5. Выпишем эти решения, принимая в качестве $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ их приближенные значения, найденные численными методами.

Первое решение: $a^{(1)} = 0.41190$, $\nu = 0.32385$

$$U = \sqrt{h}\,(2.3910 + 1.5836 \cos \nu\tau - 0.7942 \cos 2\nu\tau)$$

$$x = -\sqrt{h}\,(4.0656 + 4.7056 \cos \nu\tau + 1.8994 \cos 2\nu\tau)$$

$$y = \sqrt{h}\,(3.6551 \sin \nu\tau + 2.9508 \sin 2\nu\tau)$$

$$z^2 = -h\,(2.8001 + 4.6960 \cos \nu\tau + 2.7124 \cos 2\nu\tau + 0.9920 \cos 3\nu\tau + 0.1731 \cos 4\nu\tau)\,10$$

$$\gamma = -h\,(0.5228 + 1.0615 \cos \nu\tau + 1.0048 \cos 2\nu\tau + 0.6263 \cos 3\nu\tau + 0.1763 \cos 4\nu\tau)\,10$$

$$\gamma_1 = h\,(1.0742 \sin \nu\tau + 1.2310 \sin 2\nu\tau + 0.6601 \sin 3\nu\tau + 0.1601 \sin 4\nu\tau)\,10$$

$$\gamma_2^2 = h^3\,(-3.1183 - 5.1569 \cos \nu\tau - 2.7854 \cos 2\nu\tau - 0.7584 \cos 3\nu\tau + 0.1127 \cos 4\nu\tau + 0.1680 \cos 5\nu\tau + 0.0416 \cos 6\nu\tau - 0.0048 \cos 7\nu\tau - 0.0027 \cos 8\nu\tau)\,10^2$$

$$.026092\, h^2 = \Gamma^2, \quad 2.7431 + 2m\pi \leqslant \nu\tau \leqslant 3.5401 + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Второе решение: $a^{(2)} = 0.70819$, $\nu = 0.35086$

$$U = \sqrt{h}\,(2.5242 + 0.9663 \cos \nu\tau + 0.4598 \cos 2\nu\tau)\,10^{-1}$$

$$x = -\sqrt{h}\,(8.6501 + 2.0852 \cos \nu\tau + 0.4701 \cos 2\nu\tau)\,10^{-1}$$

$$y = -\sqrt{h}\,(1.0197 \sin \nu\tau + 0.4597 \sin 2\nu\tau)\,10^{-1}$$

$$z^2 = h\,(1.1811 - 4.6670 \cos \nu\tau - 1.5776 \cos 2\nu\tau - 0.5912 \cos 3\nu\tau - 0.0264 \cos 4\nu\tau)\,10^{-1}$$

$$\gamma = -h\,(1.6253 + 0.9811 \cos \nu\tau + 0.4685 \cos 2\nu\tau + 0.3012 \cos 3\nu\tau + 0.0184 \cos 4\nu\tau)\,10^{-1}$$

$$\gamma_1 = h\,(-0.9572 \sin \nu\tau + 0.4482 \sin 2\nu\tau + 2.3858 \sin 3\nu\tau + 0.0764 \sin 4\nu\tau)\,10^{-2}$$

$$\gamma_2^2 = h^2\,(0.6549 + 3.8038 \cos \nu\tau + 2.2812 \cos 2\nu\tau + 1.4602 \cos 3\nu\tau + 0.4868 \cos 4\nu\tau + 0.1492 \cos 5\nu\tau + 0.0252 \cos 6\nu\tau + 0.0037 \cos 7\nu\tau + 0.0001 \cos 8\nu\tau)\,10^{-2}$$

$$.026574\, h^2 = \Gamma^2, \quad 1.0099 + 2m\pi \leqslant \nu\tau \leqslant 5.2733 + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Авторы благодарят П. В. Харламова за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 9 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Харламова Е. И. Сведение задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
2. Харламов П. В. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
3. Харламова Е. И. Об одном частном решении уравнений Эйлера — Пуассона. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.

СТРУКТУРА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В СЛУЧАЕ РАЗНЫХ, НО ЧАСТИЧНО НЕСОИЗМЕРИМЫХ ЧАСТОТ

А. П. Проскуряков (Москва)

Изучается структура периодических решений квазилинейной автономной системы в случае, когда часть частот порождающей системы соизмерима между собой, но несоизмерима с остальными частотами. Показано, что функции, представляющие квазинормальные координаты системы, разделяются на две группы, каждая из которых обладает определенными свойствами.

Рассмотрим квазилинейную автономную систему с n степенями свободы

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}x_k^{\cdot\cdot} + c_{ik}x_k) = \mu F_i (x_1, \ldots, x_n, x_1^{\cdot}, \ldots, x_n^{\cdot}, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki} \tag{1}$$

Функции $F_i(x_k, x^{\cdot}_k, \mu)$ предполагаются аналитическими от x_k, $x^{\cdot}_k$ и малого параметра μ в области изменения x_k и $x^{\cdot}_k$ при $0 \leqslant \mu < \mu_0$.

Пусть уравнение частот порождающей системы ($\mu = 0$)

$$\Delta(\omega^2) = | c_{ik} - \omega^2 a_{ik} | = 0 \tag{2}$$

имеет все корни различные и положительные. В работе [1] показано, что в этом случае общая структура произвольного решения (не обязательно периодического) квазилинейной системы имеет вид

$$x_k(t) = \sum_{r=1}^{n} p_k^{(r)} x^{(r)}(t) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

Коэффициенты формы $p_k^{(r)}$ выражаются через алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя (2)

$$p_1^{(r)} = 1, \qquad p_k^{(r)} = \frac{\Delta_{ik}(\omega_r^2)}{\Delta_{i1}(\omega_r^2)} \qquad (k = 2, \ldots, n) \tag{4}$$

Функции $x^{(r)}(t)$ являются обобщением нормальных координат линейной порождающей системы, в которые они переходят при $\mu = 0$. Имеем общее выражение для $x^{(r)}(t)$

$$x^{(r)}(t) = (A_r + \beta_r)\cos\omega_r t + \frac{B_r + \gamma_r}{\omega_r}\sin\omega_r t + \tag{5}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(r)}(t, A_1 + \beta_1, \ldots, A_n + \beta_n, B_1 + \gamma_1, \ldots, B_n + \gamma_n)\mu^m \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

Функции $C_m^{(r)}(t)$, входящие в это выражение, вычисляются по формуле

$$C_m^{(r)}(t) = \left[\Delta_0\omega_r {\prod_{s=1}^{n}}' (\omega_s^2 - \omega_r^2)\right]^{-1} \int_0^t R_m^{(r)}(t') \sin\omega_r(t - t')\, dt' \tag{6}$$

Штрих у произведения означает, что значение индекса $s = r$ пропущено. Кроме того, обозначено

$$\Delta_0 = | a_{ik} | \tag{7}$$

$$R_m^{(r)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i1}(\omega_r^2) H_{im}(t), \quad H_{im}(t) = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}F_i}{d\mu^{m-1}}\right)_{\beta_s = \gamma_s = \mu = 0}$$

Предположим, что не все частоты ω_r соизмеримы. Пусть, например, первые l частот соизмеримы между собой, но несоизмеримы с остальными $n - l$ частотами ($l < n$). Рассмотрим более подробно структуру периодического решения такой системы.

Выделим из общего решения порождающей системы, которое в данном случае является непериодическим, периодическое решение с периодом T_0, отвечающим частотам $\omega_1, \ldots, \omega_l$. Это накладывает следующие условия на начальные данные порождающей системы: $A_r = 0$, $B_r = 0$ при $r = l + 1, \ldots, n$.

В силу автономности системы, можно также принять, что $B_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$.

Таким образом, начальные условия для функций $x^{(r)}(t)$, входящих в рассматриваемое периодическое решение системы (1), и их первых производных по времени t будут

$$\begin{aligned} &x^{(r)}(0) = A_r + \beta_r \qquad (r = 1, \ldots, l) \\ &x^{\cdot(1)}(0) = 0, \; x^{\cdot(r)}(0) = B_r + \gamma_r \qquad (r = 2, \ldots, l) \\ &x^{(r)}(0) = \beta_r, \; \dot{x}^{(r)}(0) = \gamma_r \qquad (r = l + 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{8}$$

При $\mu \neq 0$ это периодическое решение будет иметь период $T = T_0 + \alpha$, где α — функция от μ, уничтожающаяся при $\mu = 0$.

В исходной системе уравнений (1) произведем преобразование времени так, чтобы период решения системы (1) сделался равным T_0 и, следовательно, не зависел бы от параметра μ. Такое преобразование будет иметь вид

$$t = \tau h = \tau(1 + h_1\mu + \ldots)$$

Вид последующих членов ряда для h определяется характером разложений β_r и γ_r по целым или дробным степеням параметра μ, что в свою очередь связано с кратностью решений амплитудных уравнений. Указанное преобразование времени не изменит предыдущих формул, а также сохранит значения величин начальных данных, при которых система будет иметь периодические решения с периодом T_0. Функции $x^{(r)}(t)$ заменятся функциями $x^{(r)*}(\tau)$

$$x^{(r)}(t) = x^{(r)*}(\tau) = (A_r + \beta_r)\cos\omega_r\tau + \frac{B_r+\gamma_r}{\omega_r}\sin\omega_r\tau +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(r)*}(\tau, A_1+\beta_1, \ldots, A_n+\beta_n, B_1+\gamma_1, \ldots, B_n+\gamma_n)\mu^m \tag{9}$$

$$B_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad A_r = B_r = 0 \qquad (r = l+1, \ldots n)$$

Если предположить, что все параметры β_r и γ_r разлагаются в ряды по целым степеням μ:

$$\beta_r = \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm}\mu^m, \qquad \gamma_r = \sum_{m=1}^{\infty} B_{rm}\mu^m$$

то величина h тоже представляется таким же рядом. При этом функции $C_m^{(r)*}(\tau)$ будут определяться следующими формулами

$$C_1^{(r)*}(\tau) = C_1^{(r)}(\tau) + A_{r1}\cos\omega_r\tau + \frac{B_{r1}}{\omega_r}\sin\omega_r\tau - h_1\tau(\omega_r A_r\sin\omega_r\tau - B_r\cos\omega_r\tau) \tag{10}$$

$$C_2^{(r)*}(\tau) = C_2^{(r)}(\tau) + A_{r2}\cos\omega_r\tau + \frac{B_{r2}}{\omega_r}\sin\omega_r\tau + h_1\tau C_1'^{(r)}(\tau) -$$

$$-\tau[\omega_r(h_1A_{r1} + h_2A_r)\sin\omega_r\tau - (h_1B_{r1} + h_2B_r)\cos\omega_r\tau] -$$

$$-\frac{1}{2}h_1^2\omega_r\tau^2(\omega_r A_r\cos\omega_r\tau + B_r\sin\omega_r\tau) \text{ и т. д.} \tag{11}$$

Для построения периодических решений системы (1) необходимо и достаточно периодичности всех функций $x^{(r)*}(\tau)$. Условиями периодичности этих функций являются соотношения

$$x^{(r)*}(T_0) = A_r + \beta_r \qquad (r = 1, \ldots, l)$$

$$x^{(1)*\prime}(T_0) = 0, \; x^{(r)*\prime}(T_0) = B_r + \gamma_r \qquad (r = 2, \ldots, l) \tag{12}$$

$$x^{(r)*}(T_0) = \beta_r, \; x^{(r)*\prime}(T_0) = \gamma_r \qquad (r = l+1, \ldots, n)$$

В силу вышеупомянутых предположений, функции $x^{(r)*}(\tau)$ будут разлагаться в ряды по целым степеням μ:

$$x^{(r)*}(\tau) = x_0^{(r)*}(\tau) + \mu x_1^{(r)*}(\tau) + \mu^2 x_2^{(r)*}(\tau) + \ldots \tag{13}$$

с коэффициентами, имеющими период T_0

$$x_0^{(r)*}(\tau) = A_r\cos\omega_r\tau + \frac{B_r}{\omega_r}\sin\omega_r\tau$$

$$x_1^{(r)*}(\tau) = A_{r1}\cos\omega_r\tau + \frac{B_{r1}}{\omega_r}\sin\omega_r\tau + C_1^{(r)*}(\tau) \tag{14}$$

$$x_2^{(r)*}(\tau) = A_{r2}\cos\omega_r\tau + \frac{B_{r2}}{\omega_r}\sin\omega_r\tau + C_2^{(r)*}(\tau) +$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial C_1^{(r)*}(\tau)}{\partial A_s}A_{r1} + \frac{\partial C_1^{(r)*}(\tau)}{\partial B_s}B_{r1}\right)$$

и т. д. Заметим, что первые два коэффициента $x_q^{(r)*}(\tau)$ не содержат производных от функций $C_m^{(r)*}(\tau)$ по A_s и B_s. Эти производные появляются впервые в коэффициенте $x_2^{(r)*}(\tau)$.

Покажем, что функции $C_m^{(r)*}(\tau)$ при любых значениях r и m не зависят от β_s и γ_s, если $s = l+1, \ldots, n$. Для этого достаточно показать, что производные от этих функций по β_s и γ_s при $s = l+1, \ldots, n$ тождественно равны нулю. Вместо производных по β_s и γ_s удобнее вычислять производные по A_s и B_s, так как все указанные функции зависят только от сумм $A_s + \beta_s$ и $B_s + \gamma_s$. По этой причине производные по A_s и B_s, не теряют смысла и тогда, когда A_s и B_s заведомо равны нулю. Но если при этом $\beta_s = 0$ и $\gamma_s = 0$, то вычисленные таким образом производные по A_s и B_s не имеют смысла и должны быть приравнены нулю. Обратно, если формально вычисленные производные по A_s и B_s при $A_s = 0$, $B_s = 0$ противоречат условиям, наложенным на функции, в которые они входят как слагаемые (например, условиям периодичности), то это означает, что принятое при этом предположение о зависимости функций $C_m^{(r)*}(\tau)$ от β_s и γ_s неверно.

Проанализируем структуру слагаемых, входящих в коэффициенты $x_2^{(r)*}(\tau)$ разложений (13). Заметим, что, в силу амплитудных уравнений, все функции $C_1^{(r)*}(\tau)$ при значениях $r = 1, \ldots, l$ становятся периодическими, а при $r = l + 1, \ldots, n$ они имеют следующую структуру [2]:

$$C_1^{(r)*}(\tau) = \Phi_1^{(r)}(\tau) + P_1^{(r)} \cos \omega_r \tau + Q_1^{(r)} \sin \omega_r \tau \tag{15}$$

Здесь и в дальнейшем $\Phi_m^{(r)}(\tau)$ обозначают периодические функции от τ с периодом T_0, а величины $P_m^{(r)}$ и $Q_m^{(r)}$ являются постоянными. Напомним, что частоты ω_r при $r = l + 1, \ldots, n$ несоизмеримы с частотой ω_0.

Функции $C_2^{(r)*}(\tau)$ при $r = 1, \ldots, l$ будут иметь вид

$$C_2^{(r)*}(\tau) = \Phi_2^{(r)}(\tau) + P_2^{(r)}\tau \cos \omega_r \tau + Q_2^{(r)}\tau \sin \omega_r \tau \tag{16}$$

а при $r = l + 1, \ldots, n$ структура их будет определяться формулой (15).

Теперь рассмотрим производные от $C_1^{(r)*)}(\tau)$ по A_s и B_s. При $r, s = 1, \ldots, l$ эти производные будут иметь вид (16), а при $r = l + 1, \ldots, n$ и $s = 1, \ldots, l$ вид (15). Как было указано выше, все формулы, которые определяют функции $C_m^{(r)}(t)$, остаются в силе для функций $C_m^{(r)*}(\tau)$. Вычислим производную от $R_1^{(r)*}(\tau)$ по A_s при $s = l + 1, \ldots, n$, используя формулы (3), (4) и (7). Имеем

$$\frac{\partial R_1{}^{(r)*}(\tau)}{\partial A_s} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\Delta_{ik}(\omega_r{}^2)\left(\frac{\partial H_{i1}}{\partial x_{k0}} \cos \omega_s \tau - \frac{\partial H_{i1}}{\partial x_{k0}'} \sin \omega_s \tau\right)\right]$$

После интегрирования получим

$$\frac{\partial C_1{}^{(r)*}(\tau)}{\partial A_s} = \Phi_3{}^{(r)}(\tau) \cos \omega_s \tau + \Phi_4{}^{(r)}(\tau) \sin \omega_s \tau + P_3{}^{(r)} \cos \omega_r \tau + Q_3{}^{(r)} \sin \omega_r \tau$$
$$(r = 1, \ldots, n;\ s = l + 1, \ldots, n) \tag{17}$$

Аналогичный вид имеют производные от $C_1^{(r)*}(\tau)$ по B_s при $s = l + 1, \ldots, n$. Структура этих производных существенно отличается от остальных членов, входящих в состав коэффициентов $x_2^{(r)*}(\tau)$. Поэтому периодичность этих коэффициентов может быть обеспечена только в случае равенства нулю указанных производных. Это означает, что сделанное при вычислении этих производных предположение о зависимости функций $C_1^{(r)*}(\tau)$ от β_s и γ_s неправильно. Таким образом, независимость этих функций от β_s и γ_s при $s = l + 1, \ldots, n$ доказана. Следовательно, в формуле для коэффициентов $x_2^{(r)*}(\tau)$ суммирование последних членов нужно проводить от $s = 1$ до $s = l$.

Аналогичным образом из рассмотрения коэффициентов $x_3^{(r)*}(\tau)$ может быть доказана независимость функций $C_2^{(r)*}(\tau)$ от β_s и γ_s при $s = l + 1, \ldots, n$ и т. д.

Далее покажем, что параметры β_s и γ_s при $s = l + 1, \ldots, n$ будут аналитическими функциями от начальных данных функций $x^{(r)*}(\tau)$ при $r = 1, \ldots, l$ и от параметра μ. Это свойство впервые было получено И. Г. Малкиным для квазилинейной неавтономной системы, составленной из уравнений первого порядка [3].

Из условий периодичности для любой функции $x^{(s)*}(\tau)$ и ее первой производной по τ получим

$$\beta_s(\cos\omega_s T_0 - 1) + \frac{\gamma_s}{\omega_s}\sin\omega_s T_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(s)}(T_0, A_1+\beta_1, \ldots, B_l+\gamma_l)\mu^m = 0$$

$$(s = l + 1, \ldots, n) \qquad (18)$$

$$-\beta_s\omega_s\sin\omega_s T_0 + \gamma_s(\cos\omega_s T_0 - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m{}'^{(s)}(T_0, A_1+\beta_1, \ldots, B_l+\gamma_l)\mu^m = 0$$

Каждую пару таких соотношений можно рассматривать как систему двух уравнений относительно β_s и γ_s. Так как определитель рассматриваемой пары уравнений

$$\Delta_s = (\cos\omega_s T_0 - 1)^2 + \sin^2\omega_s T_0 \neq 0$$

то эти системы разрешимы. Параметры β_s и γ_s являются аналитическими функциями от $A_r + \beta_r$ и $B_r + \gamma_r$ при $r = 1, \ldots, l$ и от параметра μ:

$$\begin{aligned}\beta_s &= \varphi_{s-l}(A_1+\beta_1, \ldots, A_l+\beta_l, B_2+\gamma_2, \ldots, B_l+\gamma_l, \mu)\\ \gamma_s &= \psi_{s-l}(A_1+\beta_1, \ldots, A_l+\beta_l, B_2+\gamma_2, \ldots, B_l+\gamma_l, \mu)\end{aligned} \qquad (s = l+1, \ldots n) \quad (19)$$

Функции φ_{s-l} и ψ_{s-l} обращаются в нуль при $\mu = 0$.

Из результатов предыдущего анализа следует, что функции $x^{(r)*}(\tau)$, входящие в периодическое решение системы (1), в случае разных, но частично несоизмеримых частот порождающей системы можно разбить на две группы. К функциям первой группы относятся функции с индексами $r = 1, \ldots, l$, т. е. с индексами соизмеримых частот, отвечающих периодическому решению с периодом T_0. Эти функции являются аналитическими функциями начальных данных своей группы и параметра μ. Функции второй группы с индексами $r = l + 1, \ldots, n$ также являются аналитическими функциями начальных данных функций первой группы и параметра μ, а, кроме того, линейными функциями собственных начальных данных β_r и γ_r. Последние, в свою очередь, суть аналитические функции начальных данных первой группы и параметра μ, уничтожающиеся при $\mu = 0$.

Возвращаясь к функциям $C_m^{(r)}(t)$, из формулы (9) легко видеть, что эти функции тоже не зависят от β_s и γ_s, если $s = l + 1, \ldots, n$. Установленные свойства функций $x^{(r)*}(t)$ и их начальных данных позволяют получить простой способ построения периодических решений квазилинейных автономных систем с разными, но частично несоизмеримыми частотами порождающего решения. Для двух степеней свободы этот способ изложен в работе [2].

Заметим, что структура периодических решений квазилинейной неавтономной системы, составленной из n уравнений второго порядка, рассматривалась в работах [4,5]. В этих работах не было доказано, что функции $C_m^{(r)}(t)$ не зависят от β_s и γ_s при $s = l + 1, \ldots, n$, хотя производные от этих функций по β_s и γ_s в ряде формул приняты равными нулю.

Поступила 15 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. Об одном свойстве периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
2. Проскуряков А. П. К построению периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
3. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
4. Плотникова Г. В., Байнов Д. Д. Периодические колебания механической системы с n-степенями свободы при наличии резонансных частот. Rev. Roumaine Sci. Techn. Sér. Méch. appl., 1965, T. 10, № 2.
5. Байнов Д. Д. Периодични колебания на неавтономна квазилинейна система с n-степени на свобода при наличието на резонансни частоти. Изв. на Матем. инст. Бълг. АН, 1966, т. 9.