь E_k, V_k, H_k — аналитические функции c, причем хотя бы одна из функций $E_1(c)$, $E_2(c)$ не обращается тождественно в нуль.

Необходимым и достаточным условием существования периодического решения системы (3.4) является выполнение соотношений

$$W_{11} = 0, \quad W_{21} = 0 \tag{3.8}$$

Условие совместности системы (3.8) можно представить в виде

$$R_1(c) = c\,E_1(c)W_{21} - cE_2(c)W_{11} = 0 \tag{3.9}$$

Условие (3.9) есть не что иное, как условие (2.3), но записанное в другой форме, так как последнее также представляет собой условие существования периодического решения системы (3.4). Так как уравнение (2.3) не содержит α_1, то выполняется со отношение

$$S(c) = c\,E_1(c)\,V_2(c) - cE_2(c)\,V_1(c) \equiv 0 \tag{3.10}$$

В дальнейшем предполагаем, что условие (3.9) выбором $c = c_1$ выполнено. Из системы (3.8) находим $\beta_1 = \beta_1^* (\alpha_1, c)$. Очевидно, что $\beta_1^* (\alpha_1, c)$ будет аналитической функцией c в окрестности точки $c = 0$ с полюсом некоторого порядка в этой точке и линейной функцией α_1.

Периодическое решение системы (3.4) можно представить в виде

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}_1 (t_2, \beta_1^*(\alpha_1, c), \alpha_1, c) + M_1 \varphi^* (t_2, c) \tag{3.11}$$

где $\varphi^* = (dx^\circ / dt_1)_{c=c_1}$. Из условия $x_{21}(0) = 0$ определяем $M_1 = 0$.

Предположим теперь, что вектор-функции $\mathbf{x}_j$ $(j \leqslant m - 1)$ вычислены и являются аналитическими в окрестности точки $c = 0$ с полюсами в этой точке. Пусть величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-2}$ найдены однозначно и являются аналитическими функциями в точке $c = 0$ с полюсами в этой точке.

Рассмотрим систему (3.3) при $i = m$

$$\frac{d\mathbf{x}_m}{dt_2} = [(A + P)\mathbf{x}_m + \mathbf{F}^{(m)}] [1 + h(c)] + \alpha_m \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_2} \tag{3.12}$$

Здесь $\mathbf{F}^{(m)}$ — известные периодические вектор-функции t_2, аналитические по c в окрестности точки $c = 0$ с полюсами в этой точке, линейные относительно α_{m-1} (последнее очевидно для $m > 2$; легко показать, что и при $m = 2 \mathbf{F}^{(2)}$ будет линейной вектор-функцией α_1). В $\mathbf{F}^{(m)}$ выделим члены, содержащие множителем α_{m-1}

$$\mathbf{F}^{(m)} = \alpha_{m-1} \left[\frac{1}{\beta} Q(\mathbf{x}_1) \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dc} + \frac{1}{\beta}\left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}}\right)_0 \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dc} + \frac{1}{\beta}\left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}(t_2 - \tau_2)}\right)_0 \frac{d\mathbf{x}^\circ(t_2 - \tau_2)}{dc} + \right.$$
$$\left. + \alpha_1 \frac{1}{\beta}(A + P)\frac{d\mathbf{x}^\circ}{dc} + (A + P)\mathbf{x}_1 + \mathbf{F}^\circ\right] + G^{(m)} \tag{3.13}$$

где Q определена в (2.7), а $G^{(m)}$ не содержит α_{m-1}. Выражение (3.13) перепишем так:

$$\mathbf{F}^{(m)} = \alpha_{m-1} \left[\frac{1}{\beta}\frac{dP}{dc}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{\beta}\frac{d\mathbf{F}}{dc} + \alpha_1 \frac{1}{\beta}(A + P)\frac{d\mathbf{x}^\circ}{dc} + (A + P)\mathbf{x}_1 + \mathbf{F}^\circ\right] + G^{(m)} \tag{3.14}$$

Наряду с системой (3.12) рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{d\mathbf{u}_m}{dt_2} = [(A + P)\mathbf{u}_m + \mathbf{F}^{(m)}] [1 + h(c)] + \alpha_m \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_2} + W_{1m}\Omega_1 + W_{2m}\Omega_2 \tag{3.15}$$

$$W_{km} = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi/\lambda} \left[(P\mathbf{u}_m + \mathbf{F}^{(m)}) [1 + h(c)] + A\mathbf{u}_m h(c) + \alpha_m \frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_2}\right] \cdot \Omega_k \, dt_2 \qquad (k = 1, 2)$$

Задав начальные условия $u_{m1}(0) = \beta_m$, $u_{m2}(0) = 0$, найдем периодическое решение $\mathbf{u}_m (t_2, \beta_m, \alpha_m, c)$ системы (3.15) и постоянные W_{km} в виде рядов

$$\mathbf{u}_m (t_2, c) = \sum_{\gamma=-d}^{\infty} \mathbf{u}_m^{(\gamma)}(t_2) c^\gamma, \qquad W_{km}(c) = \sum_{\gamma=-d}^{\infty} W_{km}^{(\gamma)} c^\gamma$$

где d — наибольший порядок полюса в разложениях Лорана вектор-функций $\mathbf{F}^{(m)}$. Необходимое и достаточное условие существования периодического решения системы (3.12) состоит в выполнении соотношений

$$W_{km} = cE_k(c)\beta_m + \alpha_1 V_k(c) + H_k^{(m)}(c) = 0 \tag{3.16}$$

Здесь $H_k^{(m)}(c)$ — аналитические функции c в окрестности точки $c=0$ с полюсами в этой точке. Условие совместности системы (3.16) будет аналогично условию (3.9)

$$c E_1(c) W_{2m} - c E_2(c) W_{1m} = 0 \tag{3.17}$$

В силу линейности $\mathbf{F}^{(m)}$ относительно α_{m-1} в выражениях W_{km} можно выделить члены, содержащие множителем α_{m-1}

$$W_{km} = W_{km}'\alpha_{m-1} + W_{km}'' \qquad (k = 1,2)$$

и, следовательно, условие (3.17) может быть представлено в виде

$$(cE_1W_{2m}' - cE_2W_{1m}')\,\alpha_{m-1} + (cE_1W_{2m}'' - cE_2W_{1m}'') = 0 \tag{3.18}$$

Очевидно уравнение (3.18) разрешимо относительно α_{m-1}, если

$$cE_1W_{2m}' - cE_2W_{1m}' \neq 0$$

Покажем, что имеет место тождество

$$\left(\frac{dR_1}{dc}\right)_{c=c_1} = [\beta\,(cE_1W_{2m}' - cE_2W_{1m}')]_{c=c_1} \tag{3.19}$$

где β определено в (2.15), а $R_1(c)$ в (3.9). Действительно,

$$\frac{dR_1}{dc} = cE_1(c)\,\frac{dW_{21}}{dc} - cE_2(c)\,\frac{dW_{11}}{dc} + \frac{d\,(cE_1(c))}{dc}\,W_{21} - \frac{d\,(cE_2(c))}{dc}\,W_{11}$$

Однако при $c = c_1$, $\beta_1 = \beta_1^*(c)$ имеем $W_{11} = W_{21} = 0$. Следовательно,

$$\left(\frac{dR_1}{dc}\right)_{c=c_1} = c_1E_1(c_1)\left(\frac{dW_{21}}{dc}\right)_{\substack{c=c_1\\ \beta_1=\beta_1^*}} - c_1E_2(c_1)\left(\frac{dW_{11}}{dc}\right)_{\substack{c=c_1\\ \beta_1=\beta_1^*}} \tag{3.20}$$

Далее, вектор-функция $\mathbf{u}_1^* = \mathbf{u}_1(t_2, \beta_1, \alpha_1, c)$ представляет собой периодическое ешение вспомогательной системы. Подставляя это решение в систему (3.5), получим тождества по c. Продифференцировав эти тождества по c, найдем

$$\frac{d}{dt_2}\left(\frac{d\mathbf{u}_1^*}{dc}\right) \equiv \left[(A+P)\frac{d\mathbf{u}_1^*}{dc}\right][1+h(c)] + \left[\frac{dP}{dc}\mathbf{u}_1^* + \frac{d\mathbf{F}^\circ}{dc}\right][1+h(c)] +$$
$$+ [(A+P)\,\mathbf{u}_1^* + \mathbf{F}^\circ]\,\frac{dh(c)}{dc} + \alpha_1\frac{d}{dc}\left(\frac{d\mathbf{x}^\circ}{dt_2}\right) + \frac{dW_{11}}{dc}\,\Omega_1 + \frac{dW_{21}}{dc}\,\Omega_2 \tag{3.21}$$

где тождества выполняются по всем c.

Сравнивая тождества (3.21) с системой (3.15) с учетом формулы (3.14) и принимая во внимание линейность системы (3.15) и соотношения (3.10), получим равенства

$$(W_{km}')_{c=c_1} = \left(\frac{1}{\beta}\,\frac{dW_{k1}}{dc}\right)_{\substack{c=c_1\\ \beta_1=\beta_1^*}}$$

которые при подстановке их в (3.20) дают (3.19).

Следовательно, при выполнении условия

$$\left(\frac{dR_1}{dc}\right)_{c=c_1} \neq 0 \tag{3.22}$$

уравнение (3.18) однозначно разрешимо относительно α_{m-1}, причем α_{m-1} будет аналитической функцией c в окрестности $c = 0$ с полюсом некоторого порядка в этой точке

Из системы (3.16) находим $\beta_m = \beta_m^*(\alpha_m, c)$. Периодическое решение системы (3.12) будет

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{u}_m\,(t_2, \beta_m^*(\alpha_m, c), \alpha_m, c)$$

причем $\mathbf{u}_m$ — аналитическая вектор-функция c в окрестности точки $c = 0$ с полюсами в этой точке и линейная относительно α_m.

Таким образом, при выполнении условий (3.9) и (3.22) находим единственную систему формальных рядов (3.1), удовлетворяющих системе (1.1). В силу доказанной в п. 2 теоремы существования и единственности сходимость этих рядов при достаточно малом $|\mu|$ следует из их единственности.

4. В качестве примера рассматривалось уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda^2x-\gamma x^3-\mu a\,[\lambda^2x\,(t-\tau)-\gamma x^3\,(t-\tau)]=0 \tag{4.1}$$

являющееся частным случаем уравнения, предложенного в [2]. Член с множителем μ характеризует пластичность материала с нелинейной упругой характеристикой.

Порождающее уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda^2x-\gamma x^3=0$$

имеет периодическое решение [1]

$$x^\circ=c\cos\omega+\frac{c^3\gamma}{32\lambda^2}(\cos\omega-\cos 3\omega)+\frac{c^5\gamma^2}{1024\lambda^4}(23\cos\omega-24\cos 3\omega+\cos 5\omega)+\ldots$$

$$\omega=\lambda\,(t+\eta)\left(1+\frac{3}{8}\frac{\gamma}{\lambda^2}c^2+\frac{57}{256}\frac{\gamma^2}{\lambda^4}c^4+\ldots\right)^{-1}$$

периода

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}(1+h_2c^2+h_4c^4+\ldots)=\frac{2\pi}{\lambda}\left(1+\frac{3}{8}\frac{\gamma}{\lambda^2}c^2+\frac{57}{256}\frac{\gamma^2}{\lambda^4}c^4+\ldots\right)$$

Будем искать решение уравнения (4.1) в виде

$$x=x^\circ(t_2,c)+\mu\,x_1(t_2,c)+\mu^2x_2(t_2,c)+\ldots$$

$$t=t_2\,(1+h_2c^2+\ldots)\,(1+\alpha_1\mu+\alpha_2\mu^2+\ldots)$$

где фукции $x_i\,(t_2,c)$ периодичны по t_2 периода $2\pi/\lambda$. Условие (3.9) для уравнения (4.1) будет иметь вид]

$$R_1(c)=-a\lambda^2\sin\lambda\tau_2c+{}^{23}/_{32}a\gamma\sin\lambda\tau_2c^3+\frac{-27a\sin 3\lambda\tau_2+25a\sin\lambda\tau_2}{1024}\frac{\gamma^2}{\lambda^4}c^5+\ldots=0$$

$$\tau_2=\tau\,(1+h_2c^2+\ldots)^{-1}\,(1+\alpha_1\mu+\ldots)^{-1}$$

Функция $x_1\,(t_2,c)$ получилась следующей:

$$x_1\doteq(2\alpha_1-a\cos\lambda\tau_2)\left[\frac{2\lambda^2}{3\gamma c}\cos\lambda t_2-\frac{23}{48}c\cos\lambda t_2-\frac{1}{16}c\cos 3\lambda t_2\right]+\ldots$$

При подсчете второго приближения получено уравнение для определения α_1

$$-{}^2/_3\,a\lambda^4\gamma^{-1}\,(2\alpha_1-a\cos\lambda\tau_2)\sin\lambda\tau_2c+({}^{47}/_{24}\,a\alpha_1\lambda^2\sin\lambda\tau_2-{}^{95}/_{48}\,a\lambda^2\sin\lambda\tau_2\cos\lambda\tau_2)\times$$
$$\times c^3+\ldots=0$$

Предлагаемая работа выполнена под руководством С. Н. Шиманова, которому автор приносит благодарность.

Свердловское отделение
Математического института АН СССР

Поступила 10 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые вопросы теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. Сорокин Е. С. Внутреннее трение в материалах и конструкциях с нелинейной упругой характеристикой. Строительная механика и расчет сооружений, 1964, № 3.
3. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М., Изд. иностр. лит., 1961.
4. Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым. ЖЭТФ, 1934, т. 4, вып. 9.
5. Шиманов С. Н. Колебания квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
6. Шиманов С. Н. К теории квазигармонических колебаний. ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.