ДВА ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Б. И. Коносевич, Е. В. Поздняковнч
(Донецк)

В настоящее время известно четырнадцать точных частных решений указанной задачи. Все они перечислены в статье [1] и там же отмечен тот факт, что уравнения движения тела существенно упрощаются, когда одна из специальных осей координат [2] совпадает с главной осью и гиростатический момент ортогонален этой оси. В таком случае задача сводится к системе четырех сравнительно простых дифференциальных уравнений относительно пяти переменных, связанных алгебраическим соотношением. Эта система допускает два точных решения, представимых в виде отрезков тригонометрических рядов по некоторой переменной τ, связанной со временем дифференциальной зависимостью.

1. При условиях $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $b_2 = 0$ уравнения (1.1) — (1.4) работы [1] имеют вид

$$x^{\cdot} = -z\,[(a_1 - a_2)y + bx], \qquad y^{\cdot} = z\,[(a - a_2)\,x + by] - \gamma_2$$
$$\gamma^{\cdot} = a_2 z\gamma_1 - (a_1 y + bx)\,\gamma_2, \qquad \gamma_1^{\cdot} = (ax + by)\gamma_2 - a_2 z\gamma$$
$$ax^2 + a_1 y^2 + a_2 z^2 + 2bxy - 2\,\gamma = 2E, \qquad x\gamma + y\gamma_1 + z\gamma_2 = k \tag{1.1}$$

Следуя [3], вводим переменную τ:

$$d\tau = a_2 z dt$$

Полагая $U\,(\tau) = \gamma_2\,/\,a_2 z$, $h = 2E\,/\,a_2$ и относя величины a, a_1, b, k, γ, γ_1, γ_2 к a_2, приходим к системе уравнений, описывающих движение тела в рассматриваемом случае

$$dx\,/\,d\tau = -(a_1 - 1)y - bx, \qquad dy\,/\,d\tau = (a - 1)x + by - U$$
$$d\gamma\,/\,d\tau = \gamma_1 - (a_1 y + bx)U, \qquad d\gamma_1\,/\,d\tau = -\gamma + (ax + by)U \tag{1.2}$$

$$x\gamma + y\gamma_1 + (h + 2\gamma - ax^2 - a_1 y^2 - 2\,bxy)\;U = k \tag{1.3}$$

Последнее соотношение получено исключением z^2 из интегралов (1.1). Переменные z и γ_2 определяются по формулам

$$z^2 = h + 2\gamma - ax^2 - a_1 y^2 - 2\,bxy, \quad \gamma_2 = zU \tag{1.4}$$

Имеет место интеграл

$$\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \Gamma^2 \quad (\Gamma = mgr_c\,/\,a_2) \tag{1.5}$$

Здесь r_c — расстояние от неподвижной точки до центра масс тела, mg — его вес.

Вместо (1.3) в дальнейшем использовано эквивалентное ему, в силу (1.2), соотношение

$$y\,d\gamma\,/\,d\tau - x\,d\gamma_1\,/\,d\tau + (2\,\gamma + h)\;U = k \tag{1.6}$$

2. Замечая, что при заданном $U = U\,(\tau)$ система (1.2) линейна относительно x, y, γ, γ_1, зададим функцию U в виде

$$U = \sum_{n=-2}^{2} U_n e^{in\nu\tau} \tag{2.1}$$

При этом уравнения (1.2) определяют x, y, γ, γ_1 в зависимости от τ:

$$x = \sum_{n=-2}^{2} x_n e^{in\nu\tau}, \quad y = \sum_{n=-2}^{2} y_n e^{in\nu\tau}, \quad \gamma = \sum_{n=-4}^{4} \gamma_n e^{in\nu\tau}, \quad \gamma_1 = \sum_{n=-4}^{4} \gamma_n' e^{in\nu\tau} \tag{2.2}$$

Здесь x_n, y_n, γ_n, γ_n' — известные функции a, a_1, b, U_m, ν. Обозначив через μ и c выражения

$$\mu = (a - 1)\,(a_1 - 1) - b^2, \; c = b^2 - a\,(a_1 - 1) \tag{2.3}$$

выпишем соответствующие формулы

$$x_n=\frac{1-a_1}{n^2\nu^2-\mu}U_n,\qquad y_n=\frac{b+i\nu n}{n^2\nu^2-\mu}U_n\qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2)\tag{2.4}$$

$$\gamma_n=\frac{1}{n^2\nu^2-1}\sum_{s=n-2}^{2}\frac{i\nu b\,(n-s)+(c+a_1\nu^2 ns)}{s^2\nu^2-\mu}U_sU_{n-s},\quad \gamma_{-n}=\bar\gamma_n\tag{2.5}$$

$$\gamma_n'=\frac{1}{n^2\nu^2-\mu}\sum_{s=n-2}^{2}\frac{b\,(\nu^2 ns-1)-i\nu\,(cn+a_1s)}{s^2\nu^2-\mu}U_sU_{n-s},\quad \gamma_{-n}'=\overline{\gamma_n'}\qquad (n=0,1,2,3,4)$$

В частности

$$\gamma_4=\frac{2i\nu b-(c+8a_1\nu^2)}{(16\nu^2-1)(4\nu^2-\mu)}U_2^2,\qquad \gamma_4'=\frac{b\,(8\nu^2-1)-2i\nu\,(a_1+2c)}{(16\nu^2-1)(4\nu^2-\mu)}U_2^2$$

$$\gamma_3=\frac{1}{9\nu^2-1}\left[\frac{i\nu b-(c+6a_1\nu^2)}{4\nu^2-\mu}+\frac{2i\nu b-(c+3a_1\nu^2)}{\nu^2-\mu}\right]U_1U_2\tag{2.6}$$

$$\gamma_3'=\frac{1}{9\nu^2-1}\left[\frac{b\,(6\nu^2-1)-i\nu\,(2a_1+c)}{4\nu^2-\mu}+\frac{b\,(3\nu^2-1)-i\nu\,(a_1+3c)}{\nu^2-\mu}\right]U_1U_2$$

Подставляем (2.1), (2.2) в (1.6) и требуем, чтобы получающееся при этом равенство вида

$$\sum_{n=-6}^{6}R_ne^{in\nu\tau}=k$$

где R_n зависят от x_m, y_m, γ_m, γ_m', U_m, h, ν, было тождеством по τ. Поскольку $R_{-n}=\bar R_n$, то достаточно положить $k=R_0$, $R_n=0$ $(n=1,\ldots,6)$. Условие $R_6=0$ имеет вид $2\,i\nu\gamma_4y_2-2\,i\nu\gamma_4'x_2+\gamma_4U_2=0$. Развертывая его по формулам (2.4), (2.6), устанавливаем, что

$$b=0,\quad \nu^2=a\,(a-1)\,(a_1-1)\,/\,4\,(2a-a_1)\tag{2.7}$$

Но при $b=0$ уравнение $R_5=0$, т. е.

$$4\,i\nu\gamma_4y_1+3\,i\nu\gamma_3y_2-4\,i\nu\gamma_4'x_1-3\,i\nu\gamma_3'x_2+2\,\gamma_4U_1+2\gamma_3U_2=0,$$

в силу (2.4), (2.6), равносильно следующему:

$$\begin{gathered}4\nu^6\,(346aa_1-180a_1^2-346a+173a_1)+\nu^4\,(a_1-1)\,(-710a^2a_1+216aa_1^2+710a^2+\\+501aa_1-216a_1^2-821a+268a_1)+\nu^2\,(a_1-1)^2\,(a-1)\,(82a^2a_1-82a^2-82aa_1+\\+136a-17a_1)-6a\,(a_1-1)^3\,(a-1)^2=0\end{gathered}$$

Отсюда после подстановки ν^2 из (2.7) получаем

$$\begin{gathered}a_1^3\,(16a^2-16a+4)+a_1^2a\,(-50a^2+33a-4)+\\+a_1a^2\,(34a^2+17a-16)+a^3\,(-34a+16)=0\end{gathered}$$

Последнее уравнение имеет три корня $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$, $a_1^{(3)}$. Значения $a_1^{(1)}=a$ и $a_1^{(2)}=2a/(2a-1)$ дают особенность в знаменателях выражений (2.4), (2.5): $4\nu^2-\mu=0$ при $a_1=a_1^{(1)}$ и $16\nu^2-1=0$ при $a_1=a_1^{(2)}$; решений рассматриваемого класса при этом не существует.

При $a_1=a_1^{(3)}$ получаем

$$a_1^{(3)}=\frac{a\,(17a-8)}{4\,(2a-1)},\qquad \nu^2=\frac{(1-a)(17a^2-16a+4)}{4a}\tag{2.8}$$

Поскольку $\nu^2>0$ и, кроме того, должны выполняться неравенства треугольника для моментов инерции, имеющие здесь вид

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a}\geqslant1,\qquad \frac{1}{a}+1\geqslant\frac{1}{a_1},\qquad \frac{1}{a_1}+1\geqslant\frac{1}{a}$$

находим, что a принимает значения из промежутков

$$\frac{17-\sqrt{17}}{34}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{273}-1}{34},\qquad \frac{17+\sqrt{17}}{34}\leqslant a<1\tag{2.9}$$

3. Прежде чем перейти к исследованию оставшихся уравнений $R_n = 0$ ($n = 1, \ldots, 4$), удобно выделить величины U_m в выражениях x_n, y_n, γ_n, γ_n'. Вводим X_m, Y_m, $\Gamma_{l,m}$, $\Gamma'_{l,m}$ так, чтобы (3.1)

$$x_n = X_n U_n, \quad y_n = i\nu Y_n U_n, \quad \gamma_n = \sum_s \Gamma_{s,\, n-s} U_s U_{n-s}, \quad \gamma_n' = i\nu \sum_s \Gamma'_{s,\, n-s} U_s U_{n-s}$$

Сравнивая эти выражения с (2.4), (2.5), устанавливаем, что (3.2)

$$X_2 = X_{-2} = \frac{1-a_1}{4\nu^2-\mu}, \quad X_1 = X_{-1} = \frac{1-a_1}{\nu^2-\mu}, \quad X_0 = \frac{a_1-1}{\mu}$$

$$Y_2 = -Y_{-2} = \frac{2}{4\nu^2-\mu}, \quad Y_1 = -Y_{-1} = \frac{1}{\nu^2-\mu}, \quad Y_0 = 0$$

$$\Gamma_{2,2} = \Gamma_{-2,-2} = -\frac{c+8a_1\nu^2}{(16\nu^2-1)(4\nu^2-\mu)}$$

$$\Gamma_{1,2} = \Gamma_{-2,-1} = -\frac{1}{9\nu^2-1}\left(\frac{c+6a_1\nu^2}{4\nu^2-\mu} + \frac{c+3a_1\nu^2}{\nu^2-\mu}\right)$$

$$\Gamma_{0,2} = \Gamma_{-2,0} = \frac{1}{4\nu^2-1}\left(\frac{c}{\mu} - \frac{c+4a_1\nu^2}{4\nu^2-\mu}\right), \qquad \Gamma_{1,1} = \Gamma_{-1,-1} = -\frac{c+2a_1\nu^2}{(4\nu^2-1)(\nu^2-\mu)}$$

$$\Gamma_{-1,2} = \Gamma_{-2,1} = -\frac{1}{\nu^2-1}\left(\frac{c+2a_1\nu^2}{4\nu^2-\mu} + \frac{c-a_1\nu^2}{\nu^2-\mu}\right)$$

$$\Gamma_{0,1} = \Gamma_{-1,0} = \frac{1}{\nu^2-1}\left(\frac{c}{\mu} - \frac{c+a_1\nu^2}{\nu^2-\mu}\right)$$

$$\Gamma_{-2,2} = \frac{2c}{4\nu^2-\mu}, \quad \Gamma_{-1,1} = \frac{2c}{\nu^2-\mu}, \quad \Gamma'_{2,2} = -\Gamma'_{-2,-2} = -\frac{2(a_1+2c)}{(16\nu^2-1)(4\nu^2-\mu)}$$

$$\Gamma_{0,0} = -\frac{c}{\mu}, \quad \Gamma_{1,2}' = -\Gamma'_{-2,-1} = -\frac{1}{9\nu^2-1}\left(\frac{2a_1+3c}{4\nu^2-\mu} + \frac{a_1+3c}{\nu^2-\mu}\right)$$

$$\Gamma_{0,2}' = -\Gamma'_{-2,1} = \frac{2}{\nu^2-1}\left(\frac{c}{\mu} - \frac{a_1+c}{4\nu^2-\mu}\right), \quad \Gamma_{1,1}' = -\Gamma'_{-1,-1} = -\frac{a_1+2c}{(4\nu^2-1)(\nu^2-\mu)}$$

$$\Gamma'_{-1,2} = -\Gamma'_{-2,1} = \frac{-1}{1\nu^2-1}\left(\frac{2a_1+c}{4\nu^2-\mu} + \frac{c-a_1}{\nu^2-\mu}\right)$$

$$\Gamma_{0,1}' = -\Gamma'_{-1,0} = \frac{1}{\nu^2-1}\left(\frac{c}{\mu} - \frac{a_1+c}{\nu^2-\mu}\right), \qquad \Gamma'_{-2,2} = \Gamma'_{-1,1} = \Gamma_{0,0}' = 0$$

Все введенные величины зависят только от a посредством формул (2.3), (2.8). Оставшиеся уравнения $R_n = 0$ ($n = 1, \ldots, 4$) записываем в виде

$$\alpha_1 U_2 U_0 + \alpha_2 U_1^2 = 0, \quad \beta_1 U_2^2 U_{-1} + \beta_2 U_2 U_1 U_0 + \beta_3 U_1^3 = 0$$
$$\delta_1 U_2^2 U_{-2} + \delta_2 U_2 U_1 U_{-1} + \delta_3 U_2 U_0^2 + \delta_4 U_1^2 U_0 + h U_2 = 0 \qquad (3.3)$$
$$\varepsilon_1 U_2 U_0 U_{-1} + \varepsilon_2 U_2 U_1 U_{-2} + \varepsilon_3 U_1^2 U_{-1} + \varepsilon_4 U_1 U_0^2 + h U_1 = 0$$

Здесь

$$\alpha_1 = 2\nu^2(-\Gamma_{0,2}Y_2 + 2\Gamma'_{2,2}X_0 + \Gamma'_{0,2}X_2) + 2(\Gamma_{2,2} + \Gamma_{0,2})$$

$$\alpha_2 = \nu^2(-3\Gamma_{1,2}Y_1 - 2\Gamma_{1,1}Y_2 + 3\Gamma'_{1,2}X_1 + 2\Gamma'_{1,1}X_2) + 2(\Gamma_{1,2} + \Gamma_{1,1})$$

$$\beta_1 = \nu^2(-4\Gamma_{2,2}Y_{-1} - \Gamma_{-1,2}Y_2 + 4\Gamma'_{2,2}X_{-1} + \Gamma'_{-1,2}X_2) + 2(\Gamma_{2,2} + \Gamma_{-1,2})$$

$$\beta_2 = \nu^2(-2\Gamma_{0,2}Y_1 - \Gamma_{0,1}Y_2 + 3\Gamma'_{1,2}X_0 + 2\Gamma'_{0,2}X_1 + \Gamma'_{0,1}X_2) + 2(\Gamma_{1,2} + \Gamma_{0,2} + \Gamma_{0,1})$$

$$\beta_3 = 2\nu^2(-\Gamma_{1,1}Y_1 + \Gamma'_{1,1}X_1) + 2\Gamma_{1,1}$$

$$\delta_1 = 4\nu^2(-\Gamma_{2,2}Y_{-2} + \Gamma'_{2,2}X_{-2}) + 2(\Gamma_{2,2} + \Gamma_{-2,2}) \qquad (3.4)$$

$$\delta_2 = \nu^2(-3\Gamma_{1,2}Y_{-1} - \Gamma_{-1,2}Y_1' + 3\Gamma'_{1,2}X_{-1} + \Gamma'_{-1,2}X_1) + 2(\Gamma_{1,2} + \Gamma_{-1,2} + \Gamma_{-1,1})$$

$$\delta_3 = 2\nu^2\Gamma'_{0,2}X_0 + 2(\Gamma_{0,2} + \Gamma_{0,0}), \qquad \delta_4 = \nu^2(-\Gamma_{0,1}Y_1 + 2\Gamma'_{1,1}X_0 + \Gamma'_{0,1}X_1) + {}$$
$$+ 2(\Gamma_{1,1} + \Gamma_{0,1})$$

$$\varepsilon_1 = \nu^2(-2\Gamma_{0,2}Y_{-1} + \Gamma_{-1,0}Y_2 + 2\Gamma'_{0,2}X_{-1} + \Gamma'_{-1,2}X_0 - \Gamma'_{-1,0}X_2) + 2(\Gamma_{0,2} + \Gamma_{-1,2} + \Gamma_{-1,0})$$

$$\varepsilon_2 = \nu^2(-3\Gamma_{1,2}Y_{-2} + \Gamma_{-2,1}Y_2 + 3\Gamma'_{1,2}X_{-2} - \Gamma'_{-2,1}X_2) + 2(\Gamma_{1,2} + \Gamma_{-2,2} + \Gamma_{-2,1})$$

$$\varepsilon_3 = 2\nu^2(-\Gamma_{1,1}Y_{-1} + \Gamma'_{1,1}X_{-1}) + 2(\Gamma_{1,1} + \Gamma_{-1,1}), \quad \varepsilon_4 = \nu^2\Gamma_{0,1}X_0 + 2(\Gamma'_{0,1} + \Gamma_{0,0})$$

4. Первые три уравнения (3.3) определяют квадраты модулей U_n:

$$U_{-2}U_2 = |U_{-2}|^2 = |U_2|^2 = \frac{(\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_3)^2}{\alpha_2^2\beta_1^2} U_0^2$$

$$U_{-1}U_1 = |U_{-1}|^2 = |U_1|^2 = \frac{\alpha_1(\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_3)}{\alpha_2^2\beta_1} U_0^2 \qquad (4.1)$$

$$U_0^2 = \frac{\alpha_2^2\beta_2^2 h}{\alpha_2\beta_1^2(\alpha_1\delta_4 - \alpha_2\delta_3) - \alpha_1\beta_1\delta_2(\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_3) - \delta_1(\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_3)^2}$$

Величины U_n, вообще говоря, комплексные

$$U_n = |U_n| \exp i\varphi_n, \qquad U_{-n} = \overline{U_n} \qquad (n = 1, 2)$$

и их аргументы φ_n, как видно из первого уравнения (3.3), связаны соотношениями

$$\varphi_2 = \pi + \arg\alpha_2 - \arg\alpha_1 + 2\varphi_1, \qquad \varphi_{-2} = \pi - \arg\alpha_2 + \arg\alpha_1 - 2\varphi_1$$

Пользуясь автономностью системы (1.2), постоянную φ_1 включаем в $\nu\tau$, считая тем самым U_n действительными функциями a. Следовательно

$$U = \sum_{n=-2}^{2} |U_n| \exp i(n\nu\tau + \varphi_n) = U_0 + 2U_1\cos\nu\tau + 2U_2\cos 2\nu\tau$$

причем можно считать, что $U_0 > 0$, $U_1 > 0$.

Итак, решение уравнений (1.2), (1.6) имеет вид (см. (2.2), (3.1))

$$U = \sqrt{h}\sum_{n=0}^{2}(U_n)\cos n\nu\tau, \qquad x = \sqrt{h}\sum_{n=0}^{2}(x_n)\cos n\nu\tau, \qquad y = \sqrt{h}\sum_{n=1}^{2}(y_n)\sin n\nu\tau$$

$$\gamma = h\sum_{n=0}^{4}(\gamma_n)\cos n\nu\tau, \qquad \gamma_1 = h\sum_{n=1}^{4}(\gamma_n')\sin n\nu\tau$$

$$(U_n) = \frac{2U_n}{\sqrt{h}}, \quad (x_n) = \frac{2x_n}{\sqrt{h}}, \quad (y_n) = \frac{2y_n}{i\sqrt{h}} \qquad (n = -1, -2)$$

$$(\gamma_n) = \frac{2\gamma_n}{h}, \quad (\gamma_n') = \frac{2\gamma_n'}{ih} \qquad (n = -1, -2, -3, -4)$$

$$(U_0) = \frac{U_0}{\sqrt{h}}, \qquad (x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{h}}, \qquad (\gamma_0) = \frac{\gamma_0}{h}$$

Переменные z^2 и γ_2^2 определяются из соотношений (1.4)

$$z^2 = h\sum_{n=0}^{4}(z_n)\cos n\nu\tau, \qquad \gamma_2^2 = h^2\sum_{n=0}^{8}(\gamma_n'')\cos n\nu\tau$$

Из условия действительности z заключаем, что $\nu\tau$ изменяется в пределах

$$\Psi_1 + 2m\pi \leqslant \nu\tau \leqslant \Psi_2 + 2m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Интеграл (1.5) дает $\varkappa^2 h^2 = \Gamma^2$, т. е. связь между h и Γ.

Зависимость от t устанавливаем из соотношения $d\tau = a_2 z dt$:

$$t' = a_2 t = \frac{1}{\sqrt{h}}\int_{\tau_1}^{\tau}\left[\sum_{n=0}^{4}(z_n)\cos n\nu\sigma\right]^{-1/2} d\sigma$$

Завершая построение решения, укажем условие, которому удовлетворяет a. Подставим (4.1) в последнее уравнение (3.3). Получаем уравнение

$$(\varepsilon_2 - \delta_1)(\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_3)^2 + \beta_1(\alpha_1\varepsilon_3 - \alpha_2\varepsilon_1 + \alpha_1\delta_2)(\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_3) +$$
$$+ \alpha_2\beta_1^2(\alpha_2\varepsilon_4 + \alpha_1\delta_4 - \alpha_2\delta_3) = 0$$

которое имеет в промежутках (2.9) три корня $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$. Значение $a^{(3)} = 0.4$ следует отбросить, поскольку при этом $\Gamma = 0$. Таким образом, найдены два частных решения уравнений (1.2), (1.3), которые являются точными, так как известны выражения (x_n), (y_n), (γ_n), (γ_n'), (z_n), (γ_n''), зависящие от $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ (см. (2.3), (2.8), (3.2), (3.4), (4.1), (3.1)).

5. Выпишем эти решения, принимая в качестве $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ их приближенные значения, найденные численными методами.

Первое решение: $a^{(1)} = 0.41190$, $\nu = 0.32385$

$$U = \sqrt{h}\,(2.3910 + 1.5836 \cos \nu\tau - 0.7942 \cos 2\nu\tau)$$

$$x = -\sqrt{h}\,(4.0656 + 4.7056 \cos \nu\tau + 1.8994 \cos 2\nu\tau)$$

$$y = \sqrt{h}\,(3.6551 \sin \nu\tau + 2.9508 \sin 2\nu\tau)$$

$$z^2 = -h\,(2.8001 + 4.6960 \cos \nu\tau + 2.7124 \cos 2\nu\tau + 0.9920 \cos 3\nu\tau + 0.1731 \cos 4\nu\tau)\,10$$

$$\gamma = -h\,(0.5228 + 1.0615 \cos \nu\tau + 1.0048 \cos 2\nu\tau + 0.6263 \cos 3\nu\tau + 0.1763 \cos 4\nu\tau)\,10$$

$$\gamma_1 = h\,(1.0742 \sin \nu\tau + 1.2310 \sin 2\nu\tau + 0.6601 \sin 3\nu\tau + 0.1601 \sin 4\nu\tau)\,10$$

$$\gamma_2^2 = h^3\,(-3.1183 - 5.1569 \cos \nu\tau - 2.7854 \cos 2\nu\tau - 0.7584 \cos 3\nu\tau + 0.1127 \cos 4\nu\tau + 0.1680 \cos 5\nu\tau + 0.0416 \cos 6\nu\tau - 0.0048 \cos 7\nu\tau - 0.0027 \cos 8\nu\tau)\,10^2$$

$$.026092\, h^2 = \Gamma^2, \quad 2.7431 + 2m\pi \leqslant \nu\tau \leqslant 3.5401 + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Второе решение: $a^{(2)} = 0.70819$, $\nu = 0.35086$

$$U = \sqrt{h}\,(2.5242 + 0.9663 \cos \nu\tau + 0.4598 \cos 2\nu\tau)\,10^{-1}$$

$$x = -\sqrt{h}\,(8.6501 + 2.0852 \cos \nu\tau + 0.4701 \cos 2\nu\tau)\,10^{-1}$$

$$y = -\sqrt{h}\,(1.0197 \sin \nu\tau + 0.4597 \sin 2\nu\tau)\,10^{-1}$$

$$z^2 = h\,(1.1811 - 4.6670 \cos \nu\tau - 1.5776 \cos 2\nu\tau - 0.5912 \cos 3\nu\tau - 0.0264 \cos 4\nu\tau)\,10^{-1}$$

$$\gamma = -h\,(1.6253 + 0.9811 \cos \nu\tau + 0.4685 \cos 2\nu\tau + 0.3012 \cos 3\nu\tau + 0.0184 \cos 4\nu\tau)\,10^{-1}$$

$$\gamma_1 = h\,(-0.9572 \sin \nu\tau + 0.4482 \sin 2\nu\tau + 2.3858 \sin 3\nu\tau + 0.0764 \sin 4\nu\tau)\,10^{-2}$$

$$\gamma_2^2 = h^2\,(0.6549 + 3.8038 \cos \nu\tau + 2.2812 \cos 2\nu\tau + 1.4602 \cos 3\nu\tau + 0.4868 \cos 4\nu\tau + 0.1492 \cos 5\nu\tau + 0.0252 \cos 6\nu\tau + 0.0037 \cos 7\nu\tau + 0.0001 \cos 8\nu\tau)\,10^{-2}$$

$$).026574 h^2 = \Gamma^2, \quad 1.0099 + 2m\pi \leqslant \nu\tau \leqslant 5.2733 + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Авторы благодарят П. В. Харламова за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 9 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Харламова Е. И. Сведение задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
2. Харламов П. В. Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
3. Харламова Е. И. Об одном частном решении уравнений Эйлера — Пуассона. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.

СТРУКТУРА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В СЛУЧАЕ РАЗНЫХ, НО ЧАСТИЧНО НЕСОИЗМЕРИМЫХ ЧАСТОТ

А. П. Проскуряков (Москва)

Изучается структура периодических решений квазилинейной автономной системы в случае, когда часть частот порождающей системы соизмерима между собой, но несоизмерима с остальными частотами. Показано, что функции, представляющие квазинормальные координаты системы, разделяются на две группы, каждая из которых обладает определенными свойствами.

Рассмотрим квазилинейную автономную систему с n степенями свободы

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} x_k^{\cdot\cdot} + c_{ik} x_k) = \mu F_i (x_1, \ldots, x_n, x_1^{\cdot}, \ldots, x_n^{\cdot}, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki} \tag{1}$$