Для нее могут быть использованы граничные условия, например, типа (3.4).

Оптимальное управление в рассмотренных случаях строится после отыскания соответствующих инвариантов.

Вследствие независимости координат ξ_t, ξ_x, ξ_u, ξ_φ от вспомогательных переменных w, v можно записать «укороченный» оператор, относящийся к преобразованиям в пространстве t, x, u, φ. Уравнения вариационной задачи рассматриваются при этом в форме (1.1), (1.6).

Авторы не ставили своей целью проведения анализа связи краевых условий задачи с группами преобразований. Установлено, что каждой группе преобразований должны соответствовать определенные типы краевых условий.

Поступила 24 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во СО АН СССР, 1962.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Л. А. Розенберг

(Москва)

Выводятся ковариантные уравнения движения точки переменной массы (впредь называемой телом) в общей теории относительности, которые далее применяются для описания движения в поле Шварцшильда, во внешнем поле вращающейся сферически симметричной массы и в статической вселенной Эйнштейна.

1. Обычный вывод уравнений движения тела переменной массы, использующий законы сохранения, в общей теории относительности не проходит, так как отсутствует корректная формулировка самих законов сохранения. Если, однако, пренебречь возмущением метрики, связанным с массой движущегося тела, то его уравнения движения можно установить, опираясь на принцип эквивалентности. Пусть на многообразии V_4 (пространство — время) в некоторой его области введены координаты x^k и задана метрика

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k \qquad (i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

Введем в окрестности точки $Q\ (x_*^k)$ многообразия локально-лоренцовы координаты y^k (система K_0) следующим образом:

$$y^k = a_i^{\ k}\,(x^i - x_*^{\ i}) + {}^1\!/_2 \Gamma_{js}^{\ \ i} a_i^{\ k}\,(x^j - x_*^{\ j})\,(x^s - x_*^{\ s})$$

где a_i^k образуют неособенную матрицу A; Γ_{js}^i — афинная связность на V_4, вычисленная в точке Q через x^k. В системе K_0 производные тензора g_{ik} в точке Q ($y^k = 0$) равны нулю, а сами компоненты g_{ik} в ее малой окрестности можно считать постоянными с точностью до малых второго порядка.

Постоянные a_i^k должны быть такими, чтобы в системе K_0 в точке Q метрический тензор имел компоненты:

$$g_{ik} = 0,\ i \neq k,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = -1$$

Сами $a^k{}_i$ являются функциями чисел x_*^k.

Системе K_0 поставим в соответствие систему K с тем же репером из пространства T_4, касательного к многообразию в точке Q. В системе K верны законы сохранения вектора энергии — импульса в том виде, как они формулируются в специальной теории относительности.

Из них сразу следуют уравнения движения тела переменной массы, которые, как можно показать, имеют вид

$$cm\frac{du^0}{ds}=-q\frac{dm}{ds}u^1, \quad cm\frac{du^1}{ds}=-q\frac{dm}{ds}u^0, \quad \frac{du^2}{ds}=0, \quad \frac{du^3}{ds}=0$$
$$\frac{dy^0}{ds}=u^0, \quad \frac{dy^1}{ds}=u^1, \quad \frac{dy^2}{ds}=u^2, \quad \frac{dy^3}{ds}=u^3 \tag{1.1}$$

Здесь m — собственная масса, являющаяся функцией собственного времени $\tau = s / c$; c — скорость света в вакууме; q — собственная 3-скорость истечения массы относительно тела; u^k — компоненты 4-скорости; величину — $qcdm / ds$ можно отождествить с реактивной силой [1].

Принцип эквивалентности для данного случая заключается в утверждении, что уравнения (1.1), верные в K, верны и в K_0, если только окрестность точки Q достаточно мала.

В системе K_0 производные вектора u^k из (1.1) следует заменить ковариантными, т. е. вместо $d(\ldots) / ds$ писать $\delta(\ldots) / \delta s = u^k\nabla_k$, где ∇_k — ковариантная производная, вычисленная через связности V_4.

В модифицированных таким образом уравнениях осталось перейти от координат y^k к координатам x^k и затем выполнить предельный переход при $x^k \to x^k{}_*$. Обозначая компоненты преобразованного вектора 4-скорости по-прежнему через u^k, приходим к системе уравнений движения на V_4 в исходных координатах x^k:

$$cma_k{}^0\frac{\delta u^k}{\delta s}=-q\frac{dm}{ds}a_k{}^1u^k, \qquad cma_k{}^1\frac{\delta u^k}{\delta s}=-q\frac{dm}{ds}a_k{}^0u^k \tag{1.2}$$
$$a_k{}^2\frac{\delta u^k}{\delta s}=0, \quad a_k{}^3\frac{\delta u^k}{\delta s}=0, \quad \frac{dx^0}{ds}=u^0, \quad \frac{dx^2}{ds}=u^2, \quad \frac{dx^1}{ds}=u^1, \quad \frac{dx^3}{ds}=u^3$$

Здесь $a_i{}^k$ уже не постоянные, а функции x^k.

2. Обратимся к исследованию движения тела переменной массы в поле Шварцшильда при помощи уравнений (1.2).

Метрика Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = e^\nu x^{02} - e^{-\nu}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{2.1}$$
$$e^\nu = 1 - \frac{r_g}{r}, \qquad r_g = 2f\frac{M}{c^2}$$

Здесь r_g — гравитационный радиус; гравитационная постоянная $f = 6.67 \cdot 10^{-8}$ $г^{-1}$ $см^3 сек$ и M — масса центрального притягивающего тела.

Выражение (2.1) задает метрику на V_4. Положим $r \equiv x^1$, $\theta \equiv x^2$, $\varphi \equiv x^3$; отличные от нуля компоненты метрического тензора суть:

$$g_{00} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^{-\nu}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2\sin^2\theta$$

При таком отождествлении координат уравнения (1.2) описывают «радиальное» движение тела, при котором изменяются только координаты r, x^0.

Матрицу A выберем диагональной так, что

$$a_0{}^0 = e^{1/2\nu}, \quad a_1{}^1 = e^{-1/2\nu}, \quad a_2{}^2 = r, \quad a_3{}^3 = r\sin\theta$$

В явном виде уравнения движения в поле Шварцшильда имеют вид

$$\theta \equiv {}^1/_2\pi, \quad \varphi \equiv 0, \quad u^2 \equiv u^3 \equiv 0$$
$$cm\frac{\delta u^0}{\delta s}=-q\frac{dm}{ds}e^{-\nu}u^1, \qquad \frac{dx^0}{ds}=u^0 \tag{2.2}$$
$$cm\frac{\delta u^1}{\delta s}=-q\frac{dm}{ds}e^0u^0, \qquad \frac{dx_1}{ds}=u^1$$

Очевидный первый интеграл

$$e^0u^{02} - e^{-\nu}u^{12} = 1 \tag{2.3}$$

[1] В другой форме эти уравнения можно найти в статьях [1,2].

Положим

$$m = m_0 \exp\left(-\frac{\alpha s}{qc}\right) \tag{2.4}$$

Если скорость q истечения постоянна (это в дальнейшем предполагается), то такое изменение массы со временем означает постоянство отношения реактивной силы к массе; это отношение обозначено через α и его естественно назвать «ускорением».

Нетрудно теперь получить еще один интеграл

$$e^{\nu} u^0 - \frac{\alpha r}{c^2} = \mathrm{const} \tag{2.5}$$

Пусть движение тела начинается из состояния покоя. Этой ситуации соответствуют начальные условия

$$x^0(0) = 0, \quad r(0) = r_0, \quad u^0(0) = e^{-{}^1\!/_2 \nu_0}, \quad u^1(0) = 0, \quad e^{-{}^1\!/_2 \nu_0} = \left(1 - \frac{r_g}{r_0}\right)^{-{}^1\!/_2} \tag{2.6}$$

Из двух первых интегралов находим, что

$$\frac{dx^0}{ds} = \left[e^{{}^1\!/_2 \nu_0} + \frac{\alpha}{c^2}(r - r_0)\right] e^{-\nu} \tag{2.7}$$

$$\frac{dr}{ds} = \left[\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0} + \frac{2\alpha}{c^2} e^{{}^1\!/_2 \nu_0}(r - r_0) + \frac{\alpha^2}{c^4}(r - r_0)^2\right]^{{}^1\!/_2}$$

Последнее можно переписать в виде, удобном для сравнения с ньютоновским решением, а именно:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = fM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + \alpha e^{{}^1\!/_2 \nu_0}(r - r_0) + \frac{\alpha^2}{2c^2}(r - r_0)^2$$

Известно, что для радиального движения в ньютоновском поле одного центра при прочих равных условиях

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = fM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + \alpha(r - r_0)$$

(t — абсолютное ньютоновское время).

Релятивистская поправка, если сравнивается описание движения в собственном времени τ с описанием движения ньютоновским наблюдателем, часы которого отсчитывают абсолютное время t, сводится, таким образом, к замене единицы величиной

$$e^{{}^1\!/_2 \nu_0} + \frac{\alpha}{2c^2}(r - r_0)$$

Первое слагаемое обязано своим происхождением неэвклидовой метрике, второе представляет релятивистский эффект, который проявляется и в отсутствие тяготения.

Можно, однако, выбрать другую точку зрения и ввести локального наблюдателя, неподвижного в системе координат Шварцшильда. Он измеряет пространственные расстояния

$$dl = e^{-{}^1\!/_2 \nu}\, dr$$

и его часы отсчитывают время τ_* так, что

$$d\tau_* = c^{-1} e^{{}^1\!/_2 \nu}\, dx^0$$

Следовательно, локальная скорость тела

$$\frac{dl}{d\tau_*} = c e^{-\nu} \frac{u^1}{u^0}$$

Для ее приближенного вычисления удобно использовать два безразмерных параметра

$$\mu = \frac{\alpha r_0}{c^2}, \qquad \lambda = \frac{r_g}{r_0} \tag{2.8}$$

Они имеют простой физический смысл. Если $\mu > {}^1/_2\lambda$, тело удаляется от притягивающего центра; если же $\mu < {}^1/_2\lambda$, то тело движется к притягивающему центру. Равенство $2\mu = \lambda$ означает, что реактивная сила «уравновешивает» силу тяготения. Это значение $\mu = \mu^*$ назовем критическим.

Тогда, если фиксировать $\mu > \mu^*$, можно представить локальную скорость в виде ряда по степеням малого параметра λ (например, если $r_0 = 1.5 \cdot 10^{13}$ *см*— расстояние от Солнца до Земли, то для поля тяготения Солнца $\lambda = 1.98 \cdot 10^{-8}$)

$$\frac{dl}{d\tau_*} = c\Big\{[2\mu(\rho-1)+\mu^2(\rho-1)^2]^{1/2}[1+\mu(\rho-1)]^{-1} - {}^1/_2\lambda\,[2\mu(\rho-1)+\mu^2(\rho-1)^2]^{-1/2}[1-\rho^{-1}+\mu(\rho-1)]+\ldots\Big\} \qquad \left(\rho=\frac{r}{r_0}\right)$$

Ньютоновская скорость тела с той же точностью будет

$$\frac{dr}{dt} = c\{[2\mu(\rho-1)]^{1/2} - {}^1/_2\lambda\,[2\mu(\rho-1)]^{-1/2}(1-\rho^{-1})+\ldots\}$$

Возвращаясь к формуле (2.7), заметим, что она верна и для $\alpha < 0$, когда тело движется к притягивающему центру. Оказывается, что скорость, с которой тело приходит на гравитационную сферу (поверхность $r = r_g$ в 3-пространстве мира Шварцшильда) для удаленного и локального (находящегося на поверхности сферы) наблюдателей остается той же, что и скорость свободной пробной частицы постоянной массы.

В первом случае — для удаленного наблюдателя — скорость остается равной нулю, во второй — для локального наблюдателя — равной скорости света c. И только собственная скорость

$$dr/d\tau\,|_{r=r_g} = -ce^{1/2\nu_0}(1+\mu e^{1/2\nu_0}) \tag{2.9}$$

зависит от реактивной силы через параметр μ и может превзойти скорость света.

Вычисления показывают, что эффекты, связанные с неэвклидовостью метрики, быстро убывают с увеличением r.

Даже при не очень больших r метрика с высокой точностью является псевдоэвклидовой, и основной количественный вклад можно получить, ограничиваясь соответствующими формулами специальной теории относительности.

В полях неостровного характера, соответствующих космологическим моделям, ситуация оказывается существенно иной: эффекты, обусловленные кривизной пространства — времени, будут накапливаться при движении на большие расстояния.

3. Рассмотрим теперь движение тела переменной массы в поле тяготения, порожденном вращающейся сферически симметричной массой M. Метрика в этом случае имеет вид ([3])

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)dx^{02} - \left(1+\frac{r_g}{r}\right)(dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2) - 2\frac{r_g}{r}\varkappa\sin^2\theta\,d\varphi\,dx^0, \qquad \varkappa = \frac{2}{5}\frac{\omega_0R_0^2}{c} = \frac{I_0}{cM} \tag{3.1}$$

Здесь I_0 — момент количества движения вращающегося шара (в обычном смысле), R_0 — радиус шара, ω_0 — постоянная угловая скорость вращения.

Обозначим

$$g_{00} = 1-\frac{r_g}{r}, \quad g_{11} = -\left(1+\frac{r_g}{r}\right), \quad g_{22} = -r^2\left(1+\frac{r_g}{r}\right)$$

$$g_{33} = -r^2\left(1+\frac{r_g}{r}\right)\sin^2\theta, \qquad g_{03} = -\frac{r_g}{r}\varkappa\sin^2\theta$$

Отличные от нуля компоненты матрицы A возьмем такими: (3.2)

$$a_0^0 = g_{00}^{1/2}, \quad a_1^1 = (-g_{11})^{1/2}, \quad a_2^2 = (-g_{22})^{1/2}, \quad a_3^3 = \left(\frac{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}}{g_{00}}\right)^{1/2}, \quad a_0^3 = g_{03}g_{00}^{-1/2}$$

Тогда уравнения движения (1.2) в предположении, что $m(s)$ определено посредством (2.4), будут (3.3)

$$g_{00}^{1/2}\frac{\delta u^0}{\delta s}+g_{03}g_{00}^{-1/2}\frac{\delta u_1}{\delta s}=\frac{\alpha}{c^2}(-g_{11})^{-1/2}u^1,\qquad \frac{\delta u^3}{\delta s}=0\qquad \frac{dx^0}{ds}=u^0,$$

$$(-g_{11})^{1/2}\frac{\delta u^1}{\delta s}=\frac{\alpha}{c^2}(g_{00}^{1/2}u^0+g_{03}g_{00}^{-1/2}u^3),\qquad \frac{dr}{ds}=u^1,\qquad \frac{d\varphi}{ds}=u^3$$

$$\theta\equiv{}^1/_2\pi,\qquad u^2\equiv 0$$

Тривиальный первый интеграл для системы

$$g_{00}u^{0^2}+g_{11}u^{1^2}+g_{22}u^{22}+g_{33}u^{3^2}+2g_{03}u^0u^3=1 \tag{3.4}$$

Можно указать еще два первых интеграла, аналогичных интегралам импульсов классической механики для циклических координат x^0, φ. Они имеют вид

$$g_{00}u^0+g_{03}u^3=\frac{\alpha}{c^2}\int_{r_0}^{r}(-g_{00}g_{11})^{1/2}dr+C_1 \tag{3.5}$$

$$g_{03}u^0+g_{33}u^3=\frac{\alpha}{c^2}\int_{r_0}^{r}g_{03}g_{00}^{-1/2}(-g_{11})^{1/2}dr+C_2 \tag{3.6}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Как и в п.2., будем исследовать движение, начинающееся из состояния покоя. Соответствующие начальные условия

$$x^0(0)=0,\ r(0)=r_0,\ \varphi(0)=0$$

$$u^0(0)=[g_{00}(r_0)]^{1/2},\ u^1(0)=0,\ u^3(0)=0$$

Отсюда следует, что

$$C_1=[g_{00}(r_0)]^{1/2},\qquad C_2=g_{03}(r_0)[g_{00}(r_0)]^{-1/2}\ (\theta(0)\equiv\pi/2,\ u^2\equiv 0)$$

Функции u^0, u^1, u^3 можно представить в виде рядов по степеням малых параметров μ, λ (2.8)

$$u^0=1+\lambda(-{}^1/_2+\rho^{-1})+\mu(\rho-1)+\lambda\mu(\rho-1)(\rho^{-1})+\lambda^2[-{}^1/_8-\rho^{-1}(-{}^1/_2+\rho^{-1})+$$
$$+(\varkappa/r_0)^2\rho^{-4}(\rho-1)]+\ldots$$

$$u^3=\varkappa\lambda r_0^{-2}[\rho^{-3}(\rho-1)+{}^1/_2\rho^{-3}\lambda(\rho-1)+\mu\rho^{-3}(\ln\rho-1+\rho^{-1})+\ldots]$$

$$(u^1)^2=-\lambda\rho^{-1}(\rho-1)+2\mu(\rho-1)-\lambda^2[{}^1/_2\rho^{-1}+(\varkappa/r_0)^2(\rho-1)^2\rho^{-2}]+$$
$$+\mu^2(\rho-1)^2-\mu\lambda\rho^{-1}(\rho-1)+\ldots,\qquad \rho=r/r_0 \tag{3.7}$$

Из выражения для $(u^1)^2$ следует, что оно имеет смысл только при выполнении неравенств $2\mu>\lambda$ при $\rho>1$, либо $2\mu<\lambda$ при $\rho<1$.

Они действительно выполняются, ибо $\mu=\mu^*={}^1/_2\lambda$ есть критическое значение параметра μ: при $\mu>\mu^*$ $\rho>1$ и, напротив, при $\mu<\mu^*$ будет $\rho<1$.

В связи с тем, что в разложении для u^{1^2}, $\lambda=\mu=0$ есть точка разветвления, автор не знает, как построить ряд для u^1 по μ и λ. Однако, можно построить для u^1 ряд по λ при фиксированном $\mu>\mu^*$:

$$u^1=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots$$

или, наоборот, ряд по μ при фиксированном λ:

$$u^1=b_0+b_1\mu+b_2\mu^2+\ldots$$

который сходится для $\mu<\mu^*$.

Формулы для вычисления первых коэффициентов этих рядов таковы:

$$a_0=[2\mu(\rho-1)+\mu^2(\rho-1)^2]^{1/2},\qquad a_1=-{}^1/_2\rho^{-1}(\rho-1)[1+\mu(\rho-1)]a_0^{-1} \tag{3.8}$$

$$b_0=[\lambda\rho^{-1}(1-\rho)]^{1/2},\qquad b_1=-{}^1/_2[1+\lambda\rho^{-1}(1-\rho)][\lambda^{-1}\rho(1-\rho)]^{1/2}$$

Новый факт по сравнению с полем Шварцшильда состоит в том, что возникает составляющая 4 — скорости u^3, т. е. происходит отклонение тела в поле. Чисто радиальное движение без специальной коррекции неосуществимо. Величина отклонения зависит от величины $\varkappa$, пропорциональной угловой скорости ω_0 вращения центрального тела. Не составляет труда вычислить отклонение $\varphi(\rho)$ удаляющегося от центра тела, если сохранить только малые первого порядка по λ.

Соответствующая формула будет:

$$\varphi(\rho) \approx 2\varkappa\lambda r_0^{-1}(2\mu)^{-1/2}[{}^1/_4\,\rho^{-1}(\rho-1)^{1/2}({}^1/_2-\rho^{-1}) + {}^1/_8 \operatorname{arc\,tg}(\rho-1)^{1/2}]$$

Для достаточно больших ρ можно считать, что

$$\varphi(\rho) \approx {}^1/_8\,\pi\varkappa\lambda r_0^{-1}(2\mu)^{-1/2}$$

4. Метрика статической космологической модели Эйнштейна с пространством постоянной положительной гауссовой кривизны K имеет, как известно [4], вид

$$ds^2 = dx^{02} - R^2[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)], \quad R^2 = K^{-1}, \quad x^0 = ct \tag{4.1}$$

Здесь t — так называемое универсальное время, c — скорость света в пустоте. Координаты, в которых записана метрика (4.1), изменяются в пределах

$$0 < \chi < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < x^0 < \infty$$

Расстояние l между двумя точками P, Q пространства, имеющими одинаковые две координаты $\chi = \theta = {}^1/_2\,\pi$, будет

$$l = R\,[\varphi(Q) - \varphi(P)]$$

Рассмотрим движение тела переменной массы $m(s)$, начинающееся из состояния покоя. В системе координат x^0, χ, φ, θ это означает, что для $s = 0$ координатам точки, с которой отождествляется тело, можно приписать следующие значения:

$$x^0(0) = 0, \quad \chi(0) = {}^1/_2\,\pi, \quad \theta(0) = {}^1/_2\,\pi, \quad \varphi(0) = 0 \tag{4.2}$$

а составляющие 4-скорости таковы:

$$u^0(0) = 1, \quad u^1(0) = 0, \quad u^2(0) = 0, \quad u^3(0) = 0 \tag{4.3}$$

Матрицу A возьмем диагональной; ее отличные от нуля компоненты есть

$$a^0{}_0 = 1, \quad a_1{}^1 = R, \quad a_2{}^2 = R\sin\chi, \quad a_3{}^3 = R\sin\chi\sin\theta$$

Нетрудно убедиться, что можно принять

$$\chi \equiv \theta \equiv {}^1/_2\pi, \qquad u^1 \equiv u^2 \equiv 0; \qquad \frac{\delta}{\delta s} = \frac{d}{ds}$$

Таким образом, речь идет о системе уравнений

$$\begin{aligned} cm\frac{du^0}{ds} &= -q\frac{dm}{ds}Ru^3, & \frac{dx^0}{ds} &= u^0 \\ cm\frac{du^3}{ds} &= -q\frac{dm}{ds}\frac{u^0}{R}, & \frac{d\varphi}{ds} &= u^3 \end{aligned} \tag{4.4}$$

при начальных условиях (4.2) и (4.3). К ней нужно еще добавить очевидный первый интеграл

$$u^{02} - R^2u^{32} = 1 \tag{4.5}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{gathered} u^0(s) = {}^1/_2\,\beta^{-1}(s)\,[1 + \beta^2(s)], \qquad u^3(s) = {}^1/_2\,\beta^{-1}(s)\,[\beta^2(s) - 1)]\,R^{-1} \\ x^0(s) = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{1+\beta^2(z)}{\beta(z)}\,dz, \qquad \varphi(s) = \frac{1}{2R}\int_0^s \frac{\beta^2(z)-1}{\beta(z)}\,dz \\ \beta(s) = \left[\frac{m_0}{m(s)}\right]^{q/c}, \qquad m_0 = m(0) \end{gathered} \tag{4.6}$$

Функцию $m(s)$ естественно построить так, чтобы была достигнута максимальная дальность l_m при заданном полном расходе массы $m_0 - m_1$, $m_1 = m(s_1)$ за фиксированное собственное время $\tau_1 = s_1 / c$.

При этом представляют интерес две возможности.

1. Отношение реактивной силы к текущей массе ограничено сверху

$$-q \frac{c}{m} \frac{dm}{ds} \leqslant \alpha$$

Величину α можно назвать предельным ускорением тела переменной массы под действием силы тяги.

2. Секундный расход рабочего тела ограничен сверху

$$-c \frac{dm}{ds} \leqslant \sigma$$

где σ — предельный секундный расход, измеренный в собственном времени.

При одном из этих ограничений надо так выбрать функцию $\beta(s)$, удовлетворяющую граничным условиям

$$\beta(0) = 1, \qquad \beta(s_1) = \left(\frac{m_0}{m_1}\right)^{q/c} > 1 \tag{4.7}$$

чтобы интеграл

$$l = R\varphi(s_1) = {}^1/_2 \int_0^{s_1} \beta^{-1}(z) \left[\beta^2(z) - 1\right] dz \tag{4.8}$$

был максимален. Иначе говоря, на плоскости s, β среди множества кривых, соединяющих точки $(0, 1)$ и $(s_1, \beta(s_1))$, нужно указать такую $\beta_0(s)$, для которой интеграл достигает наибольшего значения. При этом к сравнению допускаются все кусочно-гладкие кривые с неотрицательной производной в области, ограниченной горизонтальной прямой $\beta = 1$, вертикальной прямой $s = s_1$ и предельной кривой, соответствующей либо движению с предельным ускорением α, либо движению с предельным секундным расходом σ.

Нетрудно установить, что уравнение этой предельной кривой имеет вид:

в первом случае

$$\beta_*(s) = \begin{cases} \exp(\alpha s / c^2) & (0 < s < s_*^{(1)}) \\ \beta_1 & (s_*^{(1)} < s < s_1) \end{cases} \tag{4.9}$$

и во втором

$$\beta_*(s) = \begin{cases} m_0^{q/c} (m_0 - \sigma s / c)^{-q/c} & (0 < s < s_*^{(2)}) \\ \beta_1 & (s_*^{(2)} < s < s_1) \end{cases} \tag{4.10}$$

Здесь

$$\beta_1 = \beta(s_1), \quad s_*^{(1)} = c^2 \alpha^{-1} \ln \beta_1, \quad s_*^{(2)} = \sigma^{-1} (m_0 - m_1)$$

Обращаясь теперь к интегралу (4.8), легко заметить, что функция $\beta_0(s)$, дающая решение оптимальной задачи, должна обладать следующим свойством по отношению ко всем допустимым $\beta(s)$, именно, должно быть

$$\beta_0(s) - \beta(s) \geqslant 0$$

Это означает, что $\beta_0(s)$ совпадает с одной из двух предельных функций (4.9) или (4.10).

Таким образом, для достижения максимальной дальности при заданном расходе массы и фиксированном времени полета необходимо сначала двигаться с предельным секундным расходом, либо с предельным ускорением; за этим движением следует пассивный участок траектории, на котором тяга равна нулю.

Формулы для максимальной дальности таковы.

В первом случае, когда ограничено ускорение

$$l_m = {}^1/_2\,\beta_1^{-1}(\beta_1 - 1)\,[c^2\alpha^{-1}(\beta_1 - 1) + (\beta_1 + 1)\ (s_1 - c^2\alpha^{-1}\ln\beta_1)]$$

во втором, когда ограничен расход

$$l_m = {}^1/_2\,\{m_0 c\sigma^{-1}[(1-\varkappa)^{-1}(1-\beta_1^{(\varkappa-1)/\varkappa}) + (1+\varkappa)^{-1}(\beta_1^{-(\varkappa+1)/\varkappa} - 1) -$$
$$- (1-\beta_1^{-1/\varkappa})(\beta_1 - \beta_1^{-1})] + s_1(\beta_1 - \beta_1^{-1})\},\qquad \varkappa = q/c < 1$$
$$l_m = {}^1/_2\,[m_0 c\sigma^{-1}(\ln\beta_1 + {}^1/_2 - \beta_1 + \beta_1^{-1} - {}^1/_2\beta_1^{-2}) + s_1(\beta_1 - \beta_1^{-1})],\qquad \varkappa = 1$$

Исследуя геометрию траекторий, ограничимся движением с предельным постоянным ускорением. Итак, положим $\beta(s) = \exp(\alpha s / c^2)$. Очевидно, что при этом текущая масса $m(\tau)$, начальная m_0 и собственное время τ связаны соотношением

$$m(\tau) = m_0 \exp(-\alpha\tau / q)$$

Обращаясь к формулам (4.6), находим, что

$$u^0(s) = \operatorname{ch}\frac{\alpha s}{c^2},\quad u^3(s) = \frac{1}{R}\operatorname{sh}\frac{\alpha s}{c^2},\quad x^0(s) = \frac{c^2}{\alpha}\operatorname{sh}\frac{\alpha s}{c^2},\quad \varphi(s) = \frac{2c^2}{\alpha R}\operatorname{sh}^2\frac{\alpha s}{2c^2} \qquad (4.11)$$

В соответствии с обычной трактовкой ([4]) предполагается, что произвольное временное сечение $x^0 = \text{const}$ мира Эйнштейна представляет собой трехмерную сферу, вложенную в эвклидово пространство. Все пространство — время является произведением прямой на трехмерную сферу и, следовательно, есть цилиндр

$$z^{1^2} + z^{2^2} + z^{3^2} + z^{4^2} = R^2$$

вложенный в пятимерное пространство. Здесь

$$z^1 = R\sin\chi\sin\theta\sin\varphi,\quad z^4 = R\cos\chi$$
$$z^2 = R\sin\chi\sin\theta\cos\varphi,\quad z^3 = R\sin\chi\cos\theta,\quad z^5 = x^0$$

Очевидно, что при $\chi = \theta = {}^1/_2\,\pi$ мировая линия тела переменной массы, движение которого определено формулами (4.6), есть винтовая линия на двумерном цилиндре; ее параметрические уравнения

$$\begin{aligned} z^1 &= R\sin\varphi = R\sin\left(\frac{2c^2}{\alpha R}\operatorname{sh}^2\frac{\alpha s}{2c^2}\right), & z^3 &= z^4 = 0 \\ z^2 &= R\cos\varphi = R\cos\left(\frac{2c^2}{\alpha R}\operatorname{sh}^2\frac{\alpha s}{2c^2}\right), & z^5 &= \frac{c^2}{\alpha}\operatorname{sh}\frac{\alpha s}{c^2} \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Таким образом, пространственные траектории замкнуты.

Собственное время $\tau = s / c$, отсчитанное часами на движущемся теле за один виток, определяется из равенства

$$\tau = \frac{2c}{\alpha}\ln\left[\left(1 + \frac{\pi\alpha R}{c^2}\right)^{1/2} + \left(\frac{\pi\alpha R}{c^2}\right)^{1/2}\right] \qquad (4.13)$$

С другой стороны, универсальное время $t = x^0 / c$, отсчитанное часами в точке старта до момента возвращения тела, есть

$$t = \frac{2c}{\alpha}\left[\frac{\pi\alpha R}{c^2}\left(1 + \frac{\pi\alpha R}{c^2}\right)\right]^{1/2} \qquad (4.14)$$

Из того, что для $x > 0$ верно неравенство

$$\ln[(1 + x)^{1/2} + x^{1/2}] < [x(1 + x)]^{1/2} \qquad (4.15)$$

следует «парадокс близнецов», т. е. утверждение, что $\tau < t$.

Расстояние, пройденное за один виток, равно $2\pi R$. Свет проходит его за время

$$t_* = 2\pi R / c \qquad (\tau < t_* < t)$$

Если принять величину R, предложенную Лауэ, а именно $R = 5 \cdot 10^{27}$ *см*, и считать, что ускорение $\alpha = 10^3$ *см* $\cdot$ *сек*$^{-2}$, то $\pi\alpha R c^{-2} = 1.745 \cdot 10^{10}$ и можно пользоваться приближенными формулами

$$\tau \approx \frac{2c}{\alpha} \ln \left[2 \left(\frac{\pi\alpha R}{c^2} \right)^{1/2} \right], \qquad t \approx t_*$$

При этих числах

$$\frac{\tau}{t} = 7{\cdot}16 \cdot 10^{-10}, \quad \tau = 7.5 \cdot 10^8 \text{ сек} = 23.75 \text{ года.}$$

Интересно отметить, что если тело обходит несколько витков, то собственное время витка уменьшается с его номером k и при возрастании k стремится к нулю. Соответствующая формула для собственного времени, потребного на обход $k+1$ витка, имеет вид

$$\tau_{k+1} \approx c\alpha^{-1} \ln (1 + k^{-1})$$

Универсальное время, протекающее за один виток, приближается к t_* снизу.

Рассмотрим теперь движение на одном витке при условии, что на первой половине пути — πR — реактивная сила разгоняет тело, а на второй — тормозит его так, что в точку старта оно приходит с нулевой скоростью. Простые выкладки приводят к следующему результату.

Универсальное время

$$t_0 = \frac{4c}{\alpha} \left[\frac{\pi\alpha R}{2c^2} \left(1 + \frac{\pi\alpha R}{2c^2} \right) \right]^{1/2} \tag{4.16}$$

и по-прежнему $t_0 \approx t_*$. Собственное время

$$\tau_0 = \frac{4c}{\alpha} \ln \left[\left(1 + \frac{\pi\alpha R}{2c^2} \right)^{1/2} + \left(\frac{\pi\alpha R}{2c^2} \right)^{1/2} \right] \quad \tau_0 > \tau \tag{4.17}$$

Расход массы можно оценить отношением

$$\lambda_0 = \frac{m(\tau_0)}{m_0} = \left[\left(1 + \frac{\pi\alpha R}{2c^2} \right)^{1/2} + \left(\frac{\pi\alpha R}{2c^2} \right)^{1/2} \right]^{-4c/q} \tag{4.18}$$

Его полезно сравнить с таким же отношением, соответствующим обходу витка с ускорением одного знака

$$\lambda = \frac{m(\tau)}{m_0} = \left[\left(1 + \frac{\pi\alpha R}{c^2} \right)^{1/2} + \left(\frac{\pi\alpha R}{c^2} \right)^{1/2} \right]^{-2c/q} \tag{4.19}$$

Отношение этих величин

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \left(\frac{\pi\alpha R}{c^2} \right)^{c/q}, \qquad \frac{\lambda}{\lambda_0} \approx 1.745{\cdot}10^{10}, \quad q = c$$

Таким образом, торможение резко увеличивает расход массы. Это объясняется увеличением времени полета. Нетрудно убедиться, что время разгона равно времени торможения; напротив, собственное время, затраченное на обход второй половины витка с ускорением, во много раз меньше времени, затраченного на обход первой половины витка.

Автор признателен В. Я. Лину за обсуждение рассмотренной задачи.

Поступила 20 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Nikola St. Kalitzin Dynamik der relativistischen Raketen und einiger astronomischen Objekte. Verlag der Bulgarischen Akademie der Wissenschaften, София, 1963.
2. Ackeret I. Zur Theorie der Raketen. Helvetia Physica Acta, 1946, vol. 19, p. 103. Рус. пер.: сб. «Физика и химия реактивного движения». М., Изд-во иностр. лит., 1948.
3. Скроцкий Г. В. Поле вращающегося шара. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 1, с. 73.
4. Von Laue M. Die Relativitätstheorie. Bd. 2. Braunschweig, 1956.