ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНОГО ОПТИМАЛЬНО УПРАВЛЯЕМОГО ПРОЦЕССА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. Г. Павлов, В. П. Чепрасов

(Казань)

Ставится задача построения оптимального управления процессом, описываемым нелинейным уравнением типа уравнения теплопроводности. На основе теории, развитой Л. В. Овсянниковым [1], отыскиваются группы преобразований, позволяющие систему уравнений задачи в частных производных точно свести к обыкновенным. Рассматриваются несколько типов краевых условий, которые формулируются в соответствии с найденными преобразованиями.

1. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается уравнением в безразмерной форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(f(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \alpha\varphi - \alpha u = 0 \tag{1.1}$$

где $\varphi(t, x)$ — искомое распределение, $f(\varphi)$ — некоторая нелинейная функция, вид которой будет определен в дальнейшем, α — постоянная величина, $u(t, x)$ — распределенное управление

$$t \in [0,T], \; x \in [0,l]$$

Уравнение, подобное (1.1), описывает, например, процессы нагрева, процессы, встречающиеся в химических реакторах и др.

Отыскивается управление $u(t, x)$, доставляющее минимум функционала

$$J_u = \int\limits_0^T \int\limits_0^l Q u^2 dx dt \tag{1.2}$$

где Q, T, l — известные положительные постоянные величины. Краевые условия для уравнения (1.1) будут сформулированы в дальнейшем в соответствии с найденными преобразованиями. Далее отыскиваются группы преобразований, позволяющие найти инвариантно групповые решения ранга единицы.

Уравнение (1.1) удобно представить в виде системы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha\varphi - \alpha u = 0, \qquad w - f(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \tag{1.3}$$

Для решения вариационной задачи используется формализм Лагранжа, доставляющий необходимые условия экстремума (1.2) в форме уравнений Остроградского

$$\lambda_1(t, x)\alpha - \lambda_2(t, x)\frac{df}{d\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}[\lambda_2(t, x) f(\varphi)] - \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} = 0 \tag{1.4}$$

$$\lambda_2 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = 0, \qquad 2Qu - \alpha\lambda_1 = 0 \tag{1.5}$$

Из уравнений (1.5) множители Лагранжа определяются в виде

$$\lambda_1 = \frac{2Q}{\alpha} u, \qquad \lambda_2 = -\frac{2Q}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(\varphi)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u = 0 \tag{1.6}$$

Теперь уравнения вариационной задачи могут быть записаны следующим образом

$$(S) \qquad \varphi_t = w_x - \alpha\varphi + \alpha u, \qquad \varphi_x = w\,[f(\varphi)]^{-1} \tag{1.7}$$

$$u_t = \alpha u - f(\varphi) v_x, \quad u_x = v \tag{1.8}$$

2. Построение основной группы G. Система (S) уравнений включает четыре искомые функции φ, u, w, v от двух независимых переменных x, t. Совокупность зависимых и независимых величин рассматривается как набор координат точки пространства E_6.

Группа преобразований G определяется алгеброй Ли инфинитезимальных операторов

$$Y = \xi_t \frac{\partial}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial}{\partial x} + \xi_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \xi_u \frac{\partial}{\partial u} + \xi_w \frac{\partial}{\partial w} + \xi_v \frac{\partial}{\partial v} \tag{2.1}$$

где ξ_t, ξ_x, ξ_φ, ξ_u, ξ_w, ξ_v — координаты оператора Y, являющиеся функциями координат пространства E_6.

Вводится в рассмотрение пространство E_{14}, являющееся продолжением пространства E_6. Точка в E_{14} определяется координатами

$$t,\ x,\ \varphi,\ u,\ w,\ v,\ \varphi_t,\ \varphi_x,\ u_t,\ u_x,\ w_t,\ t_x,\ x_t,\ v_x$$

Вводится группа G^* — первое продолжение G преобразований. G^* изоморфно G. Оператор группы G^* определяется выражением (2.2)

$$Y^* = Y + \xi_{\varphi_t} \frac{\partial}{\partial \varphi_t} + \xi_{\varphi_x} \frac{\partial}{\partial \varphi_x} + \xi_{u_t} \frac{\partial}{\partial u_t} + \xi_{u_x} \frac{\partial}{\partial u_x} + \xi_{w_t} \frac{\partial}{\partial w_t} + \xi_{w_x} \frac{\partial}{\partial w_x} + \xi_{v_t} \frac{\partial}{\partial v_t} + \xi_{v_x} \frac{\partial}{\partial v_x}$$

Группа G будет основной для (S) тогда и только тогда, когда в E_{14} выполняются условия инвариантности [1]

$$Y^* [\Psi] = 0 \tag{2.3}$$

где Ψ — многообразие, определяемое (S). Условия (2.3) тогда принимают вид

$$\xi_{\varphi_t} - \xi_{w_x} + \alpha\xi_\varphi - \alpha\xi_u = 0, \quad f(\varphi)\,\xi_{\varphi_x} + \frac{df}{d\varphi}\varphi_x\xi_\varphi - \xi_w = 0$$

$$\xi_{u_t} + f(\varphi)\,\xi_{v_x} + \frac{df}{d\varphi} v_x \xi_\varphi - \alpha\xi_u = 0, \quad \xi_{u_x} - \xi_v = 0 \tag{2.4}$$

Выражения для координат продолженного оператора через координаты оператора Y и координаты пространства E_{14} получаются в соответствии с [1]; так, например,

$$\xi_{\varphi_t} = D_t(\xi_\varphi) - \varphi_t D_t(\xi_t) - \varphi_x D_t(\xi_x), \qquad \xi_{\varphi_x} = D_x(\xi_\varphi) - \varphi_t D_x(\xi_t) - \varphi_x D_x(\xi_x)$$

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \varphi_t \frac{\partial}{\partial \varphi} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + w_t \frac{\partial}{\partial w} + v_t \frac{\partial}{\partial v}$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \varphi_x \frac{\partial}{\partial \varphi} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + w_x \frac{\partial}{\partial w} + v_x \frac{\partial}{\partial v}$$

Подобным же образом могут быть записаны выражения для остальных координат.

Условия инвариантности позволяют получить систему определяющих уравнений алгебры Ли. В этой системе неизвестными функциями являются координаты оператора Y, а независимыми переменными t, x, φ, u, w, v.

Исследования определяющих уравнений для координат инфинитезимального оператора (2.1) доставляют следующие соотношения:

$$\xi_\varphi = \frac{f}{f'}\left(2\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \frac{d\xi_t}{dt}\right) \tag{2.5}$$

$$\xi_w = w\left\{\frac{\partial \xi_x}{\partial x}\left[1 + 2\left(\frac{f}{f'}\right)'\right] - \frac{d\xi_t}{dt}\left[1 + \left(\frac{f}{f'}\right)'\right]\right\} + 2\frac{f^2}{f'}\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} \tag{2.6}$$

$$\xi_u = \frac{f}{f'}\left(2\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \frac{d\xi_t}{dt}\right) + \frac{f}{\alpha f'}\left(2\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} - \frac{d^2\xi_t}{dt^2}\right) + \tag{2.7}$$

$$+ (u - \varphi)\left(\frac{f}{f'}\right)'\left(2\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \frac{d\xi_t}{dt}\right) + (\varphi - u)\frac{d\xi_t}{dt} - \frac{w}{\alpha f}\frac{\partial \xi_x}{\partial t} - \frac{w}{\alpha}\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2}\left[1 + 2\left(\frac{f}{f'}\right)'\right] -$$

$$- \frac{w^2}{\alpha f}\left(\frac{f}{f'}\right)''\left[2\frac{\partial \xi_x}{\partial x} - \frac{d\xi_t}{dt}\right] - \frac{2}{\alpha}\frac{f^2}{f'}\frac{\partial^3 \xi_x}{\partial x^3} - \frac{2w}{\alpha f}\left(\frac{f^2}{f'}\right)'\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2}$$

$$\xi_v = v\left(\frac{\partial \xi_u}{\partial u} - \frac{\partial \xi_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial \xi_u}{\partial x} \tag{2.8}$$

$$\alpha\xi_u - f\left(\frac{\partial \xi_v}{\partial x} + v\frac{\partial \xi_v}{\partial u}\right) - \frac{\partial \xi_u}{\partial t} - \alpha u\frac{\partial \xi_u}{\partial u} + \alpha u\frac{d\xi_t}{dt} + v\frac{\partial \xi_x}{\partial t} = 0 \tag{2.9}$$

Здесь и всюду штрих означает операцию дифференцирования по φ. При этом

$$\xi_t = \xi_t(t), \quad \xi_x = \xi_x(t, x), \quad \xi_\varphi = \xi_\varphi(t, x, \varphi)$$
$$\xi_u = \xi_u(t, x, u), \quad \xi_w = \xi_w(t, x, \varphi, w), \quad \xi_v = \xi_v(t, x, u, v)$$

Полученные соотношения (2.5) — (2.9) используются в дальнейшем для исследования групповых свойств системы (S), для некоторых типов нелинейной зависимости $f(\varphi)$ и краевых условий.

А. Рассматривается случай определения основной группы для произвольной зависимости $f(\varphi)$. Так как ξ_u не зависит от φ, w, то из (2.7) вытекают соотношения:

$$\frac{d\xi_t}{dt} = \frac{\partial \xi_x}{\partial t} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \xi_x}{\partial x^3} = 0$$

Уравнение (2.9) тождественно удовлетворяется. Здесь координаты оператора ξ_t, ξ_x будут определяющими постоянными, а $\xi_\varphi = \xi_w = \xi_u = \xi_v = 0$. Следовательно, базис алгебры Ли основной группы системы (S) состоит из операторов

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}$$

Тогда представители классов подобных подалгебр порядка единицы имеют вид [1]

$$\langle Y_2 \rangle, \qquad \langle Y_1 + K Y_2 \rangle \tag{2.10}$$

где K — любое вещественное число. Этим классам соответствуют подгруппы H_1, H_2 основной группы G.

Б. Группа преобразований G может быть расширена за счет специального вида функции $f(\varphi)$. Нетрудно видеть из (2.7), что ξ_u не будет зависеть от w и φ при

$$f(\varphi) = C_1 \varphi^{2m} \quad \text{или} \quad f(\varphi) = C_2 e^{n\varphi} \tag{2.11}$$

где C_1, C_2, m, n — произвольные постоянные, а

$$\frac{d\xi_t}{dt} = \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \xi_x}{\partial x^3} = \frac{\partial \xi_x}{\partial t} = 0$$

В рассматриваемом здесь случае координаты инфинитезимального оператора Y имеют вид

$$\xi_t = \xi_{t0}, \quad \xi_x = \xi_{x0} + \xi_{x1} x, \quad \xi_\varphi = m^{-1}\xi_{x1}\varphi, \quad \xi_u = m^1 \xi_{x1} u \tag{2.12}$$
$$\xi_w (m+1) m^{-1} \xi_{x1} w, \quad \xi_v = (1-m) m^{-1} \xi_{x1} v$$

Определяющими постоянными здесь будут ξ_{t0}, ξ_{x0}, ξ_{x1}.

Представители классов подобных подалгебр порядка единицы примут вид

$$\langle Y_2 \rangle, \ \langle Y_1 + K_1 Y_2 \rangle, \ \langle K_2 Y_1 + Y_3 \rangle$$
$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.13}$$
$$Y_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\varphi}{m}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{u}{m}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{m+1}{m} w \frac{\partial}{\partial w} + \frac{1-m}{m} v \frac{\partial}{\partial v}$$

Здесь K_1, K_2 — произвольные вещественные числа.

Этим классам соответствуют подгруппы H_1', H_2, H_3 основной группы G.

3. Инвариантно-групповые решения системы (S). Для каждой подгруппы отыскивается полный набор функционально независимых инвариантов I_j ($j = 1, 2, \ldots, 5$).

Если многообразие, заданное уравнениями $\varphi = \varphi(x, t)$, $u = u(x, t)$, $w = w(x, t)$, $v = v(x, t)$, будет неособым, т. е. ранг матрицы из координат инфинитезимальных операторов в точках многообразия не меньше, чем общий ранг этой матрицы, то многообразие может быть задано системой уравнений

$$\Phi^\beta(I_1, I_2, \ldots) = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, 4)$$

Принимая за новую независимую переменную, любой инвариант I_j, можно найти соотношения $I_k(I_j)$ ($k \neq j$). Разрешая их относительно φ, u, w, v и подставляя в (S), можно получить системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в дальнейшем обозначаются S/H_i ($i = 1, 2, 3$).

Далее рассматриваются инвариантно-групповые решения для случаев А и Б. Показано, что каждой подгруппе преобразований H_i должен соответствовать определенный тип краевых условий, которые не могут быть сформулированы, пока не найдено преобразование.

А°. Полный набор функционально независимых инвариантов для представителя класса $\langle Y_2\rangle$ имеет вид

$$I_1 = t, \qquad I_2 = \varphi(t), \qquad I_3 = u(t)$$

Система S/H_1 представляется в форме

$$\frac{dI_2}{dI_1} = \alpha(I_3 - I_2), \qquad \frac{dI_3}{dI_1} = \alpha I_3 \tag{3.1}$$

Найденная подгруппа преобразований может быть использована, когда краевые условия для исходной задачи задаются, например, в виде

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0, \qquad u(x, 0) = u_0, \qquad \varphi(x, T) = \varphi_T$$

Здесь φ_0, u_0, φ_T — постоянные величины. Равенство $\varphi(x, T) = \varphi_T$ служит для определения момента T окончания управляемого процесса.

Подгруппе H_2 с оператором $Y_1 + KY_2$ соответствуют инварианты

$$I_1 = x - kt,\ I_2 = \varphi(x, t),\ J_3 = u(x, t),\ I_4 = w(x, t),\ I_5 = v(x, t)$$

Система S/H_2 имеет вид

$$k\frac{dI_2}{dI_1} = \alpha I_2 - \alpha I_3 - \frac{dI_4}{dI_1}, \qquad f(I_2)\frac{dI_2}{dI_1} = I_4 \tag{3.2}$$

$$k\frac{dI_3}{dI_1} = f(I_2)\frac{dI_5}{dI_1} - \alpha I_3, \qquad \frac{dI_3}{dI_1} = I_5$$

Исключением I_4 и I_5 система (3.2) приводится к виду

$$\frac{d^2I_2}{dI_1^2} = \frac{1}{f(I_2)}\left[\alpha(I_2 - I_3) - \frac{dI_2}{dI_1}\left(\frac{df(I_2)}{dI_1} + k\right)\right], \qquad \frac{d^2I_3}{dI_1^2} = \frac{1}{f(I_2)}\left(k\frac{dI_3}{dI_1} + \alpha I_3\right) \tag{3.3}$$

В этом случае граничные условия могут быть сформулированы следующим образом:

$$I_2(0) = \varphi(0, 0), \qquad I_3(0) = u(0, 0), \qquad \left.\frac{dI_2}{dI_1}\right|_{I_1=0} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\t=0}}, \qquad \left.\frac{dI_3}{dI_1}\right|_{I_1=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\t=0}}$$

Для определения момента окончания процесса может быть использовано условие

$$\varphi(0, T) = \varphi_T.$$

Б°. Этот вариант отличается от А° наличием оператора

$$k_2Y_1 + Y_3 = k_2\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\varphi}{m}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{u}{m}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{m+1}{m}w\frac{\partial}{\partial w} + \frac{1-m}{m}v\frac{\partial}{\partial v} \tag{3.4}$$

Набор функционально независимых инвариантов представляется здесь соотношениями

$$I_1 = x\exp\frac{-t}{k_2}, \qquad I_2 = \varphi\exp\frac{-t}{mk_2}, \qquad I_3 = u\exp\frac{-t}{mk_2}$$

$$I_4 = w\exp\frac{-(m+1)t}{mk_2}, \qquad I_5 = v\exp\frac{-(1-m)t}{mk_2}$$

Система S/H_3 приводится к виду

$$mk_2c_1I_2^{2m}\frac{d^2I_2}{dI_1^2} = I_2(1 + \alpha mk_2) - \alpha mk_2I_3 - mI_1\frac{dI_2}{dI_1} - 2m^2k_2c_1I_2^{2m-1}\left(\frac{dI_2}{dI_1}\right)^2$$

$$mk_2c_1I_2^{2m}\frac{d^2I_3}{dI_1^2} = I_3(\alpha mk_2 - 1) + mI_1\frac{dI_3}{dI_1}$$

$$I_4 = c_1I_2^{2m}\frac{dI_2}{dI_1}, \qquad I_5 = \frac{dI_3}{dI_1} \tag{3.5}$$

Для нее могут быть использованы граничные условия, например, типа (3.4).

Оптимальное управление в рассмотренных случаях строится после отыскания соответствующих инвариантов.

Вследствие независимости координат ξ_t, ξ_x, ξ_u, ξ_φ от вспомогательных переменных w, v можно записать «укороченный» оператор, относящийся к преобразованиям в пространстве t, x, u, φ. Уравнения вариационной задачи рассматриваются при этом в форме (1.1), (1.6).

Авторы не ставили своей целью проведения анализа связи краевых условий задачи с группами преобразований. Установлено, что каждой группе преобразований должны соответствовать определенные типы краевых условий.

Поступила 24 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд-во СО АН СССР, 1962.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Л. А. Розенберг

(Москва)

Выводятся ковариантные уравнения движения точки переменной массы (впредь называемой телом) в общей теории относительности, которые далее применяются для описания движения в поле Шварцшильда, во внешнем поле вращающейся сферически симметричной массы и в статической вселенной Эйнштейна.

1. Обычный вывод уравнений движения тела переменной массы, использующий законы сохранения, в общей теории относительности не проходит, так как отсутствует корректная формулировка самих законов сохранения. Если, однако, пренебречь возмущением метрики, связанным с массой движущегося тела, то его уравнения движения можно установить, опираясь на принцип эквивалентности. Пусть на многообразии V_4 (пространство — время) в некоторой его области введены координаты x^k и задана метрика

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k \qquad (i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

Введем в окрестности точки $Q\ (x_*^k)$ многообразия локально-лоренцовы координаты y^k (система K_0) следующим образом:

$$y^k = a_i^{\ k}\,(x^i - x_*^{\ i}) + {}^1\!/_2\Gamma_{js}^{\ \ i} a_i^{\ k}\,(x^j - x_*^{\ j})\,(x^s - x_*^{\ s})$$

где a_i^k образуют неособенную матрицу A; $\Gamma_{js}^{\ \ i}$ — афинная связность на V_4, вычисленная в точке Q через x^k. В системе K_0 производные тензора g_{ik} в точке Q $(y^k = 0)$ равны нулю, а сами компоненты g_{ik} в ее малой окрестности можно считать постоянными с точностью до малых второго порядка.

Постоянные a_i^k должны быть такими, чтобы в системе K_0 в точке Q метрический тензор имел компоненты:

$$g_{ik} = 0,\ i \neq k,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = -1$$

Сами $a^k{}_i$ являются функциями чисел x_*^k.

Системе K_0 поставим в соответствие систему K с тем же репером из пространства T_4, касательного к многообразию в точке Q. В системе K верны законы сохранения вектора энергии — импульса в том виде, как они формулируются в специальной теории относительности.