

ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА С ГИБКОЙ ОСЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И УПРУГИХ СВЯЗЕЙ ПРИ МАЛЫХ УГЛАХ НУТАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЕГО ВЕРТИКАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ

М. Я. Куш у л ь

(Москва)

С возрастанием угловых скоростей упругие деформации оси ротора гироскопа могут оказать заметное влияние на его движение. Одна из первых работ, посвященная динамике гироскопа с упругой осью, принадлежит Магнусу [1, 2]. Позднее колебания свободного гироскопа с упругим валом исследовались Маундером и Уиппелом [3, 4]. Устойчивость движения гироскопа с учетом упругих свойств оси ротора рассматривалась В. В. Крементуло [5]. Главное внимание в перечисленных работах уделялось астатическому гироскопу в кардановом подвесе.

В предлагаемой статье изучается динамика гироскопа с упругой осью под воздействием силы тяжести и реакций упругих связей. Гироскоп рассматривается как протяженное симметричное твердое тело на невесомой упругой оси; некоторое нарушение симметрии допускается эксцентрично расположенными точечными массами. Приводятся квазилинейные дифференциальные уравнения движения такой модели гироскопа. При малых углах нутации определяются угловые скорости прямых и обратных прецессий, траектории движения центра массы симметричного гироскопа. Рассматриваются вынужденные колебания гироскопа, вызванные эксцентричной точечной массой, его критические скорости. Сравняются динамические характеристики гироскопов с упругими и абсолютно жесткими осями.

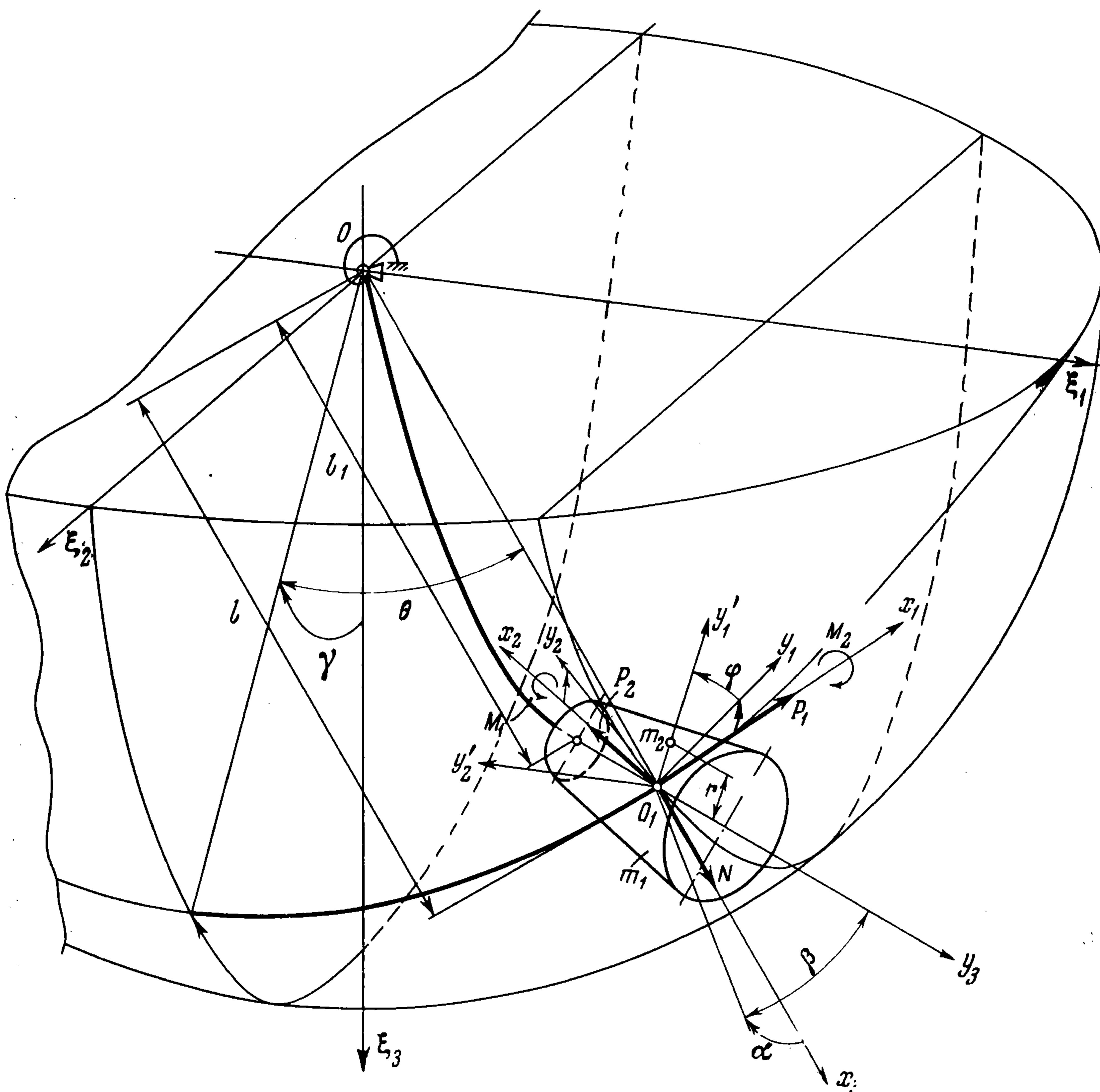
Если центр тяжести массы гироскопа расположен выше точки опоры, возникает задача об устойчивости вертикального вращения гироскопа с упругой осью при наличии упругих связей. В статье получены необходимые условия устойчивости вертикального вращения для этого случая. В качестве примера исследуется устойчивость упругого волчка. Показывается, что упругая деформация оси повышает порог угловой скорости ротора, ниже которого вращение становится неустойчивым. Приводится зависимость этого порога от моментов инерции волчка и упругих свойств его оси.

Принятая в статье модель гироскопа рассчитана на ее использование при решении ряда прикладных задач.

§ 1. Гироскоп схематизируется в виде тяжелого симметричного абсолютно твердого тела, насаженного на гибкий вал, масса которого пренебрежимо мала (фиг. 1). Точка опоры O гироскопа неподвижна. Масса тела равна m_1 , его полярный момент инерции — A_1 экваториальные относительно центральной оси A_2 ; расстояние OO_1 центра инерции массы m_1 от точки опоры l , длина упругого вала l_1 .

Пренебрегая изменением величин l и l_1 при деформации оси, положение центра инерции массы m_1 относительно неподвижных осей ξ_1, ξ_2, ξ_3 определим двумя сферическими координатами — углами γ и θ . Орты трехгранника $O_1x_1x_2x_3$ сферических осей обозначаются через k_1, k_2 и k_3 , а орты неподвижных осей ξ_1, ξ_2, ξ_3 через j_1, j_2 и j_3 . Проекции поперечных проги-

бов $u_1(s, t)$, $u_2(s, t)$ упругой линии на координатные плоскости x_1x_3 и x_2x_3 отсчитываются от прямой OO_1 и принимаются положительными, если их направления совпадают с направлениями ортов k_1 и k_2 . Упругая связь вблизи точки опоры O создает восстанавливающий момент, пропорциональный углу между вертикалью и касательной к упругой оси ротора в этой точке, причем вектор момента перпендикулярен плоскости, образованной двумя указанными прямыми.



Фиг. 1

Ось симметрии гироскопа O_1y_3 имеет направление касательной к упругой оси в точке $s=l_1$; ее положение относительно сферической системы осей задается углами Резаля α и β ; этими же углами определяется положение осей Резаля y_1, y_2, y_3 , орты которых обозначены i_1, i_2, i_3 . Наконец, положение триэдра осей $O_1y_1'y_2'y_3'$, неизменно связанного с гироскопом, относительно триэдра осей Резаля $O_1y_1y_2y_3$ определяется углом собственного вращения φ .

Предполагается, что полная симметрия гироскопа может быть нарушена эксцентрично расположенными точечными массами; их влияние на ди-

намику гироскопа учитывается добавлением к нагрузкам, действующим на симметричный гироскоп, сил тяжести и сил инерции точечных масс в их абсолютном движении.

В дальнейшем для упрощения выкладок рассматривается лишь одна точечная масса m_2 ($m_2 \ll m_1$) с координатами $y_1' = r$, $y_2' = y_3 = 0$.

Имея в виду рассмотреть движение гироскопа при малых углах нутации, во всех нелинейных функциях сохраним члены до третьего порядка малости относительно координат γ , θ и их производных и лишь первого порядка относительно величин, характеризующих упругие деформации оси.

Ускорение w_1 центра инерции массы m_1 с указанной точностью равно

$$w_1 = l(\theta'' + \theta\gamma'^2)k_1 + l(\gamma'' - 2\theta\gamma'\theta' - \frac{1}{2}\gamma''\theta^2)k_2 - l(\gamma'^2 + \theta'^2)k_3$$

Угловая скорость тела

$$\begin{aligned} \Omega = & -\gamma'j_1 - \alpha'k_1 + \theta'k_2 + \beta'i_2 + \varphi'i_3 = (-\gamma' \cos \theta - \alpha' + \varphi' \sin \beta)k_1 + \\ & + (\theta' + \beta' \cos \alpha + \varphi' \sin \alpha \cos \beta)k_2 + (-\gamma' \sin \theta - \beta' \sin \alpha + \\ & + \varphi' \cos \alpha \cos \beta)k_3 \approx (-\alpha' - \gamma' + \beta\varphi' + \frac{1}{2}\theta^2\gamma')k_1 + \\ & + (\theta' + \beta' + \alpha\varphi')k_2 + (\varphi' - \theta\gamma')k_3 \end{aligned}$$

Ускорение точечной массы m_2

$$w_2 = w_1 + d/dt [\Omega \times r], \quad r = r \cos \varphi i_1 + r \sin \varphi i_2$$

Сила P , приложенная к упругой оси гироскопа в точке O_1 , равна

$$P = mgj_3 - mw_1 - d/dt [\Omega \times m_2r], \quad m = m_1 + m_2$$

Разлагая вектор P по осям x_1 , x_2 , x_3 и выделяя члены первого порядка малости, получим с принятой точностью (1.1)

$$P = P_1k_1 + P_2k_2 + Nk_3$$

$$P_1 = P_1^\circ + f_1, \quad P_2 = P_2^\circ + f_2, \quad N = mg(1 + f_3)$$

$$P_1^\circ = -mg\theta - ml\theta'' + \varepsilon\varphi'^2 \cos \varphi + \varepsilon\varphi'' \sin \varphi$$

$$P_2^\circ = -mg\gamma - ml\gamma'' + \varepsilon\varphi'^2 \sin \varphi - \varepsilon\varphi'' \cos \varphi$$

$$f_1 = mg(\frac{1}{2}\theta\gamma'^2 + \frac{1}{6}\theta^3) - ml\theta\gamma'^2, \quad f_2 = mg(\gamma^3/6) + m(\frac{1}{2}l\theta^2\gamma'' + 2l\theta\gamma'\theta')$$

$$\begin{aligned} f_3 = & l/g(\gamma'^2 + \theta'^2) - \frac{1}{2}(\gamma^2 + \theta^2) + (\varepsilon/mg) \sin \varphi (\alpha'' + \gamma'' - 2\beta'\varphi' - 2\theta'\varphi' - \\ & - \alpha\varphi'^2 - \beta\varphi'') + (\varepsilon/mg) \cos \varphi (\beta'' + \theta'' + 2\alpha'\varphi' + 2\gamma'\varphi' - \beta\varphi'^2 + \alpha\varphi'') \end{aligned}$$

где статический момент эксцентричной массы $\varepsilon = m_2r$ предполагается малой величиной.

Проекции L_1 , L_2 вектора момента L , приложенного к валу в точке O_1 , на главные оси инерции y_1 и y_2 равны (1.2)

$$L_1 = -A_2 \frac{d\Omega_1}{dt} - A_1\omega_{12}\Omega_3 + A_2\Omega_2\omega_{13} + m_2r \times (gj_3 - w_2)i_1$$

$$L_2 = -A_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + A_1\omega_{11}\Omega_3 - A_2\Omega_1\omega_{13} + m_2r \times (gj_3 - w_2)i_2$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}$ — проекции на оси y_1, y_2, y_3 угловых скоростей соответственно тела m_1 и триэдра осей $O_1y_1y_2y_3$, т. е.

$$\begin{aligned}\Omega_1 = \omega_{11} &= -\alpha' \cos \beta - \theta' \sin \alpha \sin \beta - \gamma' \cos \theta \cos \beta + \\ &+ \gamma' \sin \theta \cos \alpha \sin \beta \approx -\alpha' - \gamma' + \frac{1}{2}\gamma'\theta^2 \\ \Omega_2 = \omega_{12} &= \beta' + \theta' \cos \alpha + \gamma' \sin \alpha \sin \theta \approx \beta' + \theta' \\ \omega_{13} &= \theta' \sin \alpha \cos \beta - \alpha' \sin \beta - \gamma' \cos \theta \sin \beta - \gamma' \sin \theta \cos \alpha \cos \beta \approx -\gamma'\theta \\ \Omega_3 &= \omega_{13} + \varphi.\end{aligned}$$

Проектируя вектор момента L на оси x_1 и x_2 , найдем, что с принятой точностью в точке O_1 к валу гироскопа приложены в плоскостях x_1x_3 и x_2x_3 моменты M_1 и M_2 равные

$$M_1 = L_2 \cos \alpha - L_1 \sin \alpha \sin \beta \approx L_2, \quad M_2 = -L_1 \cos \beta \approx -L_1$$

Моменты M_1 и M_2 принимаются положительными, если они изгибают ось в том же направлении, что и положительные силы P_1 и P_2 . Подставляя (1.3) в (1.2) и выделяя члены первого порядка малости, получим

$$\begin{aligned}M_1 &= M_1^\circ + f_4, \quad M_2 = M_2^\circ + f_5 \\ M_1^\circ &= -A_2(\beta'' + \theta'') - A_1\varphi'(\alpha' + \gamma') - \varepsilon g \cos \varphi \\ f_4 &= \frac{1}{2}A_1\varphi'\gamma'\theta^2 + \theta\gamma'^2(A_1 - A_2) \\ M_2^\circ &= -A_2(\alpha'' + \gamma'') + A_1\varphi'(\beta' + \theta') - \varepsilon g \sin \varphi \\ f_5 &= \frac{1}{2}A_2\theta^2\gamma'' + (2A_2 - A_1)\theta\gamma'\theta'\end{aligned}\tag{1.4}$$

Из уравнения моментов относительно оси y_3 , пренебрегая трением в опоре, найдем, что

$$A_1 \frac{d\Omega_3}{dt} = m_2 r \times (g\mathbf{j}_3 - \mathbf{w}_2) \mathbf{i}_3\tag{1.5}$$

или

$$(A_1 + m_2 r^2) \varphi'' \approx A_1 (\gamma'\theta) + \varepsilon (g\theta + l\theta'') \sin \varphi - \varepsilon (g\gamma + l\gamma'') \cos \varphi$$

Остальные четыре уравнения движения могут быть получены из очевидных равенств, справедливых для невесомого вала

$$\begin{aligned}P_1 l + M_1 - \kappa [\theta + u_1'(0, t)] &= 0, \quad \beta = u_1'(l_1, t) \\ P_2 l + M_2 - \kappa [\gamma + u_2'(0, t)] &= 0, \quad \alpha = u_2'(l_1, t)\end{aligned}\tag{1.6}$$

где κ — жесткость упругой связи, а штрихи при $u_j(s, t)$ ($j = 1, 2$) обозначают частные производные по s .

Проекция прогибов $u_j(s, t)$ оси вала гироскопа на координатные плоскости x_1x_3 и x_2x_3 должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$EIu_j''(s, t) - Nu_j(s, t) = P_j(l - s) + M_j \quad \text{при } 0 < s < l_1 \quad (j = 1, 2)\tag{1.7}$$

зависимостям

$$u_j(s, t) = u_j(l_1, t) + (s - l_1)u_j'(l_1, t) \quad \text{при } l_1 < s < l$$

и граничным условиям

$$u_j(0, t) = 0, \quad u_j(l, t) = u_j(l_1, t) + (l - l_1)u_j'(l_1, t) = 0 \quad (1.8)$$

Введем функцию λ , равную

$$\lambda = \left(\frac{N}{EI}\right)^{1/2} = \lambda_0 \sqrt{1 + f_3}, \quad \lambda_0 = \left(\frac{mg}{EI}\right)^{1/2} \quad (1.9)$$

где EI — постоянная жесткость вала на изгиб. Интегрируя уравнение (1.7) при граничных условиях (1.8), получим для углов наклона касательной к упругой оси при $s = 0$ и $s = l_1$ выражения

$$\begin{aligned} u_j'(0, t) &= N^{-1} [P_j c_1(\lambda) + l^{-1} M_j c_2(\lambda)] \\ u_j'(l, t) &= u_j'(l_1, t) = N^{-1} [P_j c_3(\lambda) + l^{-1} M_j c_4(\lambda)] \end{aligned} \quad (1.10)$$

где безразмерные коэффициенты $c_k(\lambda)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) равны

$$\begin{aligned} c_1(\lambda) &= 1 - \frac{\lambda l}{c(\lambda)} [\operatorname{ch} \lambda l_1 + \lambda (l - l_1) \operatorname{sh} \lambda l_1], \quad c_3(\lambda) = 1 - \frac{\lambda l}{c(\lambda)} \\ c_2(\lambda) &= \frac{\lambda l}{c(\lambda)} [1 - \operatorname{ch} \lambda l_1 - \lambda (l - l_1) \operatorname{sh} \lambda l_1], \quad c_4(\lambda) = \frac{\lambda l}{c(\lambda)} (\operatorname{ch} \lambda l_1 - 1) \\ c(\lambda) &= \operatorname{sh} \lambda l_1 + \lambda (l - l_1) \operatorname{ch} \lambda l_1 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Разложим функции $u_j'(0, t)$, $u_j'(l, t)$ в ряды Тейлора по параметру f_3 . Так как f_3 — величина второго порядка малости относительно α , β , γ , θ и ε , то в этих разложениях удержим лишь линейные члены относительно f_3

$$\begin{aligned} mgu_j'(0, t) &= [c_1(\lambda_0) + f_3 d_1(\lambda_0)] P_j + l^{-1} M_j [c_2(\lambda_0) + f_3 d_2(\lambda_0)] \\ mg u_j'(l, t) &= [c_3(\lambda_0) + f_3 d_3(\lambda_0)] P_j + l^{-1} M_j [c_4(\lambda_0) + f_3 d_4(\lambda_0)] \end{aligned}$$

где, как нетрудно показать

$$d_k = \frac{\lambda_0}{2} \frac{dc_k(\lambda_0)}{d\lambda_0} - c_k(\lambda_0), \quad \lambda_0 = \left(\frac{mg}{EI}\right)^{1/2} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

Подставляя значения углов наклона $u_j'(0, t)$ и $u_j'(l, t)$ в уравнения (1.6), получим

$$\begin{aligned} P_1^\circ l (1 - \eta c_1) + M_1^\circ (1 - \eta c_2) - \kappa \theta &= F_1 \\ P_2^\circ l (1 - \eta c_1) + M_2^\circ (1 - \eta c_2) - \kappa \gamma &= F_2 \\ mg \beta - c_3 P_1^\circ - l^{-1} c_4 M_1^\circ &= F_3 \\ mg \alpha - c_3 P_2^\circ - l^{-1} c_4 M_2^\circ &= F_4 \end{aligned} \quad \left(\eta = \frac{\kappa}{mgl}\right) \quad (1.12)$$

Здесь P_j° и M_j° — линейные функции координат, определяемые по формулам (1.1) и (1.4), F_k — функции, не содержащие членов первого порядка и равные

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 l (\eta c_1 - 1) + f_3 \eta (l d_1 P_1^\circ + d_2 M_1^\circ) + f_4 (\eta c_2 - 1) \\ F_2 &= f_2 l (\eta c_1 - 1) + f_3 \eta (l d_1 P_2^\circ + d_2 M_2^\circ) + f_5 ((\eta c_2 - 1)) \\ F_3 &= f_1 c_3 + f_3 (d_3 P_1^\circ + l^{-1} d_4 M_1^\circ) + l^{-1} f_4 c_4 \\ F_4 &= f_2 c_3 + f_3 (d_3 P_2^\circ + l^{-1} d_4 M_2^\circ) + l^{-1} f_5 c_4 \end{aligned}$$

Квазилинейные уравнения (1.5) и (1.12) полностью описывают движение гироскопа с упругой осью при малых углах нутации. В предлагаемой работе ограничимся исследованием линеаризованных уравнений.

Пренебрегая членами второго порядка малости в уравнениях (1.5), обозначим постоянную угловую скорость собственного вращения через ω .

Далее введем комплексные функции

$$x = \beta + i\alpha, \quad y = \theta + i\gamma \quad (1.13)$$

и безразмерные параметры

$$\sigma^2 = \frac{A_2}{ml^2}, \quad \sigma_0^2 = \frac{A_1}{ml^2} \quad (1.14)$$

тогда линеаризованные уравнения движения (1.12) будут

$$\begin{aligned} c_4\sigma^2 x'' + (c_3 + c_4\sigma^2) y'' + \frac{g}{l} x + \frac{g}{l} c_3 y - c_4\sigma_0^2\omega i (x' + y') &= \frac{\varepsilon\omega^2}{ml} \left(c_3 - \frac{gc_4}{\omega^2 l} \right) e^{i\omega t} \\ (1 - \eta c_2)\sigma^2 x'' + [1 + \sigma^2 - \eta(c_1 + c_2\sigma^2)] y'' + \frac{g}{l} [1 + \eta(1 - c_1)] y - \\ - (1 - \eta c_2)\sigma_0^2\omega i (x' + y') &= \frac{\varepsilon\omega^2}{ml} \left(1 - \eta c_1 - \frac{g}{l} \frac{1 - \eta c_2}{\omega^2} \right) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отыскивая решение однородной системы уравнений (1.15) в виде

$$x = D_1 e^{i\nu t}, \quad y = D_2 e^{i\nu t} \quad (1.16)$$

получим частотное уравнение

$$\begin{aligned} (\nu^4\sigma^2 - \nu^3\omega\sigma_0^2) [c_4 - c_3 + \eta(c_2c_3 - c_1c_4)] - gl^{-1}\nu^2 \{1 + \sigma^2(1 - c_3 + \\ + c_4) - \eta[c_1 + \sigma^2(c_2 - c_4 + c_1c_4 - c_2c_3)]\} + gl^{-1}\sigma_0^2\omega\nu [1 - c_3 + c_4 + \eta(c_4 - c_2 + \\ + c_2c_3 - c_1c_4)] + g^2l^{-2} [1 + \eta(1 - c_1)] = 0 \end{aligned}$$

Введем отвлеченные величины

$$\nu_* = \nu \sqrt{l/g}, \quad \omega_* = \omega \sqrt{l/g} \quad (1.17)$$

и заменим коэффициенты c_k их значениями из (1.11). После элементарных преобразований приведем частотное уравнение к виду

$$a_0\nu_*^4 + a_1\nu_*^3 + a_2\nu_*^2 + a_3\nu_* + a_4 = 0 \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \sigma^2 c^{-1} [\vartheta \operatorname{ch} \vartheta_1 - c + \eta\vartheta (2 - 2 \operatorname{ch} \vartheta_1 + \vartheta_1 \operatorname{sh} \vartheta_1)], \quad a_1 = -\omega_* a_0 \sigma_0^2 / \sigma^2 \\ a_2 &= -(1 + c^{-1} \sigma^2 \vartheta \operatorname{ch} \vartheta_1) + \eta \{1 - \vartheta c^{-1} [\operatorname{ch} \vartheta_1 + (\vartheta - \vartheta_1) \operatorname{sh} \vartheta_1] - \\ &\quad - c^{-1} \sigma^2 \vartheta^2 \operatorname{sh} \vartheta_1\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= c^{-1} \sigma_0^2 \vartheta \omega_* (\operatorname{ch} \vartheta_1 + \eta\vartheta \operatorname{sh} \vartheta_1), \quad a_4 = 1 + \eta\vartheta c^{-1} [\operatorname{ch} \vartheta_1 + (\vartheta - \vartheta_1) \operatorname{sh} \vartheta_1] \\ \vartheta &= \lambda_0 l, \quad \vartheta_1 = \lambda_0 l_1, \quad c = \operatorname{sh} \vartheta_1 + (\vartheta - \vartheta_1) \operatorname{ch} \vartheta_1 \end{aligned}$$

Формулы (1.19) для коэффициентов частотного уравнения упрощаются, если отношение $l/l_1 \approx 1$, как это часто бывает, и в этом случае

$$\begin{aligned} a_0 &= \sigma^2 [\vartheta \operatorname{cth} \vartheta - 1 + \eta\vartheta (\vartheta - 2 \operatorname{th} \vartheta/2)], \quad a_1 = -\omega_* \sigma_0^2 a_0 / \sigma^2 \\ a_2 &= -(1 + \sigma^2 \vartheta \operatorname{cth} \vartheta) + \eta (1 - \vartheta \operatorname{cth} \vartheta - \sigma^2 \vartheta^2) \\ a_3 &= \omega_* \sigma_0^2 \vartheta (\operatorname{cth} \vartheta + \eta\vartheta), \quad a_4 = 1 + \eta\vartheta \operatorname{cth} \vartheta \end{aligned} \quad (1.20)$$

Общий интеграл однородной системы уравнений (1.15) будет

$$y = \sum_{k=1}^4 R_k e^{i(\nu_k t + \psi_k)}, \quad x = \sum_{k=1}^4 R_k q_k e^{i(\nu_k t + \psi_k)}$$

Здесь ν_k — собственные частоты системы, $\nu_k = \nu_{*k} \sqrt{g/l}$ [ν_{*k} — корни частотного уравнения (1.18)], q_k — коэффициенты форм колебаний

$$q_k = \frac{(c_3 + c_4 \sigma^2) \nu_k^2 - c_4 \sigma_0^2 \omega \nu_k - c_3 g / l}{-c_4 \sigma^2 \nu_k^2 + c_4 \sigma_0^2 \omega \nu_k + g / l}$$

R_k, ψ_k — вещественные произвольные постоянные, которые выражаются через начальные значения углов $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ и θ_0 и скоростей $\alpha_0', \beta_0', \gamma_0'$ и θ_0' по формулам

$$R_k = \sqrt{\rho_k^2 + s_k^2}, \quad \sin \psi_k = \frac{s_k}{R_k}, \quad \cos \psi_k = \frac{\rho_k}{R_k}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \rho_k (-1)^{k+1} &= \theta_0 \Delta_{1k} - \gamma_0' \Delta_{2k} + \beta_0 \Delta_{3k} - \alpha_0' \Delta_{4k} \\ \Delta s_k (-1)^{k+1} &= \gamma_0 \Delta_{1k} + \theta_0' \Delta_{2k} + \alpha_0 \Delta_{3k} + \beta_0' \Delta_{4k} \end{aligned} \quad (1.21)$$

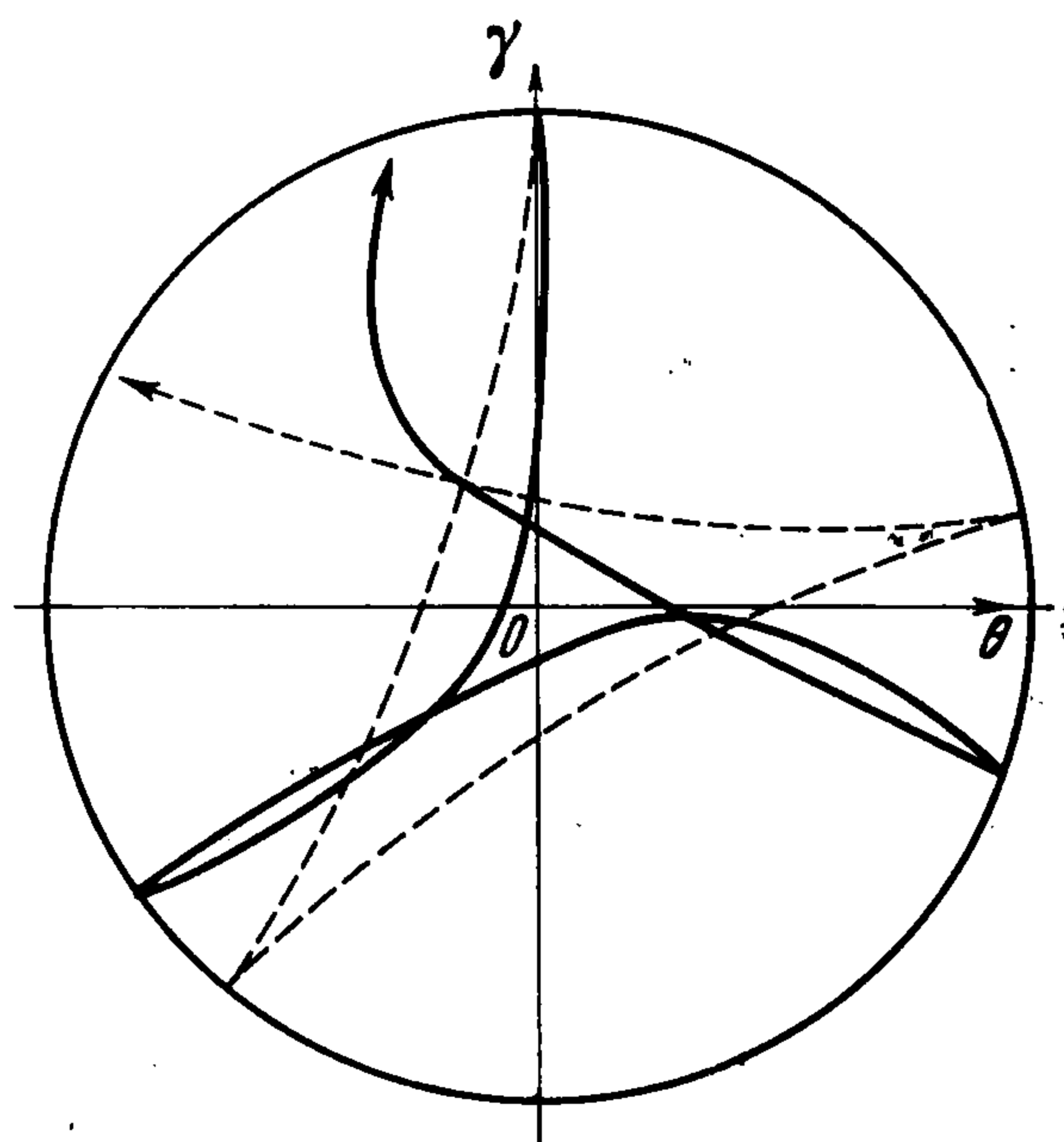
В формулах (1.21)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ q_1 \nu_1 & q_2 \nu_2 & q_3 \nu_3 & q_4 \nu_4 \end{vmatrix}$$

а Δ_{jk} — миноры элементов определителя Δ , стоящих на пересечении j -й строки и k -го столбца.

Таким образом, проекция траектории центра инерции симметричного гироскопа с упругой осью на горизонтальную плоскость при малых углах нутации есть геометрическое место концов вектора, равного сумме четырех векторов, каждый из которых, вращаясь с угловой скоростью ν_k ($k = 1, 2, 3, 4$), описывает окружность радиуса R_k .

Влияние деформации оси ротора на траекторию центра инерции гиромаятника можно проследить на частных примерах. На фиг. 2 приведен виток траектории центра инерции гиромаятника без упругой связи ($\eta = 0$) с гибким валом при $\vartheta = \vartheta_1 = 1.5, \sigma = 0.75, \sigma_0 = 0.75\sqrt{2}, \omega = 0.5$ (в долях $\sqrt{g/l}$) при начальных условиях $\gamma = \gamma_0, \alpha_0 = \beta_0 = \theta_0 = \alpha_0' = \beta_0' = \gamma_0' = \theta_0' = 0$, для которого угловые скорости прецессии из (1.18) равны $\nu_1 = -1.96, \nu_2 = -0.55, \nu_3 = 1.00, \nu_4 = 2.50$. При тех же начальных условиях виток траектории центра инерции для того же гиромаятника, но с абсолютно жестким валом изображен на фиг. 2 пунктирной кривой.



Фиг. 2

Установившиеся колебания гироскопа, вызванные эксцентричной точечной массой m_2 , находятся как частные решения системы уравнений (1.15). Пренебрегая в правых частях этих уравнений членами, содержащими ω^2 в знаменателе, получим частные решения (1.22)

$$\begin{aligned} X &= \frac{\varepsilon\omega^2}{m\Delta_1} \left[-a_0\omega^2 \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1 \right) + \eta \frac{g}{l} c_3 \right] e^{i\omega t} \\ Y &= \frac{\varepsilon\omega^2}{m\Delta_1} \left[a_0\omega^2 \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1 \right) + \frac{g}{l} (1 - \eta c_1) \right] e^{i\omega t} \\ \Delta_1 &= a_0\omega^4 \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right) + a_5 \frac{g}{l} \omega^2 + a_4 \frac{g^2}{l^2} \end{aligned}$$

В (1.22) коэффициенты c_1 и c_3 определяются из (1.11), a_0 , a_4 — из (1.19), а коэффициент a_5 равен

$$\begin{aligned} a_5 &= -1 + \frac{\vartheta \operatorname{ch} \vartheta_1}{c} (\sigma_0^2 - \sigma^2) + \\ &+ \frac{\eta}{c_l} [(1 - \vartheta^2 + \vartheta\vartheta_1) \operatorname{sh} \vartheta_1 - \vartheta_1 \operatorname{ch} \vartheta_1 + \vartheta^2 (\sigma_0^2 - \sigma^2) \operatorname{sh} \vartheta_1] \end{aligned}$$

По аналогии с упругими роторами можно говорить о критических скоростях гиросистем, при которых полином $\Delta_1(\omega) = 0$. Рассмотрим подробнее тот случай, когда упругая связь в системе отсутствует и $l \approx l_1$; при этом полином

$$\Delta_1(\omega) = (\vartheta \operatorname{cth} \vartheta - 1) (\sigma^2 - \sigma_0^2) \omega^4 + [\vartheta (\sigma_0^2 - \sigma^2) \operatorname{cth} \vartheta - 1] g l^{-1} \omega^2 + g^2 l^{-2}$$

Биквадратное уравнение $\Delta_1(\omega) = 0$ не имеет вещественных корней, если оба коэффициента при ω^4 и ω^2 были бы [положительны или если дискриминант

$$4g^2 l^{-2} (\sigma_0^2 - \sigma^2) - g^2 l^{-2} [1 + \vartheta (\sigma_0^2 - \sigma^2) \operatorname{cth} \vartheta]^2 > 0$$

Для упругой оси параметр $\vartheta \operatorname{cth} \vartheta > 1$ и ни одно из этих условий не выполняется, следовательно, гироскоп с упругой осью не может быть свободен от критических скоростей; при $\sigma^2 > \sigma_0^2$ их будет две, а при $\sigma^2 < \sigma_0^2$ одна.

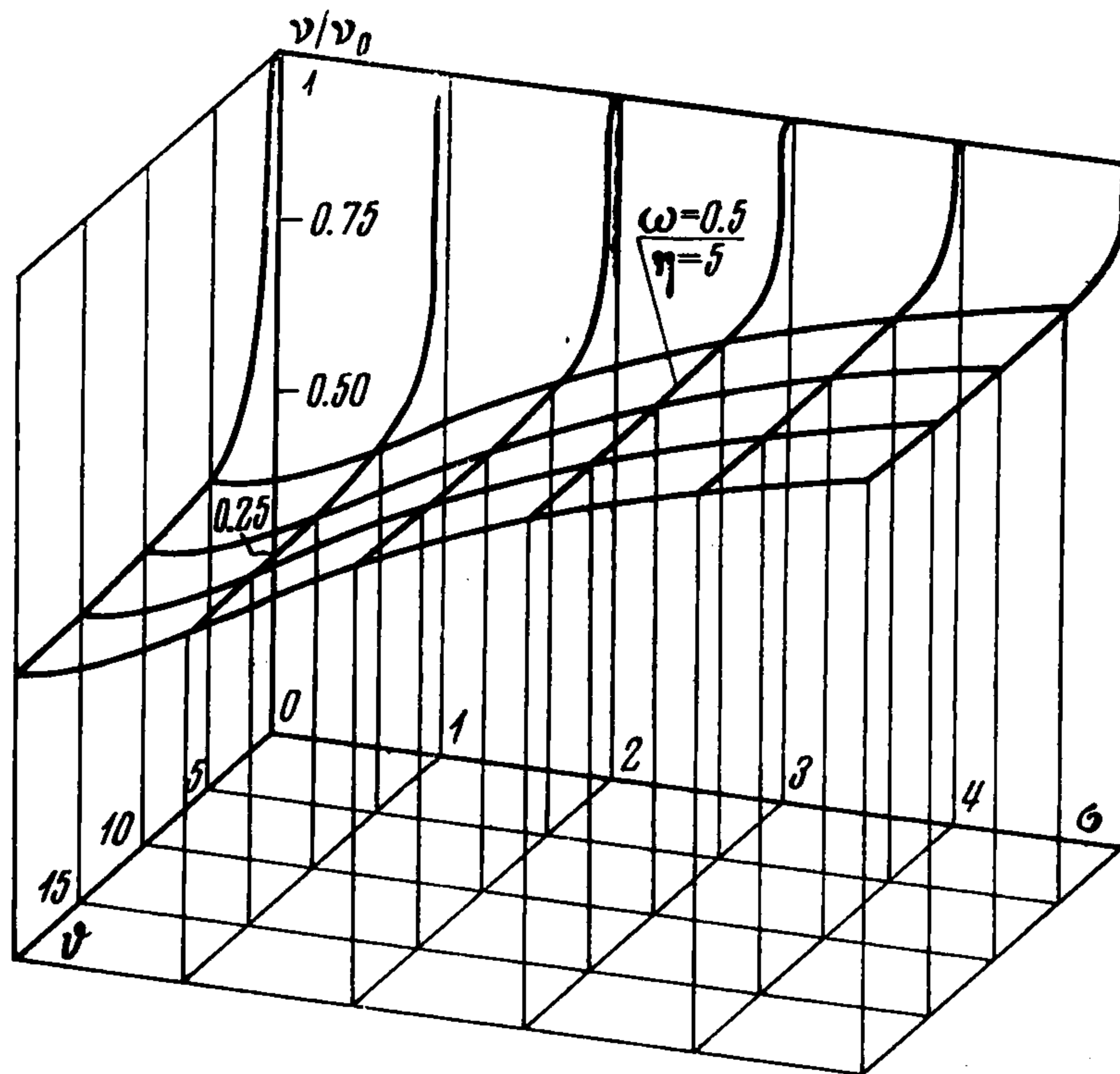
Сравним угловые скорости прецессии гироскопа с учетом и без учета упругости его оси. Для упрощения будем рассматривать массивную часть ротора гироскопа как маховик с отношением моментов инерции $A_1/A_2 = 2$ и пренебрежем толщиной маховика по сравнению с длиной упругой невесомой оси. Из (1.18) и (1.19) найдем, что с учетом упругости оси угловые скорости прецессии v определяются из уравнения

$$\begin{aligned} \sigma^2 [\vartheta \operatorname{cth} \vartheta - 1 + \eta\vartheta (\vartheta - 2\operatorname{th} \frac{1}{2} \vartheta)] (v^4 - 2\omega v^3) - [1 + \sigma^2 \vartheta \operatorname{cth} \vartheta + \\ + \eta (\vartheta \operatorname{cth} \vartheta - 1 + \sigma^2 \vartheta^2)] v^2 g/l + 2\sigma^2 \omega (\vartheta \operatorname{cth} \vartheta + \eta \vartheta^2) v g/l + \\ + (1 + \eta \vartheta \operatorname{cth} \vartheta) g^2/l^2 = 0 \end{aligned}$$

для гироскопа с недеформирующейся осью $\vartheta = 0$, $\vartheta \operatorname{cth} \vartheta = 1$ и его угловые скорости прецессии v_0 должны удовлетворять уравнению

$$(1 + \sigma^2) v_0^2 - 2\omega \sigma^2 v_0 - (1 + \eta) g/l = 0$$

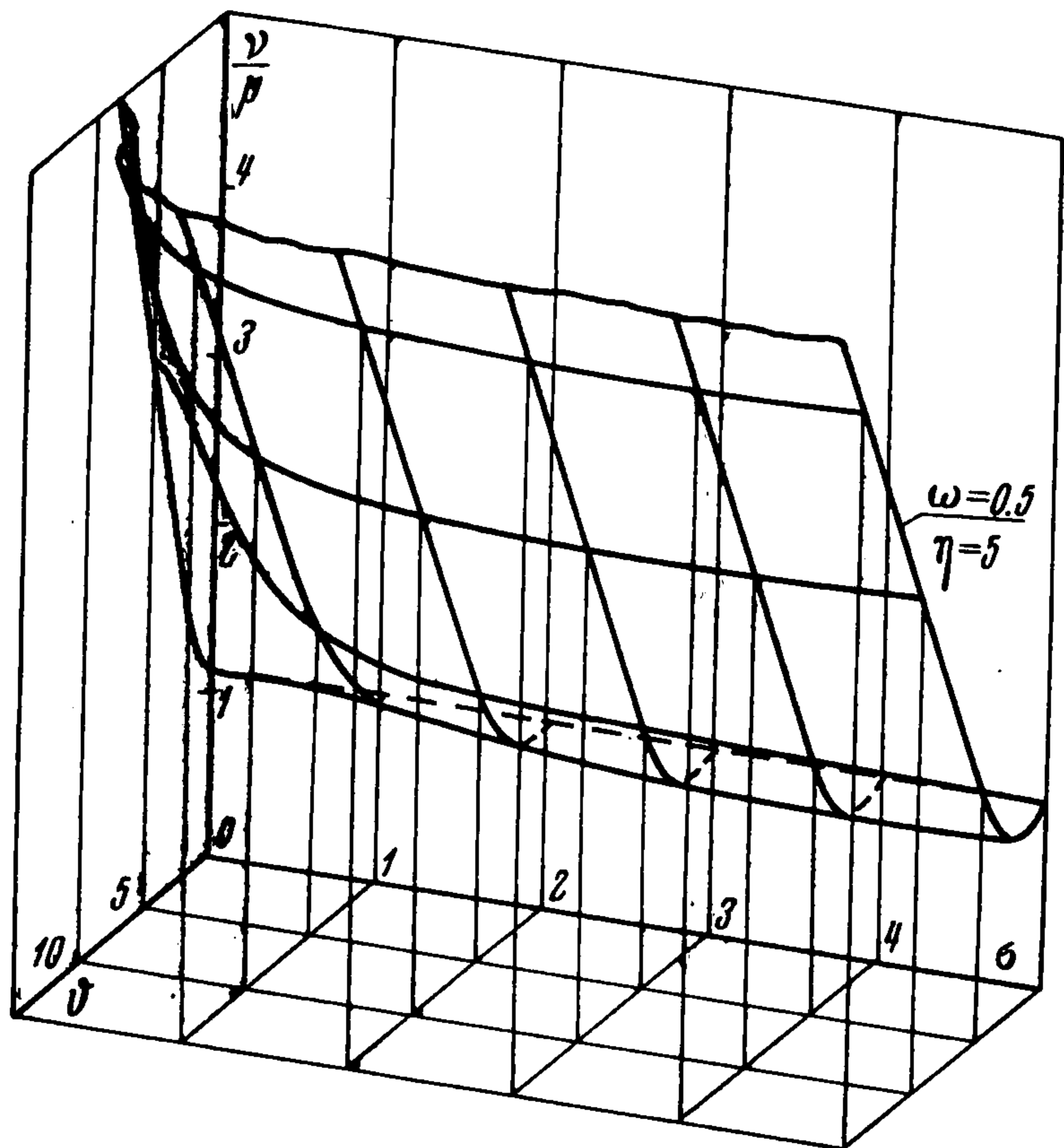
Отношения угловых скоростей v/v_0 зависят от безразмерных параметров ϑ , σ , η и угловой скорости ротора ω . Эти отношения могут быть представлены двухпараметрическим семейством поверхностей. На фиг. 3 изображена такая поверхность для отношения низших угловых скоростей прямой прецессии гироскопа при $\eta = 5$ и $\omega = 0.5$ [в долях $(g/l)^{1/2}$]. Как видно из графика на этой фигуре, при указанных численных значениях η и ω влияние изгиба оси на скорость прецессии особенно существенно в интервале изменения параметров $0 < \vartheta < 3$ и $0 < \sigma < 1$



Фиг. 3

Не менее интересно сравнить скорости прецессии v_k рассмотренной модели гироскопа с собственными частотами p_k изгибных колебаний такой же модели горизонтального ротора. Частоты p_k , как нетрудно показать, определяются из уравнения

$$\sigma^2 \vartheta^2 (\eta \vartheta^2 + 4) (p^4 - 2p^3 \omega) - 4p^2 g l^{-1} [(\eta \vartheta^2 + 1) (3\sigma^2 + 1) + 2] + 24g l^{-1} \sigma^2 \omega p (\eta \vartheta^2 + 1) + 12\eta g^2 l^{-2} = 0$$



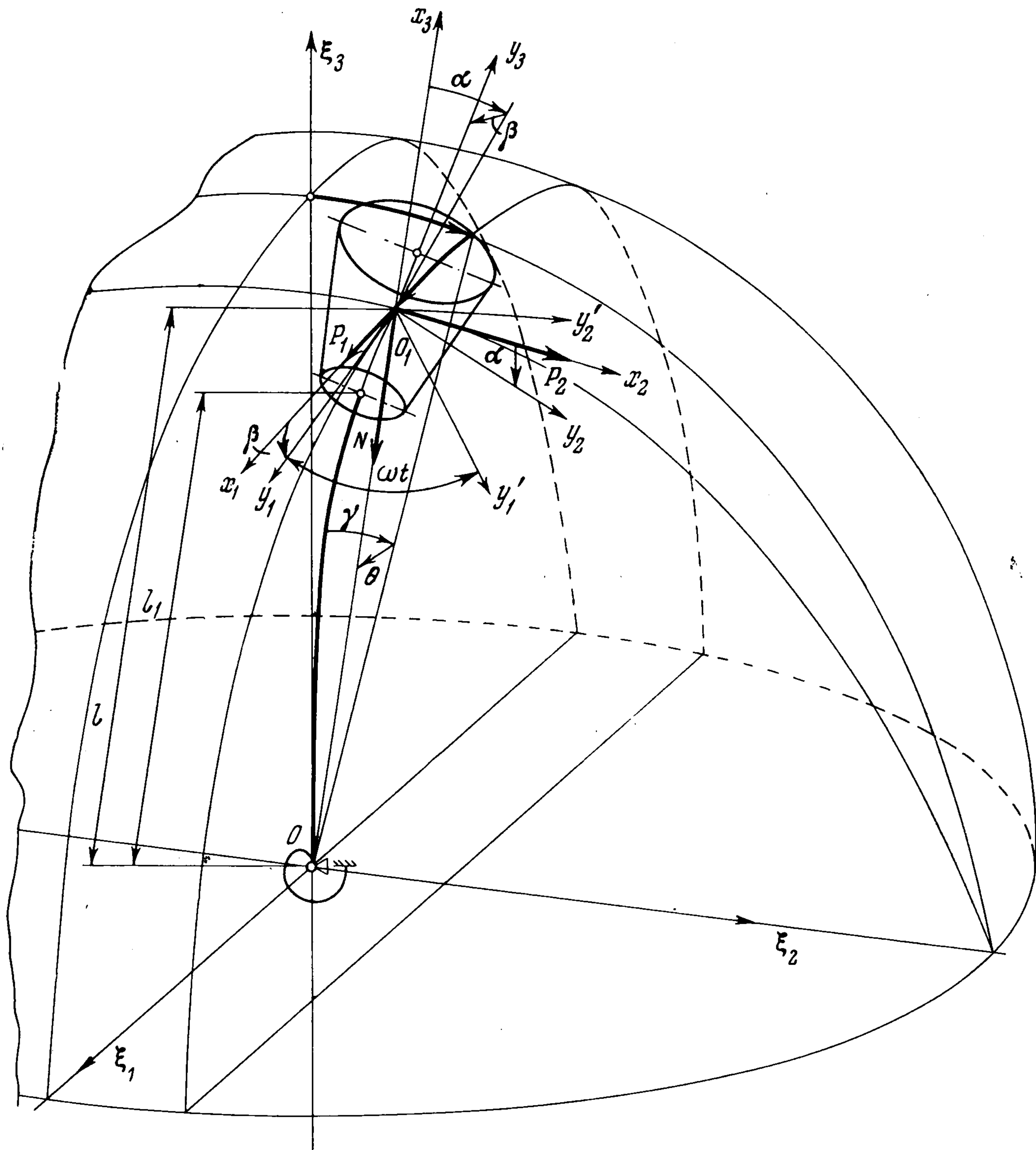
Фиг. 4

На фиг. 4 при ранее принятых значениях параметров $\eta = 5$ и $\omega = 0.5 (g/l)^{1/2}$ приводятся отношения v/p низших скоростей прямой прецессии гироскопа и собственной частоты горизонтального ротора в функции ϑ и σ . Это отношение при малых значениях ϑ , вблизи нуля, незначительно отличается от единицы, а затем с возрастанием ϑ быстро увеличивается, главным образом, из-за растягивающего действия продольных сил, повышающего жесткость вала гироскопа на изгиб. Эта особенность вертикальных роторов используется

в высокооборотных ультрацентрифугах, их роторы делаются тонкими и гибкими; даже при сравнительно небольших массах присоединенных де-

талей параметр Φ принимает большие значения и собственные частоты изгибных колебаний p_j иногда удается поднять выше рабочих оборотов.

§ 2. При расположении центра масс выше точки опоры возникает задача об устойчивости вертикального вращения гироскопа с упругой осью. Гироскоп предполагается вполне симметричным ($m_2 = 0$).



Фиг. 5

Для определения необходимых условий устойчивости вертикального положения оси симметрии гироскопа найдем уравнения в вариациях для стационарного решения

$$\alpha = \beta = \gamma = \theta = \alpha' = \beta' = \gamma' = \theta' = 0 \quad (2.1)$$

Направим ось $O\xi_3$ вертикально вверх (фиг. 5). С точностью до величин первого порядка малости проекции на сферические оси силы, приложенной в точке O_1 к ротору, будут

$$P_1 = mg\theta - ml\theta'', P_2 = mg\gamma - ml\gamma'', N = -mg \quad (2.2)$$

а моменты M_1 и M_2 , изгибающие ось в плоскостях x_1x_3 и x_2x_3 , равны

$$\begin{aligned} M_1 &= -A_2 (\beta'' + \theta'') - A_1 \omega (\alpha' + \gamma'), \\ [M_2 &= -A_2 (\alpha'' + \gamma'') + A_1 \omega (\beta' + \theta') \end{aligned} \quad (2.3)$$

где ω — угловая скорость собственного вращения.

Так как продольная сила сжимает ротор, проекции прогиба $u_j (s, t)$ ($j=1, 2$) его оси на координатные плоскости x_1x_3 и x_2x_3 должны удовлетворять вместо (1.7) дифференциальным уравнениям

$$u_j''(s, t) + \lambda_0^2 u_j(s, t) = \frac{1}{EI} [P_j(l-s) + M_j] \quad \text{при } 0 < s < l_1, \lambda_0^2 = \frac{mg}{EI}$$

интегрируя которые при граничных условиях (1.8), получим для углов наклона упругой линии в точках $s = 0$ и $s = l_1$ выражения

$$\begin{aligned} mgu_j'(0, t) &= c_1(\vartheta, \vartheta_1) P_j + l^{-1} M_j c_2(\vartheta, \vartheta_1) \\ mgu_j'(l, t) &= c_3(\vartheta, \vartheta_1) P_j + l^{-1} M_j c_4(\vartheta, \vartheta_1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} c_1(\vartheta, \vartheta_1) &= (\vartheta/c) [\cos \vartheta_1 - (\vartheta - \vartheta_1) \sin \vartheta_1] - 1, \quad c_3(\vartheta, \vartheta_1) = \vartheta/c - 1 \\ c_2(\vartheta, \vartheta_1) &= (\vartheta/c) [\cos \vartheta_1 - (\vartheta - \vartheta_1) \sin \vartheta_1 - 1], \quad c_4(\vartheta, \vartheta_1) = (\vartheta/c) (1 - \cos \vartheta_1) \\ \vartheta &= \lambda_0 l, \quad \vartheta_1 = \lambda_0 l_1, \quad c = \sin \vartheta_1 + (\vartheta - \vartheta_1) \cos \vartheta_1 \end{aligned}$$

Преобразуем уравнения (1.6), используя формулы (2.2) — (2.4), и введем комплексные функции (1.13). Уравнения в вариациях для стационарного решения (2.1) будут

$$\begin{aligned} c_4 \sigma^2 x'' + (c_3 + c_4 \sigma^2) y'' + gl^{-1} x - gl^{-1} c_3 y - c_4 \sigma_0^2 \omega i (x' + y') &= 0 \\ (1 - \eta c_2) \sigma^2 x'' + [1 + \sigma^2 - \eta (c_1 + \sigma^2 c_2)] y'' - \sigma_0^2 \omega i (1 - \eta c_2) (x' + &+ y') - gl^{-1} y [1 - \eta (1 + c_1)] = 0 \quad (i = \sqrt{-1}) \end{aligned}$$

причем σ^2 , σ_0^2 и η определяются из (1.14). Применяя подстановку (1.16) и вводя безразмерные величины (1.17), получим частотное уравнение

$$a_0 v_*^4 + a_1 v_*^3 + a_2 v_*^2 + a_3 v_* + a_4 = 0 \quad (2.6)$$

где постоянные коэффициенты a_k равны

$$\begin{aligned} a_0 &= [\sin \vartheta_1 - \vartheta_1 \cos \vartheta_1 + \eta \vartheta (2 - 2 \cos \vartheta_1 - \vartheta_1 \sin \vartheta_1)] c^{-1} \sigma^2 \\ a_1 &= -\omega_* a_0 \sigma_0^2 / \sigma^2 \\ a_2 &= -1 - c^{-1} \sigma^2 \vartheta \cos \vartheta_1 - \eta c^{-1} [(1 + \vartheta^2 - \vartheta \vartheta_1 + \sigma^2 \vartheta^2) \sin \vartheta_1 - \vartheta_1 \cos \vartheta_1] \\ [a_3 &= c^{-1} \sigma_0^2 \omega (\vartheta \cos \vartheta_1 + \eta \vartheta^2 \sin \vartheta_1) \\ a_4 &= -1 + \eta \vartheta c^{-1} [\cos \vartheta_1 - (\vartheta - \vartheta_1) \sin \vartheta_1] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Необходимым условием устойчивости вертикального положения оси симметрии гироскопа будет вещественность всех четырех корней уравнения (2.6). Как известно, многочлен n -й степени тогда и только тогда имеет n действительных корней, когда коэффициенты при старших членах всех $n + 1$ функций ряда Штурма одного знака. Для четырехчлена это правило приво-

дит к трем неравенствам

$$\begin{aligned} 3a_1^2 - 8a_0a_2 &> 0 \\ U = a_1^2a_2^2 - 3a_1^3a_3 - 18a_0^2a_3^2 + 14a_0a_1a_2a_3 - 6a_0a_1^2a_4 - 4a_0a_2^3 + \\ &+ 16a_0^2a_2a_4 > 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$W = 4U^2(16a_0a_4 - a_1a_3) + 4UV(a_1a_2 - 6a_0a_3) - V^2(3a_1^2 - 8a_0a_2) > 0$$

где

$$V = a_1^2a_2a_3 - 4a_0a_2^2a_3 + 3a_0a_1a_3^2 - 9a_1^3a_4 + 32a_0a_1a_2a_4 - 48a_0^2a_3a_4$$

Действительно, применим алгоритм Эвклида к многочлену

$$g(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

и его производной $g'(x)$, меняя каждый раз знак остатка на обратный. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} g(x) &= r(x)g'(x) - g_1(x), & g'(x) &= r_1(x)g_1(x) - g_2(x) \\ g_1(x) &= r_2(x)g_2(x) - g_3 \end{aligned}$$

Предполагается, что многочлен $g(x)$ не имеет кратных корней и, следовательно, g_3 — постоянное число. Все корни многочлена $g(x)$ будут действительны, если g_3 и коэффициенты при старших членах функций Штурма $g_1(x)$ и $g_2(x)$ положительны

Деля $16g(x)$ на $g'(x)$, найдем

$$g_1(x) = (3a^2 - 8b)x^2 + 2(ab - 6c)x + (ac - 16d)$$

При делении $(3a^2 - 8b)^2 g'(x)$ на $g_1(x)$ получим

$$g_2(x) = 32Ax + 16B$$

где

$$\begin{aligned} A &= a^2b^2 - 3a^3c + 14abc - 6a^2d - 4b^3 - 18c^2 + 16bd \\ B &= a^2bc - 9a^3d + 3ac^2 + 32abd - 4b^2c - 48cd \end{aligned}$$

Наконец, $4A^2g_1(x)$ разделим на $1/16g_2(x)$, тогда

$$g_3 = 4A^2(16d - ac) + 4AB(ab - 6c) - B^2(3a^2 - 8b)$$

Таким образом, все корни $g(x)$ вещественны, если

$$3a^2 - 8b > 0, A > 0, g_3 > 0 \quad (2.9)$$

В рассматриваемом случае

$$a = a_1/a_0, b = a_2/a_0, c = a_3/a_0, d = a_4/a_0$$

Подставив эти значения коэффициентов в неравенства (2.9) и умножив первое из них на a_0^2 , второе на a_0^4 и третье на a_0^{10} , придем к трем неравенствам (2.8), которые и будут искомыми необходимыми условиями устойчивости гироскопа.

§ 3. В качестве примера исследуем устойчивость свободного волчка с упругой осью. Под свободным здесь понимается волчок, лишенный упругой связи и создаваемого ею восстанавливающего момента, т. е. для него $\eta = \kappa = 0$. Чтобы упростить анализ, примем $l \approx l_1$, тогда из (2.7) получим

$$a_0 = \sigma^2(1 - f), a_1 = -\omega_*\sigma_0^2(1 - f), a_2 = -(1 + \sigma^2f), a_3 = \omega_*\sigma_0^2f, a_4 = -1 \quad (3.1)$$

где безразмерный параметр f характеризует относительную жесткость оси и равен

$$f = \vartheta \operatorname{ctg} \vartheta, \quad \vartheta = \lambda_0 l = \left(\frac{mq}{EI} \right)^{1/2} l$$

Для абсолютно жесткой оси $\vartheta = 0$ и $f = 1$; при малых значениях ϑ удобно воспользоваться разложением f по степеням ϑ

$$f = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} |B_{2k}|}{(2k)!} \vartheta^{2k}$$

где B_{2k} — числа Бернулли,

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -1/2, \quad B_2 = 1/6, \dots$$

В практически важных случаях параметр $f > 1/2$, оставаясь ≤ 1 ; поэтому вполне достаточно исследовать устойчивость волчка в диапазоне $0 < f \leq 1$.

Подставим значения коэффициентов из (3.1) в неравенства (2.8). Первые два из них удовлетворяются при любых угловых скоростях ω_* . Для первого неравенства (2.8) это утверждение очевидно; что касается второго неравенства (2.8), то функция U обращается в квадратный полином относительно ω_*^2

$$U(1-f)^{-1} = 3\omega_*^4 \sigma_0^8 f(1-f)^2 + \sigma_0^4(1-f)(1+6\sigma^2+10\sigma^2 f-3f^2\sigma^4)\omega_*^2 + 4\sigma^2(1+\sigma^2 f)(1-2\sigma^2 f+\sigma^4 f^2+4\sigma^2) \quad (3.2)$$

который мог бы быть отрицательным, если $3f^2\sigma^4 > 1+6\sigma^2+10\sigma^2 f$, но при этом условии дискриминант полинома (3.2), как нетрудно показать, положителен. Следовательно, для любых вещественных значений ω_* в рассматриваемом диапазоне изменений параметра f выполняется условие $U > 0$.

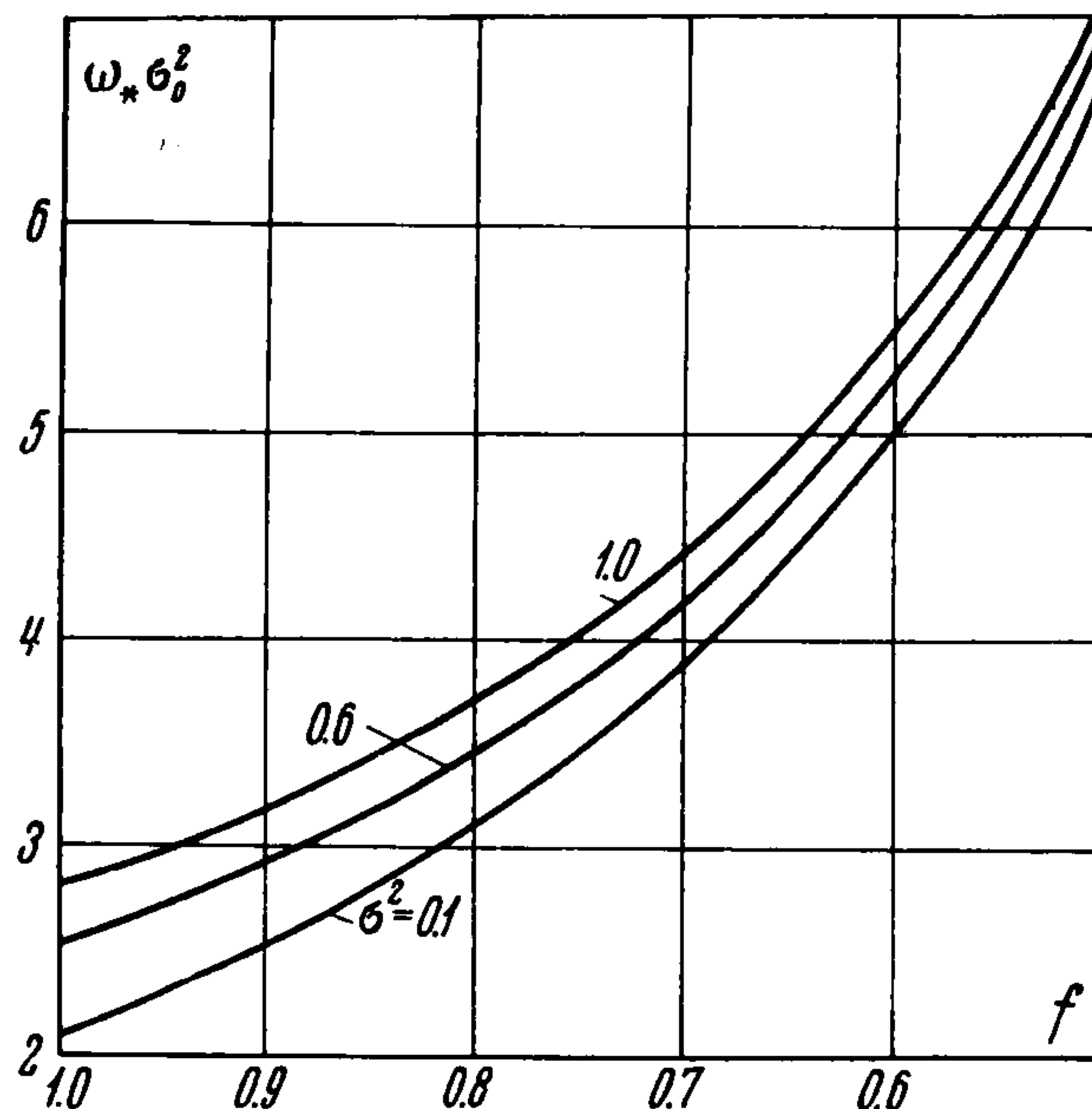
Таким образом, единственным необходимым условием устойчивости волчка с упругой осью остается неравенство $W > 0$. После элементарных, хотя и громоздких, преобразований функция W оказывается полиномом пятой степени относительно параметра $z = \omega_*^2 \sigma_0^4$ следующего вида:

$$W(1-f)^{-3} = 36z^5 f^3(1-f)^4 + 3z^4(1-f)^3[-81+108f-f^2(24+36\sigma^2)+160f^3\sigma^2+40f^4\sigma^4] + 4z^3(1-f)^2[-(9+648\sigma^2)+f(9+873\sigma^2-216\sigma^4)+f^2\sigma^2(-204+9\sigma^2)+f^3\sigma^4(550-9\sigma^2)+308f^4\sigma^6-23f^5\sigma^8] + 16z^2\sigma^2(1-f)[-(21+612\sigma^2+144\sigma^4)+f(21+[828\sigma^2-216\sigma^4]-f^2\sigma^2(200-258\sigma^2+36\sigma^4)+f^3\sigma^4(238-36\sigma^2)+f^4\sigma^6(276+123\sigma^2)-59f^5\sigma_3^8-20f^6\sigma^{10})] + 256z\sigma^4(1+\sigma^2 f)[-4(1+15\sigma^2+12\sigma^4)+4f(1+21\sigma^2+18\sigma^4)-f^2\sigma^2(23+48\sigma^2+12\sigma^4)+f^3\sigma^4(28+20\sigma^2)+f^4\sigma^6(-2+12\sigma^2)-8f^5\sigma^8+f^6\sigma^{10}] - 1024\sigma^6(1+\sigma^2 f)^2(1+4\sigma^2-2f\sigma^2+f^2\sigma^4)^2$$

При абсолютно жесткой оси $f = 1$ и W превращается в линейную функцию параметра z

$$W(1-f)^{-3} = 256\sigma^6(1+\sigma^2)^5 z - 1024\sigma^6(1+\sigma^2)^6$$

и третье неравенство (2.8) приводится к виду $\omega_*^2 \sigma_0^4 > 4(1+\sigma^2)$; отсюда, принимая во внимание (1.14) и (1.17), получим известное условие устойчивости вертикального вращения абсолютно жесткого волчка $\omega^2 A_1^2 > 4mgl A_2'$, где $A_2' = ml^2 + A_2$ — экваториальный момент инерции гироскопа относительно точки опоры.



Фиг. 6

В диапазоне рассматриваемых значений параметров уравнение $W = 0$ имеет лишь один положительный действительный корень z_1 . В таблице приведены величины этих корней при различных значениях параметров f и σ^2 , вычисленные с точностью до четырехзначных цифр.

σ^2	$f = 1$	$f = 0.9$	$f = 0.8$	$f = 0.7$	$f = 0.6$	$f = 0.5$
0.1	4.4	6.406	9.613	15.05	24.99	45.01
0.2	4.8	6.823	10.06	15.54	25.54	45.66
0.4	5.6	7.664	10.96	16.54	26.66	46.97
0.6	6.4	8.514	11.88	17.55	27.80	48.29
0.8	7.2	9.371	12.81	18.56	28.94	49.62
1	8	10.23	13.74	19.59	30.10	50.96
2	12	14.59	18.50	24.85	36.00	57.77
3	16	18.98	23.36	30.25	42.08	64.77

На фиг. 6 построены графики зависимости величины $\sqrt{z_1} = \omega_0 \sigma_0^2$ от параметра f при трех значениях σ^2 . Ниже кривых, изображенных на этих графиках, расположены зоны неустойчивого вертикального вращения волчка с гибкой осью ($W < 0$). Как видно из таблицы и фиг. 6, упругие деформации оси значительно увеличивают зоны неустойчи-

вости и тем более, чем большей гибкостью обладает ось.

В заключение отметим, что модель гироскопа, рассматриваемая в настоящей статье, может быть использована в технической динамике, в частности, при исследовании колебаний вертикальных роторов в гравитационном поле.

Автор приносит благодарность М. Ф. Зейтману за помощь при выполнении настоящей работы.

Поступила 20 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. M a g n u s K. Die Schwingungen des Kreisels mit der Massen elastisch gekoppelt ist. Proc. of the conference on vibration at Göttingen and Kassel, 6—8 October 1938, VDI — Verlag, 1939.
2. M a g n u s K. Untersuchungen zur Verminderung störender Rüttelschwingungen an Kieselgeräten. Z. angew. Math. und Mech., 1940, Bd. 20, Heft 3.
3. M a у н д е р Л. Собственные частоты колебаний свободного гироскопа с упругим валом, установленного в кардановом подвесе. Механика, сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1961, № 5 (69).
4. У и п п е л А. П. Р., M a у н д е р Л. Колебания свободного гироскопа с неоднородно упругой осью. Механика, сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1964, № 6 (88).
5. К р е м е н т у л о В. В. Применение второго метода Ляпунова к изучению устойчивости движения гироскопа с учетом упругих свойств оси ротора. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3, стр. 579.