ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ ГАМИЛЬТОНА

Л. Г. Гликман (Алма-Ата)

В статье [1] интегрировалось уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + F = 0$$

где S — функция действия, а F — заданная функция переменных r и t; при некоторых условиях, наложенных на функцию F, был найден полный интеграл этого уравнения. Ниже этот прием [1] распространяется на случай многих переменных.

Решение уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 + F(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0 \tag{1}$$

будем искать в виде

$$S = S_0 + S_1, \qquad S_0 = \sum_{i=1}^{n} X_{0i}(x_i)\, T_i(t), \qquad S_1 = \sum_{i=1}^{n} X_{1i}(x_i) + T_{n+1}(t) \tag{2}$$

Введем новые переменные $x_1 = q_1 f$, $x_2 = q_2 f$, ..., $x_n = q_n f$; здесь $f = f(t)$ — любая дважды дифференцируемая функция t. Подставив (2) в (1), получим

$$\frac{1}{f^2}\frac{\partial S_0}{\partial t} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{1}{f^2}F + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial S_1}{\partial x_i}\left(2\frac{\partial S_0}{\partial x_i} + \frac{x_i}{f^3}\frac{df}{dt}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial S_0}{\partial x_i}\frac{x_i}{f^3}\frac{df}{dt} + \left(\frac{\partial S_0}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial x_i}\right)^2\right] = 0 \tag{3}$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при $\partial S_1 / \partial x_i$ были равны нулю. Тогда найдем

$$S_0 = -\frac{r^2}{4f^3}\frac{df}{dt} \qquad \left(r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \tag{4}$$

Используя это выражение, уравнение (3) преобразуем к виду

$$\frac{1}{f^2}\frac{dT_{n+1}}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dX_{1i}}{dx_i}\right)^2 + \frac{1}{f^2}F - \frac{r^2}{4}\left[\frac{1}{f^5}\frac{d^2 f}{dt^2} - \frac{2}{f^6}\left(\frac{df}{dt}\right)^2\right] = 0 \tag{5}$$

В последнем уравнении переменные разделяются, если (6)

$$F = f^2[\psi_1(x_1) + \psi_2(x_2) + \ldots + \psi_n(x_n) + \eta(t)] + \frac{r^2}{4}\left[\frac{1}{f^3}\frac{d^2 f}{dt^2} - \frac{2}{f^4}\left(\frac{df}{dt}\right)^2\right]$$

Здесь $\psi_1(x_1)$, ..., $\psi_n(x_n)$, $\eta(t)$ — произвольные функции. Полный интеграл уравнения (1) в случае, когда функция F удовлетворяет условию (6), имеет вид

$$S = -\frac{r^2}{4f^3}\frac{df}{dt} - \int (C_1 + \eta(t)) f^2 dt \pm \int \sqrt{C_1 - C_2 - \psi_1(x_1)}\, dx_1 \pm$$
$$\pm \int \sqrt{C_2 - C_3 - \psi_2(x_2)}\, dx_2 \pm \ldots \pm \int \sqrt{C_{n-1} - C_n - \psi_{n-1}(x_{n-1})}\, dx_{n-1} \pm$$
$$\pm \int \sqrt{C_n - \psi_n(x_n)}\, dx_n + C_{n+1}$$

где C_1, C_2, ... C_{n+1} — произвольные постоянные. Как видно из последнего выражения, решение уравнения Гамильтона — Якоби (1), полученное предложенным методом, не находится, вообще говоря, методом разделения переменных.

Поступила 27 XI 1967

Институт ядерной физики АН КазССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гликман Л. Г., Якушев Е. М. Один случай интегрируемости уравнения Гамильтона — Якоби. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.