

О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В СЛУЧАЕ Л. Н. СРЕТЕНСКОГО

А. М. Ковалев

(Донецк)

Одним из наиболее общих случаев интегрируемости уравнений Эйлера является случай Гесса [1]. Л. Н. Сретенский [2,3] обобщил этот результат на случай гиростата, и, взяв в качестве переменных углы Эйлера, нашел, что углы прецессии и нутации есть эллиптические функции времени, а для определения угла собственного вращения получается линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двоякопериодическими коэффициентами.

Ниже эта задача изучается в специальной системе координат, предложенной П. В. Харламовым [4,5], что значительно упрощает исследование и позволяет привести задачу к более простому линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Указан случай, в котором это уравнение интегрируется в элементарных функциях, и дана геометрическая картина движения тела в этом случае.

§ 1. В специальных осях, как показал П. В. Харламов [6], условия, при которых существует решение Л. Н. Сретенского, и четвертый интеграл задачи принимают вид

$$a_2 = a_1 = a_*, \quad \lambda_1 = (b_1 / a_*)n, \quad \lambda_2 = 0, \quad b_2 = 0; \quad x = n$$

Уравнения и интегралы движения при этом таковы

$$\begin{aligned} dy / dt &= (an + b_1y)z - a_* z (n + \lambda) - v_2\Gamma \\ dz / dt &= -(an + b_1y)(y + \lambda_1) + (a_*y + b_1n)(n + \lambda) + v_1\Gamma \\ \frac{1}{2} [n(an + b_1y) + y(bn + a_*y) + a_*z^2] - v\Gamma &= E \\ (n + \lambda)v + (y + \lambda_1)v_1 + zv_2 &= k, \\ v^2 + v_1^2 + v_2^2 &= 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

При значении $b_1=0$, получается случай Лагранжа, поэтому в дальнейшем считаем $b_1 \neq 0$. Введем безразмерные переменные y', z', τ , положив

$$y + \lambda_1 = \sqrt{\Gamma / b_1}y', \quad z = \sqrt{\Gamma / b_1}z', \quad t = \tau / \sqrt{\Gamma b_1}$$

и положим

$$\begin{aligned} d' &= \frac{an - b_1\lambda_1 - a_*(n + \lambda)}{\sqrt{\Gamma b_1}}, \quad c' = 2 \frac{b_1}{a_*}, \quad k' = k \left(\frac{b_1}{\Gamma} \right)^{1/2} \\ h' &= \frac{2E - n(an - b_1\lambda_1)}{2\Gamma}, \quad e' = \left(\frac{b_1}{\Gamma} \right)^{1/2} (n + \lambda) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Тогда (1.1) переписутся

$$y' \dot{=} z(d + y) - v_2, \quad z' \dot{=} -y(d + y) + v_1 \tag{1.3}$$

$$y^2 + z^2 - cv = ch, \quad ev + yv_1 + zv_2 = k$$

$$v^2 + v_1^2 + v_2^2 = 1 \tag{1.4}$$

Для удобства записи штрих в уравнениях (1.3), (1.4) опущен, и точка означает дифференцирование по безразмерному времени τ .

Рассмотрим область изменения параметров задачи. Из (1.2) видно, что d, k, h, e изменяются в бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$. Выразив компоненты гирационного тензора b_1, a_* через тензор инерции и применив неравенства, связывающие моменты инерции, получим ограничение на c . Полагая $A_{11} > A_{22} > A_{33}$, имеем

$$c = \pm 2 \sqrt{(A_{22} - A_{33}) / A_{11}},$$

а так как $A_{22} - A_{33} \leq A_{11}$, то областью изменения параметра c будет отрезок $[-2, 2]$

§ 2. Умножая первое уравнение из (1.3) на y , а второе — на z и складывая их, получим

$$\frac{1}{2} (y^2 + z^2)' = v_1 z - v_2 y \quad (2.1)$$

Из (1.4) находим

$$v_1^2 + v_2^2 = 1 - \left(\frac{y^2 + z^2}{c} - h \right)^2, \quad yv_1 + zv_2 = k - e \left(\frac{y^2 + z^2}{c} - h \right)$$

Подставляя эти значения и (2.1) в тождество получим

$$(y^2 + z^2) (v_1^2 + v_2^2) - (yv_1 + zv_2)^2 = (yv_2 - zv_1)^2$$

получим

$$\left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right)' = - \left((y^2 + z^2) \left[1 - \left(\frac{y^2 + z^2}{c} - h \right)^2 \right] - \left[k + eh - e \frac{y^2 + z^2}{c} \right]^2 \right)^{1/2}$$

Умножая второе уравнение из (1.3) на y и вычитая из него первое уравнение, умноженное на z , приходим к уравнению

$$yz' - zy' = -(y^2 + z^2) (y + d) + yv_1 + zv_2$$

или

$$yz' - zy' = -(y^2 + z^2) \left(y + d + \frac{e}{c} \right) + k + eh$$

Вводим полярные координаты $y = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$. Для определения ρ , φ получим систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho \rho' &= - \sqrt{\rho^2 [1 - (\rho^2/c - h)^2] - [k + eh - \rho^2 e/c]^2} \\ \rho^2 \varphi' &= -\rho^2 (\rho \cos \varphi + d + e/c) + k + eh \end{aligned} \quad (2.2)$$

Зависимость ρ от φ дается уравнением

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\rho^2 (\rho \cos \varphi + d + e/c) - k - eh}{\rho \sqrt{\rho^2 [1 - (\rho^2/c - h)^2] - [k + eh - (\rho^2 e/c)]^2}} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) заменой $y = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ приводится к уравнению Риккати

$$\frac{dy}{d\rho} = - \frac{[k + eh - \rho^2 (d + e/c) + \rho^3] y^2 + k + eh - \rho^2 (d + e/c) - \rho^3}{2\rho \sqrt{\rho^2 [1 - (\rho^2/c - h)^2] - [k + eh - \rho^2 e/c]^2}}$$

Положив в этом уравнении

$$y = - \frac{du}{d\rho} \frac{2\rho \sqrt{\rho^2 [1 - (\rho^2/c - h)^2] - [k + eh - \rho^2 e/c]^2}}{u [k + eh - \rho^2 (d + e/c) + \rho^3]}$$

получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка, коэффициенты которого есть полиномы от ρ

$$P_{11}(\rho) \frac{d^2 u}{d\rho^2} + P_{10}(\rho) \frac{du}{d\rho} + P_9(\rho) u = 0$$

$$P_9(\rho) = [k + eh - \rho^2 (d + e/c) + \rho^3]^2 [k + eh - \rho^2 (d + e/c) - \rho^3]$$

$$P_{10}(\rho) = -4\rho/c^{-2} \{ \rho^9 - 2(d + e/c)\rho^8 + [(2hc - e^2)(d + e/c) + 4(k + eh)]\rho^6 + c^2 [1 - h^2 + 2(e/c)(k + eh)]\rho^5 - 3(2hc - e^2)(k + eh)\rho^4 - 2c^2(k + eh)^2\rho^3 + c^2(k + eh)[(k + eh)(a - 3e/c) - 2(1 - h^2)] + c^2(k + eh)^3 \}$$

$$P_{11}(\rho) = 4\rho^2 [k + eh - \rho^2 (d + e/c) + \rho^3] \{ \rho^2 [1 - (\rho^2/c - h)^2] - [k + eh - \rho^2 e/c]^2 \}$$

Если в уравнении (2.3) положить

$$d + e/c = 0, \quad k + eh = 0 \quad (2.4)$$

то оно интегрируется. Получим

$$\rho = \sqrt{A \sin \vartheta + B}, \quad A = \sqrt{c^2 + 1/4 e^4 - ce^2 h}, \quad B = 1/2 (2hc - e^2) \quad (2.5)$$

$$\vartheta = \frac{2}{c} [\ln | \operatorname{tg} (1/2 \varphi + 1/4 \pi) | + n] \quad (2.6)$$

Здесь n — постоянная интегрирования. Заметим, что [когда φ изменяется в промежутке $(-1/2 \pi, 1/2 \pi)$, ϑ изменяется в интервале $(-\infty, \infty)$].

§ 3. Для получения геометрической картины движения необходимо знать подвижный и неподвижный годографы. Угловая скорость тела в выбранной подвижной системе координат выражается через гирационный тензор следующим образом:

$$\omega_1 = an + b_1 y, \quad \omega_2 = b_1 n + a_* y, \quad \omega_3 = a_* z$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$y', \quad z', \quad \omega_i' \quad (\omega_i = a_* \sqrt{\Gamma / b_1} \omega_i')$$

и обозначим $m' = \sqrt{(b_1 / \Gamma)} (an - b_1 \lambda_1) / a_*$, тогда получим

$$\omega_1 = m + 1/2 cy, \quad \omega_2 = y, \quad \omega_3 = z \quad (3.1)$$

Для удобства записи штрих опущен. При условиях (2.5)¹ система (3.1) принимает вид

$$\omega_1 = 1/2 (e + cy), \quad \omega_2 = y, \quad \omega_3 = z \quad (3.2)$$

Из (3.2) видно, что подвижный годограф лежит в плоскости $\omega_1 = 1/2 (e + c\omega_2)$; проекцией же подвижного годографа на плоскость $\omega_1 = 0$ является кривая (2.5). Исследуем эту кривую.

Из условия вещественности ρ находим, что следует различать следующие случаи:

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad & hc > 0, \quad h^2 > 1, \quad e^2 < 2c(h - \sqrt{h^2 - 1}) \\ 2^\circ. \quad & hc \geq 0, \quad h^2 \leq 1, \quad e^2 \leq 2hc \\ 3^\circ. \quad & hc \geq 0, \quad h^2 \leq 1, \quad e^2 \geq 2hc \\ 4^\circ. \quad & hc \leq 0, \quad h^2 \leq 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отдельно отметим случай 1°, который будет рассмотрен в § 6. Перейдем к изучению случаев (3.3).

1) Рассмотрим проекцию подвижного годографа, когда координата ρ не обращается в нуль ни при одном значении полярного угла ϑ . На параметры c, e, h при этом наложены ограничения (3.3), соответствующие случаю 1°.

В этом случае проекция подвижного годографа симметрична относительно третьей координатной оси, так как $\rho(\varphi) = \rho(\pi - \varphi)$. Из (2.5) находим, что

$$\sqrt{A - B} \leq \rho \leq \sqrt{A + B}$$

т. е. кривая расположена в кольце с центром в начале координат.

Максимальное значение ρ будет достигаться, когда $\sin \vartheta = 1$, а минимальное — когда $\sin \vartheta = -1$. Значения полярного угла φ при этом равны, соответственно

$$\varphi_l^* = \pm 2 \arctg \exp(-n + \pi c(l + 1/4)) - 1/2 \pi, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.4)$$

$$\varphi_{*l} = \pm 2 \arctg \exp(-n + \pi c(l - 1/4)) - 1/2 \pi \quad (3.5)$$

Если

$$\varphi_l^0 = \pm 2 \arctg \exp(-n + 1/2 \pi cl) - 1/2 \pi \quad (3.6)$$

имеем

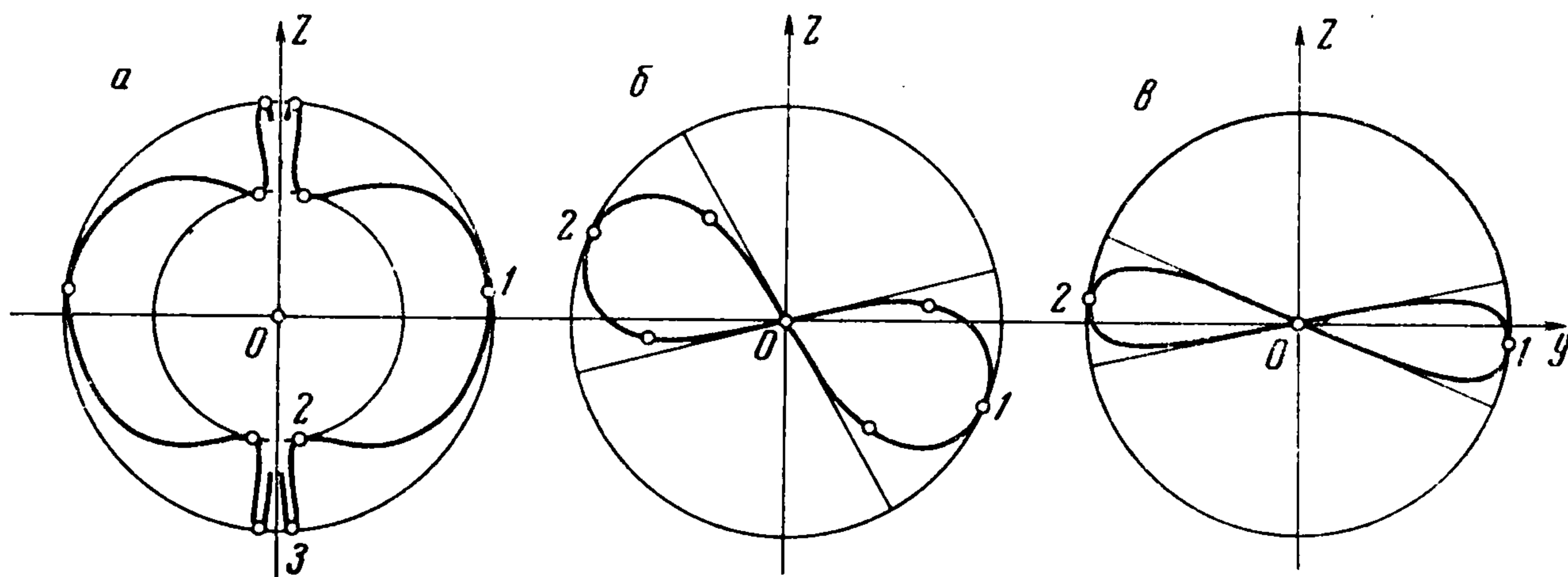
$$\sin \vartheta = 0, \quad \rho = \sqrt{B}$$

Точки максимума, минимума и точки (3.6), правой половины кривой (в выражениях (3.4) — (3.6) надо брать знак плюс перед \arctg) расположены следующим образом:

$$\dots < \varphi_{-2}^0 < \varphi_1^* < \varphi_{-1}^0 < \varphi_{*0} < \varphi_0^0 < \varphi_0^* < \varphi_1^0 < \varphi_0^* < \varphi_{*1} < \varphi_2^0 < \dots$$

Расстояние между этими точками уменьшается по мере приближения φ к $\pm 1/2 \pi$ и в окрестности $\pm 1/2 \pi$ становится бесконечно малым, т. е. в окрестности $\pm 1/2 \pi$ находится бесконечно много рассматриваемых точек. Положение точек (3.4) — (3.6) зависит от значений параметров c, n . Знак φ_0^0 совпадает со знаком n и с увеличением $|n|$ $|\varphi_0^0|$ увеличивается, оставаясь меньше $1/2 \pi$. Параметр c характеризует быстроту стремления точек (3.4) — (3.6) к $\pm 1/2 \pi$: чем меньше e , тем данные точки медленнее приближаются к $\pm 1/2 \pi$.

Выберем φ_0^* в качестве начальной точки и проследим за ходом кривой (2.5). Точка кривой находится при этом на внешней границе кольца. При возрастании φ координата ρ уменьшается, при $\varphi = \varphi_1^0$ достигает значения \sqrt{B} , и, когда $\varphi = \varphi_{*1}$, кривая касается внутренней окружности, после чего ρ начинает возрастать и при $\varphi = \varphi_1^*$ кривая (2.5) вновь касается внешней окружности. Затем цикл повторяется. Когда φ убывает, кривая ведет себя аналогично (фиг. 1, а).



Фиг. 1

2) В случаях 2° , 3° , 4° из (3.3) координата ρ при некотором значении φ обращается в нуль, и проекция подвижного годографа расположена в круге $\rho \leq \sqrt{A+B}$ с центром в начале координат.

Когда $\vartheta = \vartheta_0 = \arcsin(-B/A)$, кривая (2.5) проходит через нулевую точку, которая является особой для данной кривой. Чтобы изучить поведение кривой в окрестности этой точки, рассмотрим зависимость (2.5) от времени, которая дается формулами

$$\rho' = -\cos \vartheta, \quad \varphi' = -\rho \cos \varphi \quad (3.7)$$

Под полярными координатами точки в этом случае будем понимать следующее: координата ρ может быть как положительной, так и отрицательной, а полярный угол φ изменяется от $-\frac{1}{2}\pi$ до $\frac{1}{2}\pi$.

Выберем φ_0^* в качестве начального значения полярного угла и проследим за ходом кривой (2.5) при возрастании времени τ от 0. В начальный момент ρ имеет максимум; кривая касается окружности $\rho = \sqrt{A+B}$. При этом $\varphi' = -\sqrt{A+B} \cos \varphi_0^*$, $\rho' = 0$, и в следующий момент времени ρ начинает убывать вместе с убыванием φ . При

$$\varphi_{0,-1} = 2 \arcsin \operatorname{tg} \exp \left(\frac{1}{2} c \vartheta_0 - n \right) - \frac{1}{2} \pi \quad (3.8)$$

где $\rho = 0$, кривая проходит через начало координат, касаясь луча $\varphi = \varphi_{0,-1}$. В этой точке $\rho' < 0$, и значит в следующий момент времени ρ становится отрицательной, из (3.7) видно, что φ при этом начинает возрастать. Когда $\varphi = \varphi_0^*$, $\rho' = 0$, функция ρ достигает наименьшего значения $-\sqrt{A+B}$ (кривая в этой точке касается окружности $\rho = \sqrt{A+B}$) и при дальнейшем возрастании времени ρ возрастает. При

$$\varphi_{0,1} = 2 \arcsin \operatorname{tg} \exp \left[\frac{1}{2} c (\pi - \vartheta_0) - n \right] - \frac{1}{2} \pi \quad (3.9)$$

кривая (2.5) снова проходит через нулевую точку, касаясь луча $\varphi = \varphi_{0,1}$, в дальнейшем ρ становится положительной и φ начинает убывать. Затем при

$$\tau = T = \int_{\vartheta_0}^{\pi - \vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{A \sin \vartheta + B}}$$

кривая (2.5) достигает начальной точки.

Проекция подвижного годографа представляет собой замкнутую, симметричную относительно начала координат кривую, которая имеет в начале координат двойную точку. Если параметры выбраны так, что $\varphi_0^* = 0$, то кривая (2.5) будет симметрична относительно координатных осей y, z .

В зависимости от n положение кривой меняется: чем больше $|n|$, тем больше кривая наклонена к оси y и тем меньше центральный угол, в котором заключена кривая, знак угла наклона совпадает со знаком n .

Кривая (2.5) в случае 2° (фиг. 1, б) отличается от кривой в случаях $3^\circ, 4^\circ$ (фиг. 1, в) тем, что в случае 2° принимает значения φ_0^0, φ_1^0 , а в случаях $3^\circ, 4^\circ$ — нет, так как при этом $\varphi_0^0 < \varphi_{0,-1}$ и $\varphi_1^0 > \varphi_{0,1}$.

§ 4. Для построения неподвижного годографа воспользуемся кинематическими уравнениями П. В. Харламова [4]

$$\begin{aligned} \omega_\zeta(\sigma) &= \omega_1(\sigma)v_1(\sigma) + \omega_2(\sigma)v_2(\sigma) + \omega_3(\sigma)v_3(\sigma) \\ \omega_\rho^2(\sigma) &= \omega_1^2(\sigma) + \omega_2^2(\sigma) + \omega_3^2(\sigma) - \omega_\zeta^2(\sigma) \end{aligned}$$

$$\omega_\rho^2(\sigma) \frac{d\alpha}{d\sigma} = \begin{vmatrix} v_1(\sigma) & v_2(\sigma) & v_3(\sigma) \\ \omega_1(\sigma) & \omega_2(\sigma) & \omega_3(\sigma) \\ d\omega_1/d\sigma & d\omega_2/d\sigma & d\omega_3/d\sigma \end{vmatrix}$$

Из этих уравнений, принимая φ в качестве независимого переменного σ , имеем

$$\omega_\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^2}{c} - h \right) (c\rho \cos \varphi - e) - eh \quad (4.1)$$

$$\omega_\rho^2 = \rho^2 + \frac{1}{4} (e + c\rho \cos \varphi)^2 - \omega_\zeta^2 \quad (4.2)$$

$$\frac{d\alpha}{d\vartheta} = \frac{1}{2\omega_\rho^2} \left[\frac{eA^2 \cos^2 \vartheta}{2c\rho} + \rho^2 \cos \varphi \left(A \sin \vartheta - \frac{1}{2} c^2 v_1 \right) \right] \quad (4.3)$$

$$v_1 = \frac{1}{c} (-e\rho \cos \varphi \pm A \sin \varphi \cos \vartheta) \quad (4.4)$$

Здесь ρ определяется равенством (2.5), зависимость φ от ϑ находится из (2.6). Знак в (4.4) определяется из начальных условий.

Уравнения (4.1) — (4.2) определяют меридиан поверхности вращения, на которой лежит неподвижный годограф. Изучим влияние параметров c, e, h на вид неподвижного годографа. Из уравнений (4.1) — (4.4) видно, что одновременная замена c, e, h на $-c, -e, -h$ не меняет вида меридиана и кривой (2.5), а направление изменения угла α при этом меняется на противоположное. Если в (4.1) — (4.4) вместо e положить $-e$, то вид неподвижного годографа не изменится, если в этих выражениях вместо $\cos \varphi$ положить $-\cos \varphi$, т. е. часть неподвижного годографа, соответствовавшая ранее правой половине кривой (2.5) ($\cos \varphi > 0$), при замене e на $-e$ соответствует уже левой половине этой кривой.

Из этого следует, что неподвижный годограф достаточно рассмотреть в случаях (3.3), считая $c > 0, e > 0$.

1) Рассмотрим случай 1° , когда $c > 0, h > 1, e^2 < 2c(h - \sqrt{h^2 - 1})$. Линия меридиана задана уравнениями (4.1), (4.2), при этом кривая имеет вид, указанный на фиг. 1, а. Меридиан при $|\varphi| \rightarrow 1/2 \pi$ стремится к дуге окружности

$$\omega_\rho^2 + (\omega_\zeta + c/e)^2 = e^{-2} (c^2 + 1/4 e^4 - hce^2) \quad (4.5)$$

а для ω_ζ получаем выражение $\omega_\zeta = -1/2 e (\rho^2/c + h)$, откуда видно, что окружность (4.5) расположена целиком в нижней полуплоскости ($\omega_\zeta < 0$).

Из (4.3) находим, что $d\alpha/d\vartheta$ положительна всюду за исключением промежутков $\beta_{*l} < \vartheta < \beta_l^*$, в которых $d\alpha/d\vartheta < 0$, причем $\beta_{*l} < 1/2 \pi (1 + 4\pi l) < \beta_l^*$. Значения β_{*l}, β_l^* находятся из уравнения

$$eA^2 \cos^2 \vartheta + c\rho^3 (2A \sin \vartheta - c^2 v_1) = 0 \quad (4.6)$$

Отметим, что длины промежутков (β_{*l}, β_l^*) стремятся к нулю, когда ϑ возрастает до ∞ .

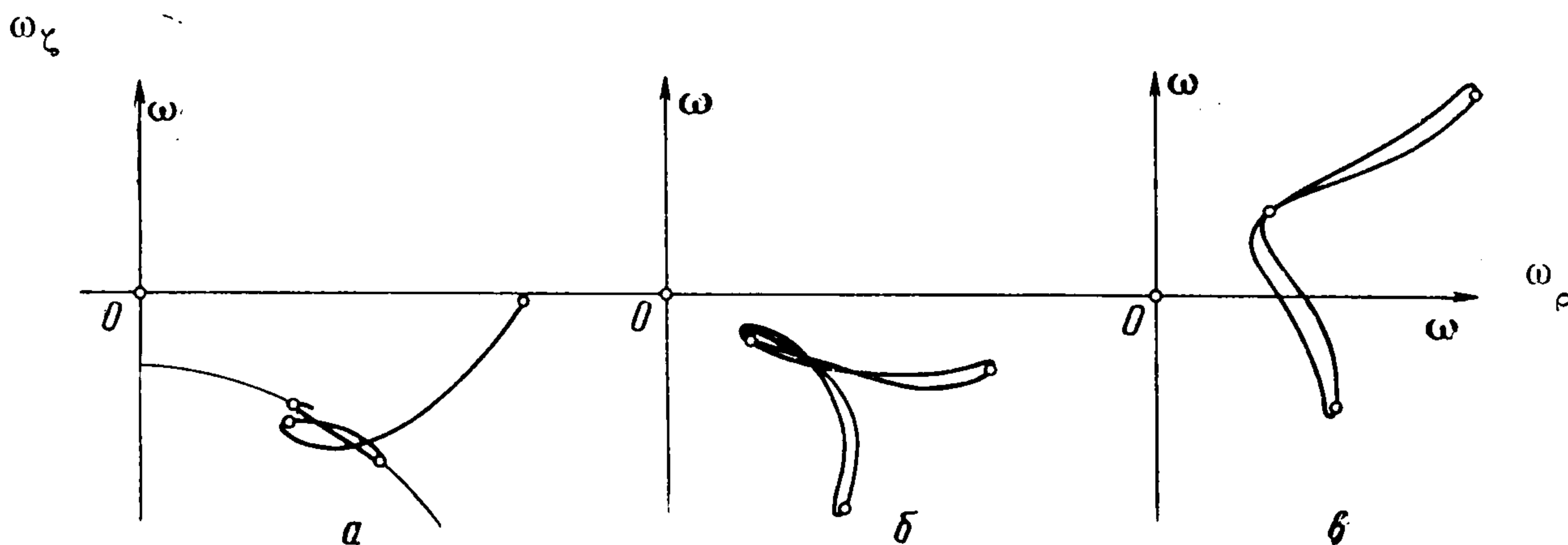
Для достаточно больших ϑ (пренебрегаем членами порядка $\text{sch}(1/2 c\vartheta - n)$) формула (4.3) принимает вид

$$\frac{d\alpha}{d\vartheta} \sim \frac{e(c^2 + 1/4e^4 - hce^2)}{4c\rho\omega_\rho^2} \cos^2 \vartheta, \quad \omega_\rho^2 = \rho^2 + \frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{4c^2} (\rho^2 + hc)^2$$

Отсюда получаем, что ϑ стремится к ∞ при $\vartheta \rightarrow \infty$. Приращение угла α при изменении ϑ от $2\pi l$ до $2\pi(l+1)$, когда $\vartheta \rightarrow \infty$, стремится к постоянной величине α_0 :

$$\alpha_0 = \frac{e(c^2 + 1/4e^4 - hce^2)}{4c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \vartheta d\vartheta}{\rho\omega_\rho^2}$$

На фиг. 2, а изображен меридиан для $c = 1.5$, $h = 2$, $e = 0.5$, $n = 1$ и показана дуга окружности, к которой приближается кривая меридиана при $\vartheta \rightarrow \infty$. Из фигуры



Фиг. 2

видно, что линия меридиана очень быстро приближается к предельной окружности, для данных значений параметров точки меридиана уже для $\vartheta > 4\pi$ отстоят от окружности на расстояние, меньшем 0.01.

Неподвижный годограф показан на фиг. 3, а.

2) Рассмотрим неподвижный годограф, когда ρ может обращаться в нуль (случаи 2°, 3°, 4° из (3.3)).

Меридиан представляет собой замкнутую кривую, имеющую точку самопересечения, соответствующую двойной точке подвижного годографа. В случае 2° из (3.3) линия меридиана имеет точки самопересечения, отличные от указанной. На фиг. 2, б изображен меридиан неподвижного годографа для $c = 0.8$, $h = 0.5$, $e = 0.6$, $n = 1$. В случаях 3°, 4° из (3.3) данная особая точка есть единственная точка самопересечения кривой меридиана. Вид меридиана для $c = 1.8$, $h = -0.6$, $e = 1$, $n = 1$ показан на фиг. 2, в.

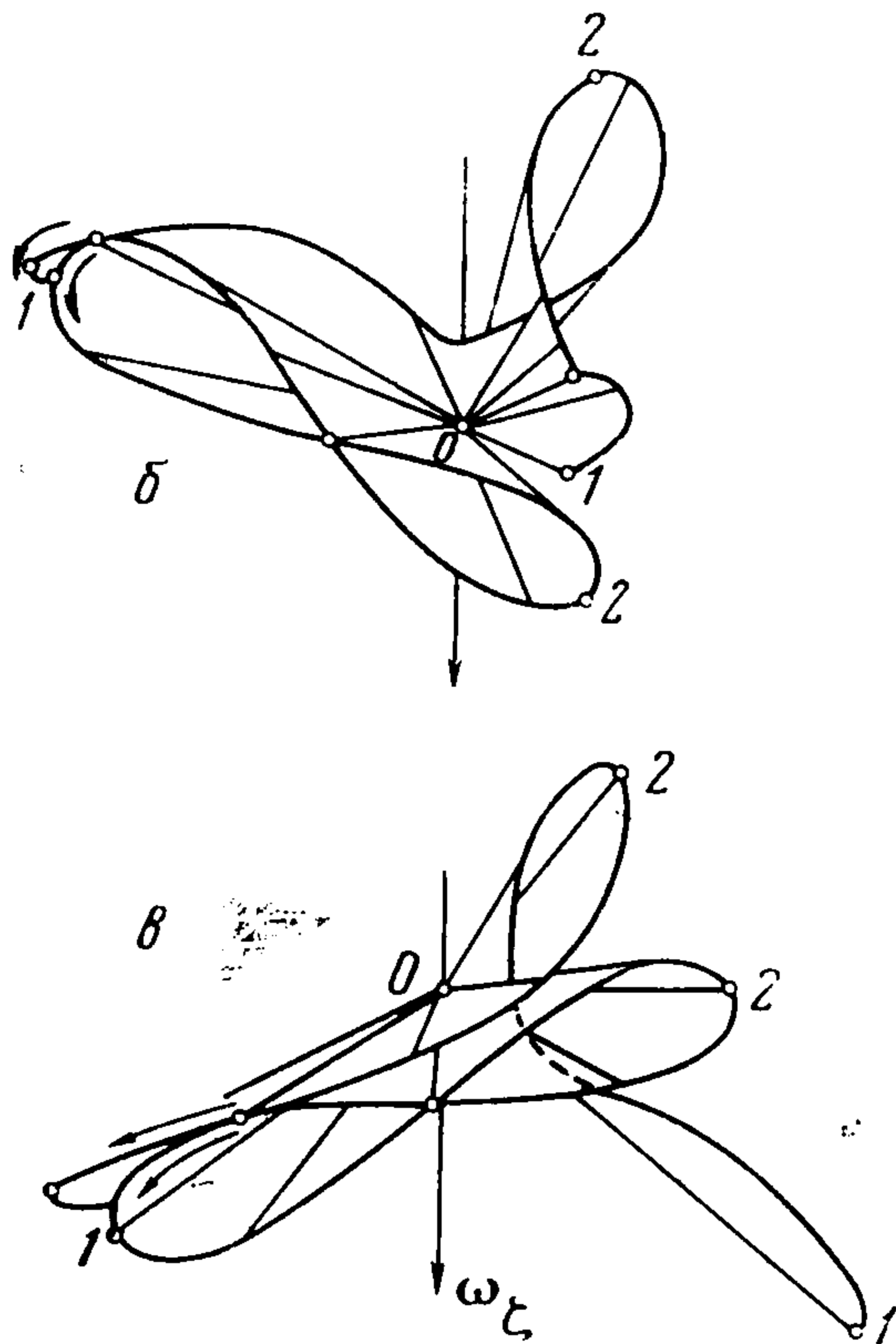
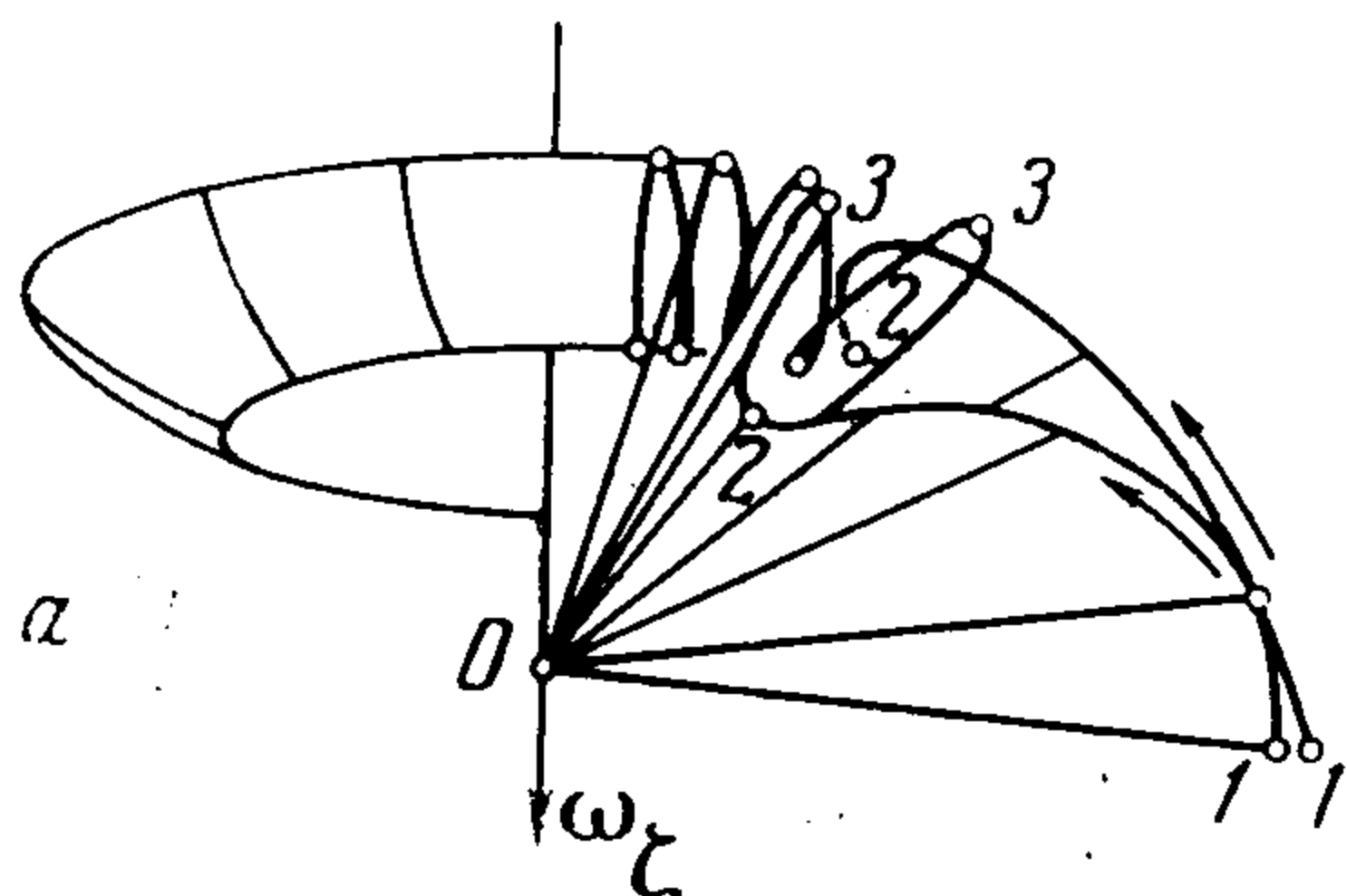
В этом случае $d\alpha/d\vartheta < 0$ в промежутке $\beta_{*0} < \vartheta < \beta_0^*$, β_{*0} , β_0^* — наименьшие корни уравнения (4.6), при этом надо учитывать, что координата ρ может быть отрицательной. Пусть $\vartheta = \beta_{*0}$, β_0^* при $\tau = \tau_{*l}$, τ_l^* , тогда $\tau_{*l} < \tau_l^0 < \tau_l^*$, где τ_l^0 — моменты времени, в которые ρ достигает минимального значения — $\sqrt{A+B}$. Таким образом, α с возрастанием времени τ возрастает за исключением промежутков (τ_{*l}, τ_l^*) , в которых угол α убывает. За период T , в течение которого переменная точка подвижного годографа обходит весь годограф и возвращается в исходную точку, угол α получает приращение α_1 . Если $\alpha_1 \neq 0$, то $|\alpha|$ при $\tau \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает.

Неподвижный годограф для первого (фиг. 3, б) и второго (фиг. 3, в) случаев, рассмотренных в этом пункте, построен в предположении, что $\varphi = \varphi_0^*$, $\alpha = 0$ при $\tau = 0$. На фиг. 3, б и в показана одна часть неподвижного годографа, соответствующая изменению времени от 0 до T . Следующая часть неподвижного годографа получается из предыдущей поворотом ее на угол α_1 .

§ 5. Картину движения получаем, обкатывая без скольжения подвижный аксоид по неподвижному, для этого необходимо знать зависимость φ, ϑ от времени τ :

$$\tau = - \int_{\varphi_0^*}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi \sqrt{A \sin \vartheta + B}}, \quad \text{или} \quad \tau = - \frac{c}{2} \int_{1/2\pi}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{A \sin \vartheta + B}}$$

Отсюда видно, что φ, ϑ с течением времени убывают. Неподвижный годограф рассматриваемой задачи изучен. Подвижный годограф получается из кривой (2.5), если ее



Фиг. 3

Фиг. 4

сдвинуть в положительном направлении оси y на величину λ_1 и затем спроектировать параллельно оси x на плоскость $\omega_1 = 1/2 (e + c\omega_2)$.

Начальный момент времени выберем так, чтобы $\varphi = \varphi_0^*$ и в выражении (4.4) стоял знак минус. Для рассмотренных случаев положение аксоидов в некоторый момент времени показано на фиг. 3. Стрелки указывают направление, в котором будет двигаться точка соприкосновения подвиж-

ного и неподвижного годографов. При движении соответствующие точки годографов должны совпадать. При этом тело совершает прецессионное движение вокруг вертикальной оси; если α_0, α_1 соизмеримы с 2π , то в случаях $2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$, из (3.3) движение тела будет периодическим, а в первом случае движение тела будет стремиться к периодическому при $\tau \rightarrow \infty$.

§ 6. Рассмотрим случаи $hc > 0, h^2 > 1, e^2 = 2c(h - \sqrt{h^2 - 1})$. При этом $A = 0$ и $\rho = \text{const} = \sqrt{B}$, т. е. кривая (2.5) представляет собой окружность радиуса \sqrt{B} . Угол φ изменяется по закону

$$\varphi = \pm 2 \arctg \exp(-\tau \sqrt{B} + n) - 1/2 \pi$$

где знак и постоянная n выбираются из начальных условий. Легко видеть, что $\varphi \rightarrow -1/2 \pi$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Уравнения неподвижного годографа таковы

$$\begin{aligned}\omega_\zeta &= 1/2 (B/c - h) (c \sqrt{B} \cos \varphi - e) - eh \\ \omega_\rho^2 &= B + 1/4 (e + c \sqrt{B} \cos \varphi)^2 - \omega_\zeta^2 \\ \alpha &= \frac{8e \sqrt{B}}{4c^2 - e^4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + m\end{aligned}\quad (6.1)$$

Значение m определяется из начальных условий.

Меридиан поверхности вращения, на которой лежит неподвижный годограф, есть прямая

$$\omega_\rho = \left(\frac{4c^2 - e^4}{e^4} \right)^{1/2} \left(\omega_\zeta + \frac{4ecB}{4c^2 - e^4} \right)$$

Из (6.1) находим, что $\omega_\rho \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow -\infty$, когда $\varphi \rightarrow -1/2 \pi$. Поэтому неподвижный годограф представляет собой кривую конечной длины, которая бесконечное число раз навивается на вертикальную ось.

На фиг. 4 показано положение аксоидов в некоторый момент времени, стрелки указывают направление дальнейшего движения. При этом в начальный момент $\tau = 0$, $\varphi = 0$ и $\alpha = 0$, т. е. $m = n = 0$ и в выражении для φ взят знак плюс.

Тело при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к равномерному вращению с угловой скоростью $\omega = 4ecB / (4c^2 - e^4)$ вокруг оси z , которая расположена вертикально в неподвижном пространстве.

В заключение отметим следующее.

1. Если положить $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то (1.1) дадут уравнения и интегралы в случае Гесса. Случай интегрируемости уравнения (2.3) при условиях (2.4) переходит в известный случай интегрируемости, указанный Гессом, при условии, что постоянная площадей есть нуль.

2. Система (2.2) интегрируется в элементарных функциях также и в случае, если уравнение

$$\rho^2 \left[1 - \left(\frac{\rho^2}{c} - h \right)^2 \right] - \left[k + e^2 - \frac{e}{c} \rho^2 \right]^2 = 0$$

имеет два равных положительных корня.

Автор благодарит П. В. Харламова, под руководством которого выполнена работа.

Поступила 29 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. H e s s R. V. Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine partikuläre Lösung des Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt. Math. Ann. 1811, Bd 37.
2. С р е т е н с к и й Л. Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2.
3. С р е т е н с к и й Л. Н. О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом. Вестн. Моск. ун-та, 1963, № 3, стр. 60—71.
4. Х а р л а м о в П. В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
5. Х а р л а м о в П. В. Лекции по динамике твердого тела. Спецкурс, ч. 1, Новосибирск, 1965.
6. Х а р л а м о в П. В. Об уравнениях движения гиростата. Тр. межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости движения и аналитической механике. Казань, 1964.