

О ДВИЖЕНИИ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ В ГАРМОНИЧЕСКИХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

И. М. Беленький (Москва)

Рассматривается движение консервативной системы с двумя степенями свободы в плоском гармоническом силовом поле, т. е. в таком поле, потенциал $V(x, y)$ которого удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta V(x, y) = 0$.

Простейшим примером такого поля является однородное поле силы тяжести. Другим примером может служить поле, образованное логарифмическим потенциалом $V = A \ln r$ или мультиполю с потенциалом $V = Ar^{-n} \cos na$. Ясно, что к гармоническим полям будут относиться и поля, образованные путем суперпозиции указанных выше полей. В случае произвольного гармонического поля его потенциал может быть представлен в виде $V(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ или $V(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, где $f(z)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$.

Гармонические силовые поля встречаются в различных приложениях, в частности, при изучении движения заряженных частиц в электрических и магнитных полях [1,2], в электронной оптике при расчете электронных траекторий [3,4] и в других задачах математической физики.

1. Пусть M есть изображающая точка рассматриваемой системы. Если не учитывать релятивистского эффекта изменения массы m в зависимости от величины скорости v (т. е. предполагается, что $v/c \ll 1$, где c — скорость света в вакууме), то задача нахождения траекторий при движении точки единичной массы ($m = 1$) в произвольном консервативном поле с потенциалом $V(x, y)$ и при постоянной энергии h сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения второго порядка [5]

$$y'' = (1 + y'^2) \left(-y' \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad (\Phi = \ln \sqrt{2(h - V(x, y))}) \quad (1.1)$$

Полагая, что потенциал $V(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta V(x, y) = 0$, в силу интеграла энергии и (1.1) получим

$$\Delta v^2 = 0, \quad \Delta \Phi(x, y) = -2(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) \quad (1.2)$$

т. е. функция v^2 будет также гармонической, а $\Phi(x, y)$ в силу условия $\Delta \Phi(x, y) < 0$ будет принадлежать классу супергармонических функций [6].

Заметим, что случай $\Delta \Phi(x, y) = 0$, $\Delta V < 0$, т. е. когда $\Phi(x, y)$ является гармонической функцией, а потенциал $V(x, y)$ принадлежит классу супергармонических функций, приводит к гидромеханической аналогии [7].

2. Приведем дифференциальное уравнение траекторий (1.1) к простейшей форме, для чего введем угол $\psi(x, y) = \operatorname{arctg} y'$, образованный вектором скорости v с положительным направлением оси x . В результате получаем

$$d\psi(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \quad (\Phi = \ln v) \quad (2.1)$$

Написав далее

$$d\Phi(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \quad (2.2)$$

и вводя комплексную переменную $z = x + iy$, нетрудно, в силу (2.1) и (2.2), получить выражение для логарифма комплексной скорости $\zeta = v \exp(-i\psi)$ точки M :

$$d \ln \zeta = \frac{\omega(z) dz}{v^2} \quad \left(\omega(z) = -\frac{\partial V}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

Здесь $\omega(z)$ — аналитическая функция комплексного переменного z , так как одно из условий Коши — Римана удовлетворяется в силу условия гармоничности силового поля, а другое удовлетворяется тождественно, в силу непрерывности частных производных.

Обозначим интеграл от аналитической функции $\omega(z)$ через $W(z)$, т. е.

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\chi(x, y) \quad \left(W(z) = \int \omega(z) dz \right) \quad (2.4)$$

Интегрируя далее (2.3), после отделения действительной и мнимой части, в силу (2.4), получаем

$$\varphi(x, y) = 1/2 v^2(x, y) + \text{const}, \quad d\chi(x, y) = -v^2(x, y) d\psi \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что линиям $\varphi(x, y) = \text{const}$ будут соответствовать эквипотенциальные линии $V(x, y) = \text{const}$, а линиям $\chi(x, y) = \text{const}$ уже не будут соответствовать изоклины траекторий $\psi(x, y) = \text{const}$, как это имело место в случае гидромеханической аналогии [7].

3. Для произвольного гармонического силового поля с потенциалом $V(x, y)$ связь между функциями $\psi(x, y)$ и $\chi(x, y)$ выражается неинтегрируемым дифференциальным соотношением (2.5). Поэтому получение решения в замкнутой форме в общем случае при произвольном задании гармонической функции не представляется возможным. Однако построение траектории с некоторой точностью можно осуществить графоаналитическим методом при помощи сетки, образованной эквипотенциальными линиями $V(x, y) = \text{const}$ и ортогональными к ним линиями $\chi(x, y) = \text{const}$.

В предлагаемом методе аппроксимация траектории между двумя соседними точками в отличие от метода Келвина (метод радиусов кривизн [8,9]) будет линейной, подобно тому, как это было сделано ранее [10], с той разницей, что линии $\chi(x, y) = \text{const}$ уже не будут являться изоклинами траекторий.

Пусть в начальный момент движущаяся точка находится в положении $A_0 (z_0 = x_0 + iy_0)$, а ее начальная скорость равна $v_0 = v_0 \exp(i\psi_0)$.

Проведем через точку A_0 под углом ψ_0 к оси x луч до пересечения в точке $A_1 (z_1 = x_1 + iy_1)$ с линией $\chi_1 = \chi(x_1, y_1)$.

Дальнейшую аппроксимацию траектории при помощи ломаной линии можно осуществить, заменяя каждый раз дугу траектории, проходящей через две соседние линии χ_{j+1} и χ_{j+2} , хордой $A_{j+1} A_{j+2}$, наклоненной к оси x под углом ψ_{j+1} , определяемым путем интегрирования (2.5). Пользуясь интегралом энергии и замечая, что подынтегральное выражение в правой части (2.5) знакопостоянно, можно применить теорему о среднем, в результате чего получаем

$$\psi_{j+1} - \psi_j = \frac{\chi_j - \chi_{j+1}}{2(h - V_j^*)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

где V_j^* — среднее значение между $V_j = V(x_j, y_j)$ и $V_{j+1} = V(x_{j+1}, y_{j+1})$.

Таким образом, пользуясь рекуррентным соотношением (3.1) и зная ψ_j (начальный угол бросания ψ_0 задан), можно найти ψ_{j+1} , а следовательно, и построить точки A_{j+1} , соединив которые ломаной линией, получим приближенную форму траектории.

4. Рассмотрим вопросы существования замкнутых траекторий (циклов) в гармонических силовых полях. Для этого воспользуемся понятием квазииндекса J_j особой точки O_j потенциала силового поля, определяемого как предельное значение криволинейного интеграла, взятого по окружности (γ) малого радиуса r , окружающую особую точку O_j [11], т. е.

$$J_j = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{(\gamma)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \quad (4.1)$$

При условии существования циклов, как было показано [11], должно выполняться следующее основное соотношение

$$1 - J = - \frac{1}{2\pi} \int_{(\sigma)} \Delta \Phi d\sigma \quad \left(J = \sum_{j=1}^k J_j \right) \quad (4.2)$$

где J — сумма квазииндексов J_j особых точек O_j ($j = 1, 2, \dots, k$), находящихся внутри замкнутой орбиты (C), а интегрирование производится по области (σ) с выключенными особыми точками O_j и ограниченной контуром (C).

Для гармонических силовых полей имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Если в рассматриваемой области (G) силового поля существует некоторая замкнутая траектория (C), то сумма квазииндексов J_j особых точек O_j , находящихся в указанной области внутри (C), должна удовлетворять условию

$$-\infty < J < 1 \quad \left(J = \sum_{j=1}^k J_j \right) \quad (4.3)$$

Теорема 2. Если в рассматриваемой области (G) силового поля сумма квазииндексов J_j особых точек O_j ($j = 1, 2, \dots, k$) удовлетворяет условию

$$1 \leq J < \infty \quad \left(J = \sum_{j=1}^k J_j \right) \quad (4.4)$$

то это является достаточным условием отсутствия замкнутых траекторий (циклов) в области (G).

Доказательство этих теорем следует непосредственно из рассмотрения основного соотношения (4.2), если только при этом заметить, что для гармонических силовых полей справедливо условие $\Delta\Phi < 0$.

5. Рассмотрим некоторые приложения. Пусть уравнение траекторий в полярных координатах имеет вид $r = r(\alpha)$. Пользуясь известным из дифференциальной геометрии выражением для угла ψ

$$\psi = \arctg \frac{r' \operatorname{tg} \alpha + r}{r' - r \operatorname{tg} \alpha} \quad (5.1)$$

представим дифференциальное уравнение траекторий (2.5) в полярных координатах

$$(r'^2 + r^2)d\chi(r, \alpha) = -2(h - V(r, \alpha))(-rr'' + 2r'^2 + r^2) d\alpha \quad (5.2)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по α , а h — постоянная энергии. Так, например, для мультиполя с потенциалом

$$V(r, \alpha) = -\frac{M}{2\pi} \frac{\cos n\alpha}{r^n} \quad \left(A = \frac{M}{2\pi} \right)$$

где M — дипольный момент, в силу (2.3) (2.4) и (2.5) получаем

$$\Phi = \frac{A \cos n\alpha}{r^n}, \quad \chi = -\frac{A \sin n\alpha}{r^n} \quad \left(W(z) = \frac{A}{z^n} \right) \quad (5.3)$$

и дифференциальное уравнение траекторий (5.2) после введения новой переменной $\xi = 1/r$ и при постоянной энергии h , равной нулю, принимает вид

$$n(\xi'^2 + \xi^2)(\xi' \operatorname{tg} n\alpha + \xi) = 2\xi^2(\xi'' + \xi) \quad (5.4)$$

Выясним, при каких значениях параметра n дифференциальное уравнение траекторий (5.4) допускает периодические решения, соответствующие замкнутым орбитам (циклам). Для этого вычислим квазииндекс J особой точки O ($r = 0$) потенциала $V = -Ar^{-n} \cos n\alpha$. Переходя к полярным координатам $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$ и замечая, что $\Phi = 1/2 \ln [2(h + Ar^{-n} \cos n\alpha)]$, получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{-An \cos(n+1)\alpha}{2(h + A \cos n\alpha / r^n) r^{n+1}}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{-An \sin(n+1)\alpha}{2(h + A \cos n\alpha / r^n) r^{n+1}} \quad (5.5)$$

На контуре круга радиуса r , окружающего особую точку O ($r = 0$) имеем $dx = -r \sin \alpha d\alpha$, $dy = r \cos \alpha d\alpha$ и, следовательно в силу (4.1) и (5.5), после перехода

к пределу при $r \rightarrow 0$ получаем

$$J = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{An \cos n\alpha d\alpha}{2(hr^n + A \cos n\alpha)} = \frac{n}{2} \quad (5.6)$$

Следовательно, при $n \geq 2$ имеем $J \geq 1$, что, в силу теоремы 2, является достаточным условием для отсутствия замкнутых орбит (циклов).

Рассмотрим более детально случай квадруполя ($n = 2$), когда семейство эквипотенциальных линий $r^2 = C \cos 2\alpha$ (C — постоянная) представляет собой семейство лемнискат Бернулли [12] и имеет форму четырехлистника (фигура).

Дифференциальное уравнение траекторий (5.4) при $n = 2$ принимает вид

$$\xi' (\xi'^2 + \xi^2) \operatorname{tg} 2\alpha = \xi (\xi \xi'' - \xi'^2) \quad (5.7)$$

Так как здесь, в силу (5.6), выполняются условия теоремы 2 ($n = 2, J = 1$), то в силовом поле квадруполя не могут существовать циклы, а дифференциальное уравнение траекторий (5.7) не имеет периодических решений, соответствующих замкнутым траекториям.

Вводя новую переменную $[\eta = \operatorname{tg} \mu$, где μ — угол, образованный касательной к траектории и радиус-вектором r , проведенным в точку касания, и замечая, что $\operatorname{tg} \mu = r / r' = -\xi / \xi'$ после интегрирования (5.7) и освобождения от логарифмов, получим первый интеграл

$$1 + \eta^2 = b \cos 2\alpha \quad (b = \text{const}) \quad (5.8)$$

Отсюда, определяя $1 / \eta = -\xi' / \xi$ после интегрирования и перехода к переменной r , получим уравнение траектории в полярных координатах

$$\ln \frac{r}{r_0} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{b \cos 2\alpha - 1}} \quad (5.9)$$

Здесь r_0 и α_0 — параметры, определяющие начальное положение изображающей точки системы, а выбор знака перед корнем определяется направлением вектора начальной скорости $v_0 = v_0 \exp(i\mu_0)$, так как $\eta_0 = \operatorname{tg} \mu_0$.

Интеграл, стоящий в правой части (5.9), можно выразить в эллиптических функциях Якоби. Для этого введем новую переменную τ

$$\operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{cn} \tau, \quad \operatorname{cn} \tau = \left(\frac{k'}{k} \right)^{1/2} \frac{H_1(\tau)}{\theta(\tau)} \quad \left(a^2 = \frac{b-1}{b+1} \right) \quad (5.10)$$

и, пользуясь известными соотношениями для эллиптических функций Якоби [13]

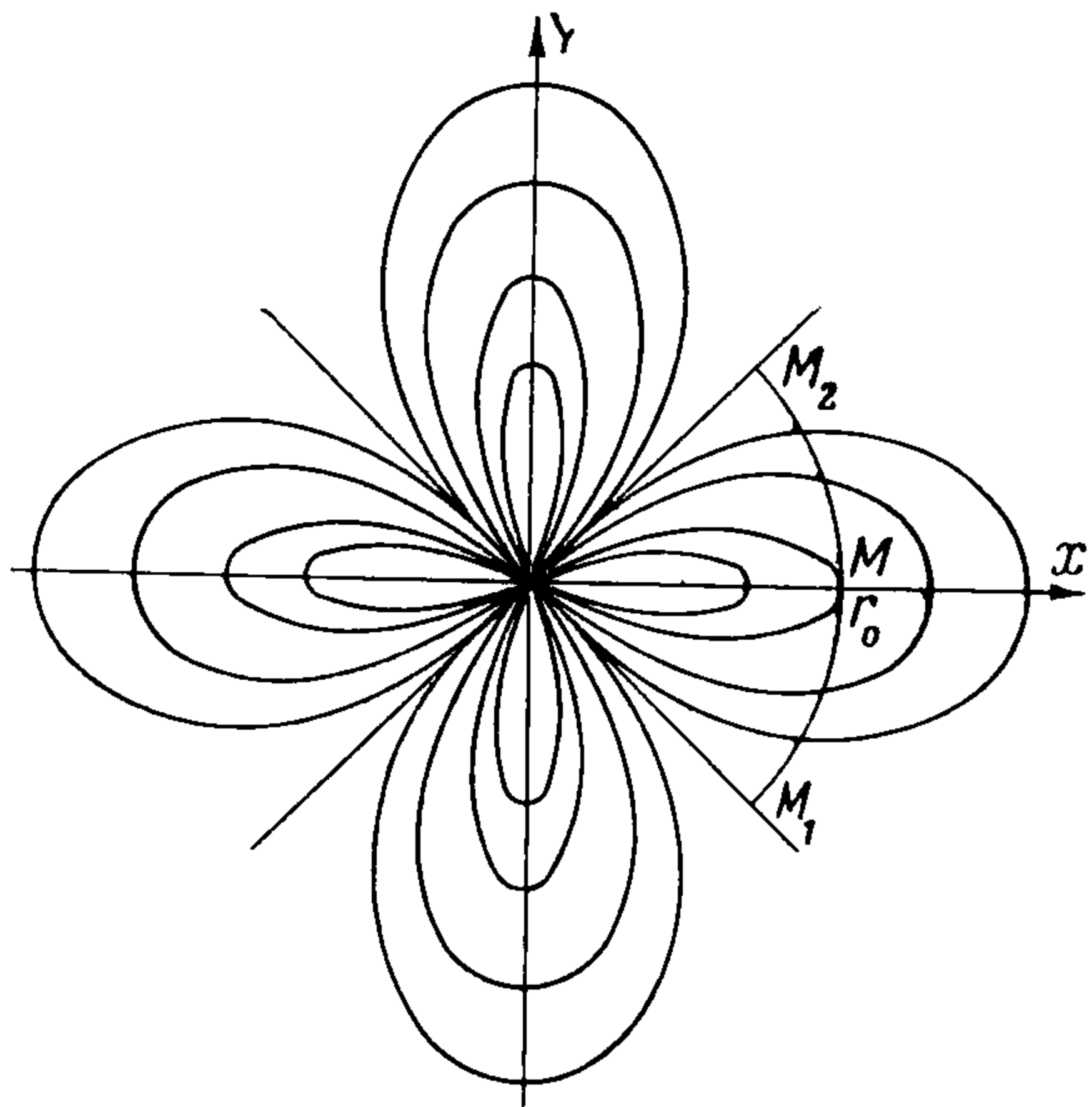
$$\operatorname{sn}^2 \tau + \operatorname{cn}^2 \tau = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 \tau + \operatorname{dn}^2 \tau = 1 \quad \left(k^2 = \frac{a^2}{a^2 + 1} < 1 \right)$$

в результате интегрирования получим

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{b \cos 2\alpha - 1}} = -\frac{\tau}{\sqrt{2b}}$$

Таким образом, получаем следующее параметрическое представление уравнения траекторий:

$$\ln \frac{r}{r_0} = \frac{\tau_0 - \tau}{\sqrt{2b}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{b-1}{b+1} \right)^{1/2} \operatorname{cn} \tau \quad (5.11)$$



где начальное значение параметра τ_0 определяется из соотношения $\operatorname{tg} \alpha_0 = a \operatorname{sn} \tau_0$. Если положить $\alpha_0 = 0$, что всегда возможно путем поворота осей, то $\operatorname{sn} \tau_0 = 0$.

Следовательно, $\tau_0 = K$, где $K(k)$ — значение полного эллиптического интеграла первого рода при модуле $k = \sqrt{a^2 / (1 + a^2)}$.

Заметим, что $\xi = 1/r = \operatorname{const}$ является также решением (5.7). Этот результат можно получить из рассмотрения первого интеграла (5.8), если последний представить в форме $\cos^2 \mu \cos 2\alpha = \cos^2 \mu_0$ и принять начальный угол бросания $\mu_0 = 1/2\pi$.

Анализ, основанный на рассмотрении уравнений движения в поле квадруполья

$$r'' - r\alpha'^2 + \frac{2A \cos 2\alpha}{r^3} = 0, \quad \frac{d}{dt}(r^2\alpha') + \frac{2A \sin 2\alpha}{r^2} = 0$$

показывает, что при начальных данных $t = 0, \alpha_0 = 0, \mu_0 = 1/2\pi, h = 0, r = r_0$ решение $r = \operatorname{const}$ соответствует колебательному движению изображающей точки M по дуге M_1M_2 круга радиуса $r = r_0$ с угловой амплитудой $\alpha = \pm 1/4\pi$ (фигура).

Точки M_1 и M_2 , в которых скорость изображающей точки M обращается в нуль, являются точками возврата.

Угловая скорость ω , угловое ускорение ε и период колебаний T будут соответственно равны

$$T = \frac{4}{\sqrt{B}} \int_0^{\pi/4} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \quad \left(\omega^2 = B \cos 2\alpha, \quad \varepsilon = -B \sin 2\alpha, \quad B = \frac{2A}{r_0^4} \right)$$

Последний интеграл при помощи подстановки $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sn} \tau$ может быть выражен через эллиптические функции Якоби. Опуская вычисления и пользуясь значением для B , выпишем окончательное значение для периода

$$T = \frac{2K}{\sqrt{A}} r_0^2 \quad \left(A = \frac{M}{2\pi} \right) \quad (5.12)$$

Здесь M — дипольный момент, а $K(k)$ — значение полного эллиптического интеграла первого рода при модуле $k = \sqrt{1/2}$. Отсюда видно, что период T зависит от дипольного момента M и начального радиуса бросания r_0 .

Поступила 28 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. В и с х о л з Н. Elektrische und magnetische Potentialfelder. Berlin, Springer-ver., 1957. (Рус. пер.: Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. Изд-во иностр. лит., 1961.)
2. К а п и ц а П. Л. Электроника больших мощностей. М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. G l a s e r W. Grundlagen der Elektronenoptik. W., Springer-ver., 1952. (Рус. пер.: Глазер В. Основы электронной оптики. М., Гостехиздат, 1957.)
4. C o s s l e t t V. E. Introduction to Electron Optics. Oxford, 1946. (Рус. пер.: Косслетт В. Введение в электронную оптику. М., Изд-во иностр. лит., 1950.)
5. Б е л е н ь к и й И. М. Введение в аналитическую механику. М., Изд-во «Высшая школа», 1964.
6. П р и в а л о в И. И. Субгармонические функции. М.—Л., ОНТИ СССР, 1937.
7. Б е л е н ь к и й И. М. Об одной новой аналогии в механике. Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 6.
8. K e l v i n. On graphic Solution of dynamical problems. Philos. Mag, 1892, Ser. 5, vol. 34, No. 210, pp. 443—448.
9. С а н с о н е Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1954, т. 2.
10. Б е л е н ь к и й И. М. Об одном графическом методе построения траекторий. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 5.
11. Б е л е н ь к и й И. М. О достаточных условиях отсутствия периодических траекторий для консервативных систем. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
12. С а в е л о в А. А. Плоские кривые. М., Физматгиз, 1960.
13. У и т т е к е р Е. Т., В а т с о н Г. Н. Курс современного анализа. Гостехиздат, 1934, т. 2.