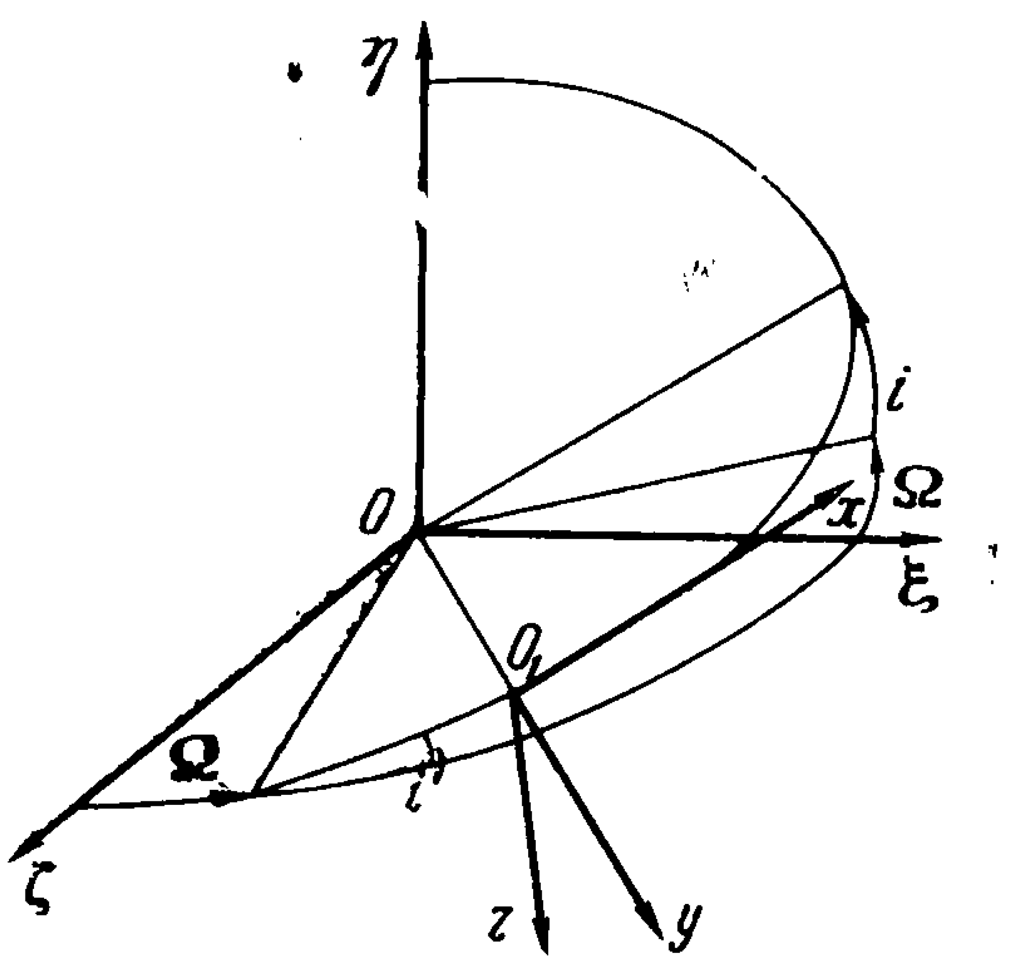
О НЕКОТОРЫХ ЗАКОНАХ УПРАВЛЕНИЯ ОРБИТОЙ КОСМИЧЕСКОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

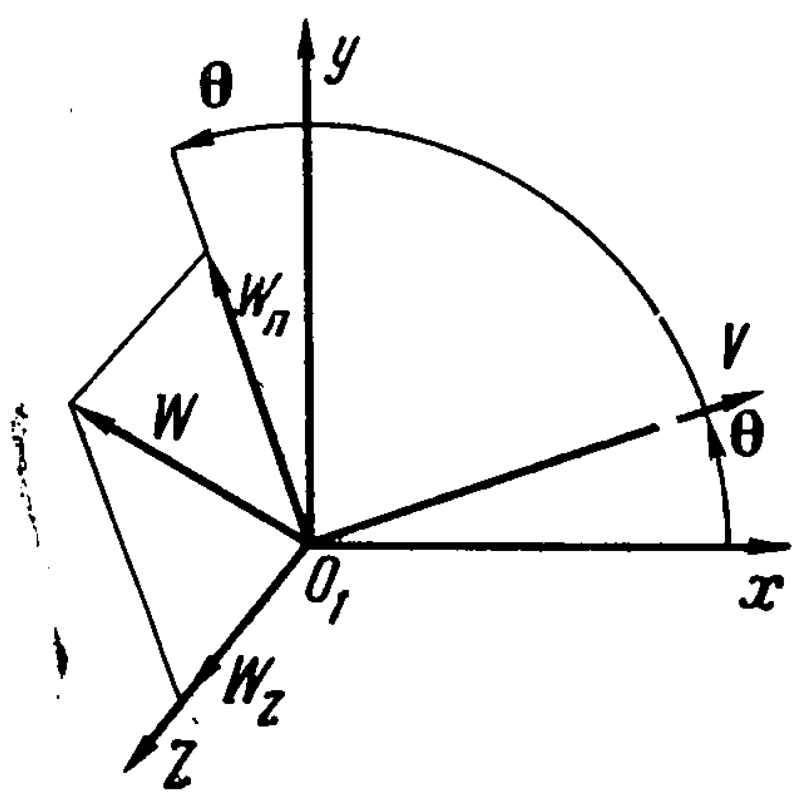
Д. А. Маматказин (Москва)

Рассматривается задача о движении космического летательного аппарата под действием управляющего ускорения в плоскости, перпендикулярной вектору абсолютной скорости его центра тяжести. Предлагаются законы управления, позволяющие получить решение в аналитическом виде.

1. Движение космического летательного аппарата в центральном поле тяготения под действием управляющего ускорения **W** в плоскости, перпендикулярной вектору абсолютной скорости **V** его центра тяжести O_1, удобно рассмотреть во вращающейся правой ортогональной системе координат $Oxyz$, ось y которой совпадает с радиусом-вектором **r**, проведенным из центра тяготения O в точку, O_1, а ось x направлена в сторону движения так, что **V** лежит в плоскости xy. Ориентация осей $Oxyz$ относительно инерциальных координат $O\ \xi\eta\zeta$ определяется (фиг. 1) долготой восходящего узла Ω, наклонением мгновенной плоскости орбиты к экватору i и углом дальности u.



Фиг. 1



Фиг. 2

Вектор управляющего ускорения **W** отображается на нормаль и бинормаль к траектории движения проекциями W_n и W_z, а наклон вектора абсолютной скорости **V** к местному горизонту определяется углом θ (фиг. 2).

Уравнения движения аппарата имеют вид:

$$V_x^{\cdot} = -W_n \sin\theta + \omega_z V_y, \quad V_y^{\cdot} = W_n \cos\theta - \omega_z V_x - g$$

$$0 = W_z + \omega_y V_x, \quad \omega_z = -V_x/r, \quad g = g_0 (R_0/r)^2 \tag{1.1}$$

Скорости изменения углов вращающихся осей относительно инерциальных определяются известными дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\Omega}{dt} = \omega_y \frac{\sin u}{\sin i}, \quad \frac{di}{dt} = \omega_y \cos u, \quad \frac{du}{dt} = -\omega_z - \omega_y \sin u \operatorname{ctg} i \tag{1.2}$$

Точное решение этой задачи при $W_n = 0$ и $W_z = \mathrm{const}$ для круговой орбиты приводится в работах [1,2], а в работе [3], кроме того, дается приближенное решение для случая эллиптической орбиты. В работе [4] приводится решение для случая $W_n = 0$, $W_z = kr^{-3}$. Ниже приводятся законы изменения W_n и W_z, позволяющие получить точное решение задачи движения аппарата в общем виде (для круговых, эллиптических, параболических и гиперболических орбит).

2. Уравнения (1.1) имеют интеграл энергии

$$\tfrac{1}{2}V^2 - gr = h \tag{2.1}$$

Кроме того, первое из них с учетом четвертого преобразуется к выражению

$$\frac{d(V_x r)}{dt} = -W_n \frac{rr^{\cdot}}{V} \tag{2.2}$$

Это уравнение с использованием уравнения (2.1) интегрируется в квадратурах, если проекция управляющего ускорения на нормаль к траектории движения аппарата $W_n = W_n(r)$. Кинематические уравнения (1.2) интегрируются, если проекцию управляющего ускорения на бинормаль к траектории изменять по закону;

$$W_z = KV_x^2/r \qquad (K = \mathrm{const}) \tag{2.3}$$

В этом случае в соответствии с третьим и четвертым уравнениями (1.1)

$$\omega_y = K\omega_z \tag{2.4}$$

и последние два уравнения (1.2) сводятся к уравнению в полных дифференциалах, после интегрирования которого получается

$$\cos i - K \sin u \sin i = k, \quad k = \cos i_0 - K \sin u_0 \sin i_0 \tag{2.5}$$

Попутно отмечается, что в соответствии со вторым уравнением (1.2) аргумент i достигает свои экстремальные значения i_*, когда

$$u = {}^1\!/_2\pi + m\pi \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

При этом (2.5) преобразуется к выражению

$$-(1 + K^2)x_*^2 + 2kx_* + K^2 - k^2 = 0 \qquad (x_* = \cos i_*) \tag{2.6}$$

Второе уравнение (1.2) с учетом (2.4) и (2.5) приводится к виду

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{-(1+K)^2x^2 + 2kx + K^2 - k^2}} = -\omega_z dt \qquad (x = \cos i) \tag{2.7}$$

Величина ω_z является знакопостоянной отрицательной функцией, поэтому обе части равенства (2.7) всегда положительны.

Так как дифференциал dx меняет знак при переходе аргумента x через экстремальное значение $x = x_*$, а левая часть (2.7) всегда знакопостоянна, то в этом случае необходимо разбивать пределы интегрирования. Для обеспечения положительности левой части (2.7) на различных участках орбиты принимается

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{-(1+K^2)\,x^2 + 2kx + K^2 - k^2}} = \frac{dx \operatorname{sign} x^{\cdot}}{\sqrt{-(1+K^2)\,x^2 + 2kx + K^2 - k^2}}$$

$$\operatorname{sign} x^{\cdot} = \operatorname{sign}(K \cos u) \qquad (i > 0) \tag{2.8}$$

Теперь интеграл от левой части (2.7) можно представить в виде

$$J = \int_{x_0}^{x_k} \frac{dx \operatorname{sign}(K \cos u)}{\sqrt{-(1+K^2)\,x^2 + 2kx + K^2 - k^2}} \tag{2.9}$$

В случае круговой орбиты $\omega_z = \mathrm{const}$ и правая часть (2.7) интегрируется элементарно. Если же орбита не круговая, необходимо сначала выразить время через радиус

$$dt = \frac{dr}{V_y} = \frac{dr}{\sqrt{V^2 - V_x^2}} \operatorname{sign} r^{\cdot} \tag{2.10}$$

Здесь V_x — известная функция радиуса r после интегрирования (2.2). С учетом (2.10) интеграл от правой части (2.7) представляется в виде

$$J = -\int_{r_0}^{r_k} \omega_z \frac{dr}{\sqrt{V^2 - V_x^2}} \operatorname{sign} r^{\cdot} \tag{2.11}$$

Этот интеграл легко вычисляется, если управляющее ускорение, нормальное к траектории движения, изменять по закону

$$W_n = AV/r \qquad (A = \mathrm{const}) \tag{2.12}$$

Действительно, в этом случае, после интегрирования (2.2) имеем

$$V_x r = B - Ar, \qquad B = (V_{x0} + A)r_0 \tag{2.13}$$

и (2.11) приводится к виду

$$J = \int_{r_0}^{r_k} \frac{(B - Ar)\,dr \operatorname{sign} r^{\cdot}}{r\sqrt{ar^2 + br + c}} \qquad \left(\begin{matrix} a = 2h - A^2, \; c = -B^2 \\ b = 2\,(g_0R_0^2 + AB) \end{matrix}\right)$$

Из полученного выражения устанавливается, что экстремальные значения радиуса r достигаются при $ar_*^2 + br_* + c = 0$.

Так как в (2.11) подынтегральная функция всегда знакопостоянна, а дифференциал dr меняет знак в момент достижения равенства $r = r_*$, то необходимо разбивать пределы интегрирования в случае перехода r через экстремум. Для упрощения выкладок далее всюду предполагается, что во время воздействия на аппарат управляющих ускорений W_n и W_z аргументы x и r не переходят через экстремальные значения x_* и r_*. При этом $\operatorname{sign} x^{\cdot} = \operatorname{sign} x_0^{\cdot}$ и $\operatorname{sign} r^{\cdot} = \operatorname{sign} r_0^{\cdot}$. Преобразованием первых двух уравнений (1.2) получается

$$\frac{d\Omega}{di} = \frac{\operatorname{tg} u}{\sin i}$$

Это уравнение с учетом (2.5) и (2.8) приводится к виду

$$\Omega - \Omega_0 = \int\limits_{x_0}^{x_k} \frac{(x - k)\, dx \operatorname{sign}(K \cos u)}{(x^2 - 1)\sqrt{-(1 + K^2)x^2 + 2kx + K^2 - k^2}} \qquad (x = \cos i) \tag{2.14}$$

При сделанных выше предположениях о характере изменения аргументов x и r на активном участке после интегрирования получается:

из (2.9)

$$J = -\frac{\operatorname{sign}(\cos u_0)}{\sqrt{1 + K^2}}\left[\arcsin\frac{-(1 + K^2)\cos i + k}{\varkappa} - \arcsin\frac{-(1 + K^2)\cos i_0 + k}{\varkappa}\right]$$

$$(\varkappa = K\sqrt{1 + K^2 - k^2})$$

из (2.11)

$$J = \operatorname{sign} r_0^{\cdot}\left[\left(\arcsin\frac{br + 2c}{r\sqrt{-\Delta}} - \arcsin\frac{br_0 + 2c}{r_0\sqrt{-\Delta}}\right) + \frac{A}{\sqrt{-a}}\left(\arcsin\frac{2ar + b}{\sqrt{-\Delta}} - \arcsin\frac{2ar_0 + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)\right] \qquad (a < 0,\ \Delta = 4ac - b^2 < 0)$$

$$J = \operatorname{sign} r_0^{\cdot}\left[\left(\arcsin\frac{br + 2c}{r\sqrt{-\Delta}} - \arcsin\frac{br_0 + 2c}{r_0\sqrt{-\Delta}}\right) - \frac{A}{\sqrt{a}}\ln\frac{2\sqrt{a(ar^2 + br + c)} + 2ar + b}{2\sqrt{a(ar_0^2 + br_0 + c)} + 2ar_0 + b}\right] \qquad (a > 0)$$

$$J = \operatorname{sign} r_0^{\cdot}\left[2\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{br + c}}{B} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{br_0 + c}}{B}\right) - \frac{2A}{b}\left(\sqrt{br + c} - \sqrt{br_0 + c}\right)\right] \qquad (a = 0)$$

В случае круговой орбиты, когда $\Delta = 0$, получается

$$J = \frac{V_0}{r_0}(t - t_0) \tag{2.15}$$

Из (2.10)

$$t - t_0 = \frac{\operatorname{sign} r_0^{\cdot}}{a}\left[\sqrt{ar^2 + br + c} - \sqrt{ar_0^2 + br_0 + c} + \frac{b}{2\sqrt{-a}}\left(\arcsin\frac{2ar + b}{\sqrt{-\Delta}} - \arcsin\frac{2ar_0 + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)\right] \qquad (a < 0,\ \Delta < 0)$$

$$t - t_0 = \frac{\operatorname{sign} r_0^{\cdot}}{a}\left[\sqrt{ar^2 + br + c} - \sqrt{ar_0^2 + br_0 + c} - \frac{b}{2\sqrt{a}}\ln\frac{2\sqrt{a(ar^2 + br + c)} + 2ar + b}{2\sqrt{a(ar_0^2 + br_0 + c)} + 2ar_0 + b}\right] \qquad (a > 0)$$

$$t - t_0 = \frac{2}{3b^2}\left[(br - 2c)\sqrt{br + c} - (br_0 - 2c)\sqrt{br_0 + c}\right] \qquad (a = 0)$$

Из (2.14)

$$\Omega - \Omega_0 = \frac{\operatorname{sign}(\cos u_0)}{2}\left\{\arcsin\frac{1}{\varkappa}\left[-\frac{(k + 1)^2}{\cos i + 1} + K^2 + 1 + k\right] - \arcsin\frac{1}{\varkappa}\left[-\frac{(k + 1)^2}{\cos i_0 + 1} + K^2 + 1 + k\right] + \arcsin\frac{1}{\varkappa}\left[-\frac{(k - 1)^2}{\cos i - 1} - K^2 - 1 + k\right] - \arcsin\frac{1}{\varkappa}\left[-\frac{(k - 1)^2}{\cos i_0 - 1} - K^2 - 1 + k\right]\right\}$$

В частном случае, при $K = 0$, из уравнений (1.2) и (2.4) получается, что

$$\Omega = \Omega_0, \qquad i = i_0, \qquad u - u_0 = -\int_{t_0}^{t} \omega_z d\tau \tag{2.16}$$

Из (2.11) с учетом (2.10) и последнего уравнения (2.16) получается

$$J = u - u_0$$

Все возможные формы орбит, описываемые формулами (2.15), будут коническими сечениями в плоскости развертки, которые изменяют свою ориентацию во времени:

$a < 0$, $\Delta < 0$ — орбита эллиптическая

$a < 0$, $\Delta = 0$ — орбита круговая

$a = 0$ — орбита параболическая

$a > 0$ — орбита гиперболическая

Движение плоскости орбиты характеризуется последней формулой (2.15) и его характер не зависит от формы орбиты. Совокупность формул (2.1), (2.5), (2.13) и (2.15) дает возможность предсказывать будущие параметры орбиты и положение аппарата при действии на него управляющего ускорения W с составляющими $W_n = AV/r$ и $W_z = KV_x^2/r$ и, тем самым, в классе орбит с постоянным интегралом энергии осуществлять управление желаемым образом.

3. В качестве примера определяются значения передаточных коэффициентов K и A для законов управления (2.3) и (2.12), которые обеспечивают переход аппарата с эллиптической орбиты на заданную круговую орбиту. По углам Ω_0 и i_0 в начале управления и Ω_k и i_k в конце управления решением последнего уравнения (2.15) находится потребное значение K, обеспечивающее совмещение плоскости орбиты аппарата с заданной. Радиус круговой орбиты с заданным интегралом энергии согласно эллиптической теории движения определяется по формуле

$$r_k = -g_0 R_0^2 / 2h$$

При этом окружная скорость на орбите

$$V_{xk} = V_k = \sqrt{-2h}$$

После определения r_k и V_k потребная величина передаточного коэффициента A определяется, согласно (2.13), по формуле

$$A = \frac{V_{xk} r_k - V_{x0} r_0}{r_0 - r_k}$$

По достижении равенств $\Omega = \Omega_k$ и $i = i_k$ отключается управляющее ускорение W_z и фиксируется ориентация плоскости орбиты. При $r = r_k$ и $V_x = V_{xk}$ отключается управляющее ускорение W_n и фиксируется форма орбиты (интеграл площадей, согласно (2.13), становится постоянным).

В других возможных случаях управляемого движения способ определения передаточного коэффициента K остается аналогичным рассмотренному выше. Коэффициент A находится в зависимости от заданного значения интеграла площадей (2.13) в конце управляемого движения и ориентации заданной формы орбиты в пространстве.

Поступила 31 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Илларионов В. Ф., Шкадов Л. М. Поворот плоскости круговой орбиты спутника. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
2. Гуськов Ю. П. Метод управления поворотом плоскости круговой орбиты спутника. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
3. Lass H., Solloway C. B. Mothion of sattellite under the influence of constant normal thrust. ARS Journal, 1962, vol. 32, No 1.
4. Копнин Ю. М. К задаче о повороте плоскости орбиты спутника. Космич. исслед., 1965, т. 3, вып. 4.