О БИФУРКАЦИЯХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ТОЧЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПРИ КОТОРЫХ КОРЕНЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА ПЕРЕХОДИТ ЧЕРЕЗ ЗНАЧЕНИЕ $\lambda = -1$

Л. А. Комраз (Горький)

Задача о бифуркациях неподвижных точек точечного преобразования, при которых корень характеристического полинома переходит через значение $\lambda = -1$ (через поверхность N_{-1} [1]) приводит к вычислению величины g_0, знак которой определяет характер бифуркации. Знак величины g_0 не характеризует, однако достаточно полно поведение системы вблизи тех точек поверхности, в которых величина g_0 обращается в нуль. Особенности поведения системы вблизи таких точек существенно зависят от знака величины h_0, для вычисления которой необходимо учесть в разложении члены до пятого порядка включительно. Отметим, что существует определенная аналогия между величинами g_0 и h_0 и ляпуновскими величинами α_3 и α_5 [2,3]. В работе для случая точечного преобразования T прямой в прямую показано, что в зависимости от величин g_0 и h_0 (и значения корня характеристического полинома) в окрестности простой неподвижной точки преобразования T могут существовать одна или две пары неподвижных точек преобразования T^2 (устойчивых или неустойчивых). Приводится пример системы, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением третьего порядка, в которой осуществляется указанная бифуркация.

1. Пусть задано точечное преобразование T прямой в прямую

$$\bar{z} = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + \ldots \quad (\lambda \equiv a_1)$$

в окрестности неподвижной точки $\bar{z} = z = 0$. Преобразование T^2 имеет вид:

$$Z = \lambda^2 z + \lambda\ (1 + \lambda)\ a_2 z^2 + g z^3 + f z^4 + h z^5 + \ldots$$

Здесь

$$\begin{gathered} g = \lambda[(1 + \lambda^2)a_3 + 2a_2^2] \equiv g_0 + (\lambda^2 - 1)b_3 \\ f = \lambda\,(1 + \lambda^3)a_4 + \lambda\,(2 + 3\lambda)\,a_2 a_3 + a_2^3 \equiv -{}^1/_2 a_2 g_0 + (\lambda^2 - 1)b_4 \\ h = \lambda\,(1 + \lambda^4)a_5 + (2 + 3\lambda)a_2^2 a_3 + 2\lambda\,(1 + 2\lambda^2)a_2 a_4 + 3\lambda^2 a_3^2 \equiv h_0 + (\lambda^2 - 1)b_5 \\ g_0 = -2\,(a_3 + a_2^2), \qquad h_0 = 3a_3^2 - a_2^2 a_3 - 6a_2 a_4 - 2a_5 \end{gathered} \tag{1.1}$$

Рассмотрим функцию

$$Z - z \equiv (\lambda^2 - 1)z + \lambda\,(1 + \lambda)a_2 z^2 + g z^3 + f z^4 + h z^5 + \ldots \tag{1.2}$$

нули которой соответствуют неподвижным точкам преобразования T^2. Используя (1.1), функцию (1.2) можно представить в виде

$$Z - z \equiv (\lambda^2 - 1)(1 + z\Psi_1)\ z + g_0\,(1 + z\Psi_3)z^3 + h_0\,(1 + z\Psi_5)z^5$$

$$\Psi_1 = \frac{\lambda a_2}{\lambda - 1} + b_3 z + b_4 z^2 + b_5 z^3, \qquad \Psi_3 = -\frac{1}{2}a_2, \qquad \Psi_5 = 1 + (\ldots)z$$

Отсюда

$$Z - z \equiv (1 + z\Psi_1)\,z\left[\lambda^2 - 1 + g_0\frac{1 + z\Psi_3}{1 + z\Psi_1}z^2 + h_0\frac{1 + z\Psi_5}{1 + z\Psi_1}z^4\right] \equiv$$
$$\equiv \Psi_1^* z\,[\lambda^2 - 1 + g_0\Psi_3^* z^2 + h_0\Psi_5^* z^4]$$

где Ψ_j^* ($j = 1,3,5$) — ряды по степеням z, начинающиеся с единицы. Эти ряды сходятся [4] внутри ε_0-окрестности $|a_i^* - a_i| < \varepsilon_0$ произвольной точки a_i^* ($a_i^* \neq 1$) протранства коэффициентов a_i ($i = 1, 2, \ldots 5$) для всех достаточно малых z ($|z| < \delta_0$).

Пусть в точке a_i^* выполняется $\lambda + 1 = g_0 = 0$, $h_0 \neq 0$. Рассмотрим вопрос о числе нулей функции (1.2) для параметров, взятых из окрестности точки a_i^*. Для определенности полагаем, что $h_0 > 0$ (для $h_0 < 0$ рассуждения проводятся аналогично).

Отличные от $z = 0$ нули функции (1.2) совпадают с нулями функции

$$w = \lambda^2 - 1 + \Psi_3^*\,g_0 z^2 + \Psi_5^*\,h_0\,z^4 \tag{1.3}$$

Пусть $\varepsilon < 1$ — произвольное сколь угодно малое положительное число. Можно указать такое δ_1 ($\delta_1 < \delta_0$), чтобы при $|z| < \delta_1$ выполнялись условия $|\Psi_j^* - 1| < \varepsilon$ ($j = 1, 3, 5$).

(а) Пусть в рассматриваемой точке α_i в ряду $\lambda^2 - 1$, g_0, h_0 имеются две перемены знака. Рассмотрим функции

$$w_+ = \lambda^2 - 1 + (1 - \varepsilon) g_0 z^2 + (1 + \varepsilon) h_0 z^4$$
$$w_- = \lambda^2 - 1 + (1 + \varepsilon) g_0 z^2 + (1 - \varepsilon) h_0 z^4$$

Каждое из уравнений $w_+ = 0$, $w_- = 0$ имеет при выполнении условия

$$(1 - \varepsilon)^2 g_0^2 - 4 (1 + \varepsilon) h_0 (\lambda^2 - 1) > 0$$

четыре отличных от нуля корня (два положительных и два отрицательных). Очевидно можно указать такое ε_1 ($\varepsilon_1 < \varepsilon_0$), чтобы для $|a_i^* - a_i| < \varepsilon_1$ ($a_1^* = -1$) корни каждого из уравнений $w_+ = 0$ и $w_- = 0$ лежали в δ_1-окрестности точки $z = 0$.

Для всех $|z| < \delta_1$ справедливо неравенство $w_- < w < w_+$ и, следовательно, функция (1.3) (а с ней и функция (1.2)) имеет два положительных и два отрицательных нуля, а преобразование T^2 — две пары неподвижных точек. При выполнении условия

$$(1 + \varepsilon)^2 g_0^2 - 4 (1 - \varepsilon) h_0 (\lambda^2 - 1) < 0$$

функция (1.2) не имеет действительных нулей, а преобразование T^2 — неподвижных точек в окрестности точки $z = 0$ (неподвижной точки преобразования T).

(в) Пусть в рассматриваемой точке α_i в ряду $\lambda^2 - 1$, g_0, h_0 имеется не более одной перемены знака. Вводя функции

$$W_+ = \lambda^2 - 1 + (1 + \varepsilon) g_0 z^2 + (1 + \varepsilon) h_0 z^4 \qquad W_- < w < W_+$$
$$W_- = \lambda^2 - 1 + (1 - \varepsilon) g_0 z^2 + (1 - \varepsilon) h_0 z^4$$

и проводя рассуждения, аналогичные проведенным в случае (а), можно заключить, что если в ряду $\lambda^2 - 1$, g_0, h_0 имеется одна перемена знака (при этом в рассматриваемом случае $h_0 > 0$, $\lambda^2 - 1 < 0$), то функция (1.2) имеет один положительный и один отрицательный нуль, а преобразование T^2 — две неподвижные точки; если в ряду $\lambda^2 - 1$, g_0, h_0 нет перемен знака, то функция (1.2) не имеет действительных нулей, а преобразование T^2 не будет иметь неподвижных точек в δ_1-окрестности неподвижной точки $z = 0$.

2. Для исследования устойчивости неподвижных точек преобразования T^2 в случае (а), соответствующем существованию в δ_1-окрестности точки $z_0 = 0$ четырех действительных нулей $z_{-2} < z_{-1} < 0 < z_1 < z_2$, представим функцию (1.2) в виде

$$Z - z = \Psi_1^* \Psi_5^* h_0 (z - z_{-2}) (z - z_{-1}) z (z - z_1) (z - z_2)$$

Тогда

$$\frac{dZ}{dz} = 1 + h_0 \varphi(z)$$

причем

$$\varphi(z_k) = \Psi_1^* \Psi_5^* \frac{(z - z_{-2})(z - z_{-1}) z (z - z_1)(z - z_2)}{z - z_k} \qquad (k = -2, -1, 0, 1, 2)$$

Если δ_1 выбрано так, что $16|h_0|\delta_1^4 < 1$, то будет справедлива оценка $|h_0 \varphi(z_k)| < 1$. Знак величины $h_0 \varphi(z_k)$ меняется при переходе от k к $k + 1$, и, следовательно, устойчивые и неустойчивые неподвижные точки чередуются. В рассматриваемом случае ($h_0 > 0$) неподвижные точки z_{-2}, z_0 и z_2 неустойчивы, а z_{-1} и z_1 — устойчивы.

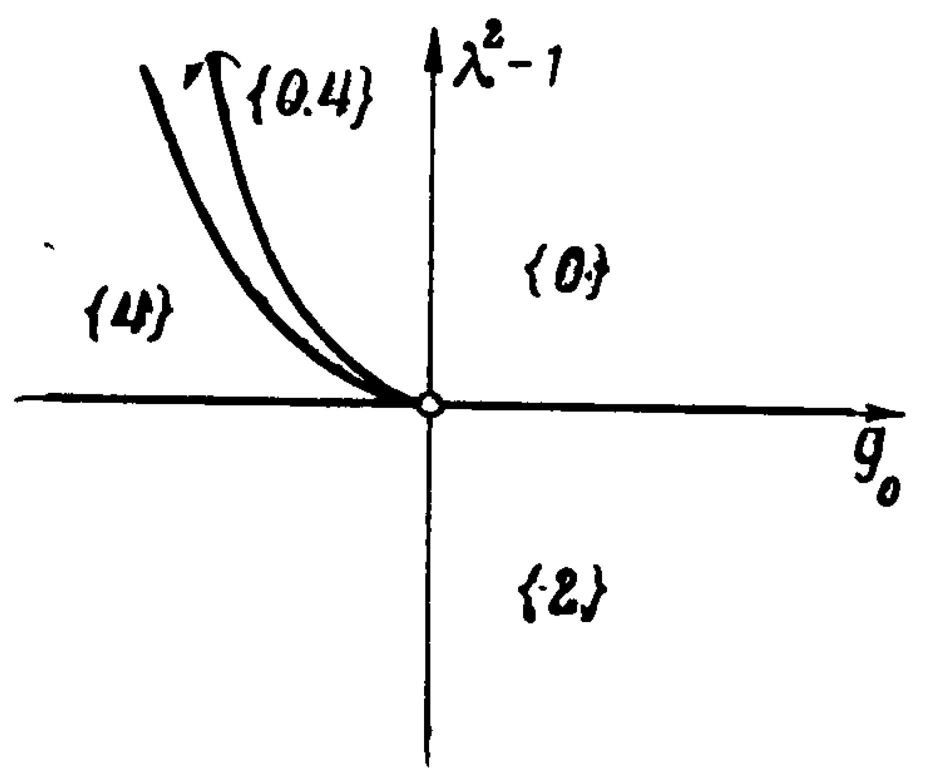
Для случая (в), когда в δ_1-окрестности точки $z_0 = 0$ существуют две неподвижные точки преобразования T^2, можно провести аналогичные рассуждения и показать, что при $h_0 > 0$ обе неподвижные точки неустойчивы (точка $z_0 = 0$ в этом случае устойчива).

В критическом случае $\lambda + 1 = g_0 = 0$ будет

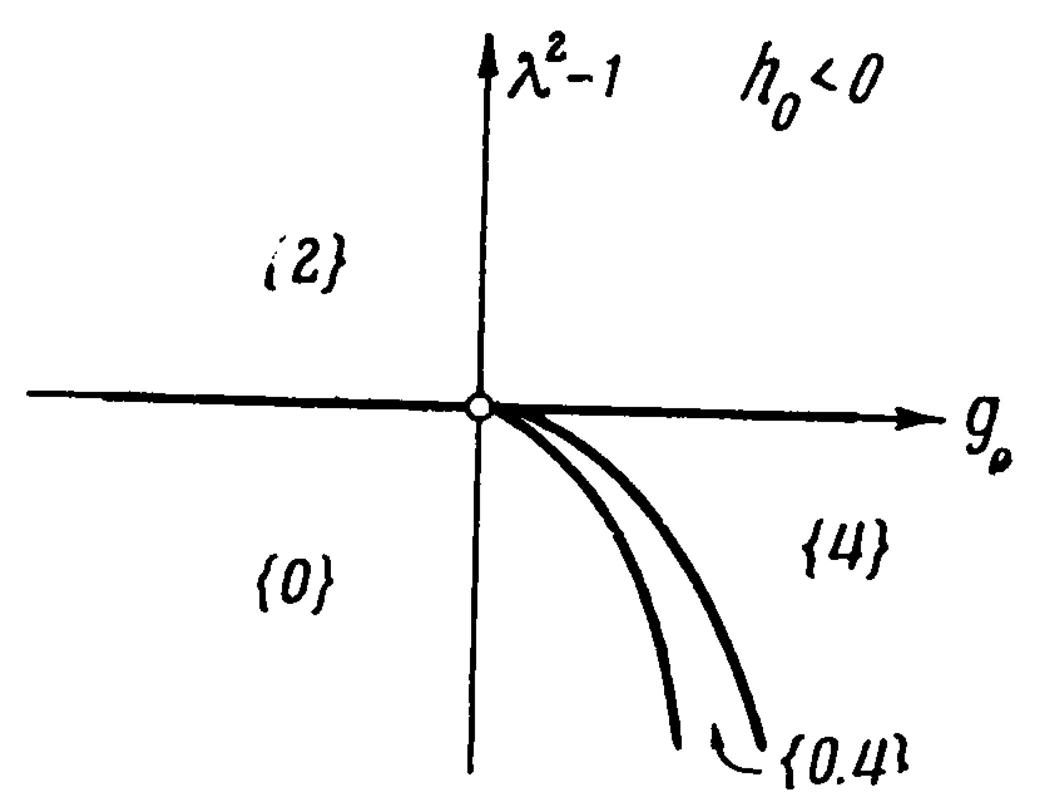
$$Z^2 - z^2 = 2h_0 z^6 + \ldots$$

Знак разности для малых z определяется знаком h_0. При $h_0 > 0$ неподвижная точка в критическом случае неустойчива, при $h_0 < 0$ — устойчива.

3. Рассмотрим плоскость параметров $g_0, \lambda^2 - 1$; на этой плоскости ε_1-окрестности точки α_i^* ($\lambda + 1 = g_0 = 0$ и $h_0 \neq 0$) пространства коэффициентов на плоскости $g_0, \lambda^2 - 1$ соответствует некоторая окрестность начала координат. На фиг. 1 ($h_0 > 0$) и фиг. 2 ($h_0 < 0$) представлена картина разбиения этой окрестности на области по числу неподвижных точек преобразования T^2 в δ_1-окрестности неподвижной точки $z = 0$ ($z = 0$ — неподвижная точка преобразования T).



Фиг. 1



Фиг. 2

В области {0}, выделяемой одной из групп неравенств

$$\{h_0 > 0,\ \lambda^2 - 1 \geqslant 0,\ g_0 \geqslant 0\}$$

$$\{h_0 > 0,\ g_0 < 0,\ (1+\varepsilon)^2 g_0^2 - 4(1-\varepsilon) h_0 (\lambda^2 - 1) < 0\}$$

$$\{h_0 < 0,\ \lambda^2 - 1 \leqslant 0,\ g_0 \leqslant 0\}$$

$$\{h_0 < 0,\ g_0 > 0,\ (1+\varepsilon)^2 g_0^2 - 4(1-\varepsilon) h_0 (\lambda^2 - 1) < 0\}$$

преобразование T^2 не имеет неподвижных точек в δ_1-окрестности неподвижной точки $z = 0$.

В области {2}, выделяемой одной из групп неравенств

$$\{h_0 > 0,\ \lambda^2 - 1 < 0,\ g_0 \geqslant 0\} \qquad \{h_0 > 0,\ \lambda^2 - 1 \leqslant 0,\ g_0 < 0\}$$

$$\{h_0 < 0,\ \lambda^2 - 1 > 0,\ g_0 \leqslant 0\} \qquad \{h_0 < 0,\ \lambda^2 - 1 \geqslant 0,\ g_0 > 0\}$$

преобразование T^2 имеет в δ_1-окрестности неподвижной точки $z = 0$ две неподвижные точки, неустойчивые при $h_0 > 0$, устойчивые при $h_0 < 0$.

В области {4}, выделяемой неравенствами

$$\{h_0 > 0,\ g_0 < 0,\ (1-\varepsilon)^2 g_0^2 - 4(1+\varepsilon) h_0 (\lambda^2 - 1) > 0\}$$

$$\{h_0 < 0,\ g_0 > 0,\ (1-\varepsilon)^2 g_0^2 - 4(1+\varepsilon) h_0 (\lambda^2 - 1) > 0\}$$

преобразование T^2 имеет в δ_1-окрестности неподвижной точки $z = 0$ четыре неподвижные точки, причем при $h_0 > 0$ внутренняя пара неподвижных точек устойчива, а внешняя — неустойчива, а при $h_0 < 0$ — наоборот.

В области {0,4}, выделяемой неравенствами

$$\left\{\begin{matrix} h_0 > 0,\ (1-\varepsilon)^2 g_0^2 - 4(1+\varepsilon) h_0 (\lambda^2 - 1) < 0, \\ g_0 < 0,\ (1+\varepsilon)^2 g_0^2 - 4(1-\varepsilon) h_0 (\lambda^2 - 1) > 0 \end{matrix}\right\}$$

или

$$\left\{\begin{matrix} h_0 < 0,\ (1-\varepsilon)^2 g_0^2 - 4(1+\varepsilon) h_0 (\lambda^2 - 1) < 0 \\ g_0 > 0,\ (1+\varepsilon)^2 g_0^2 - 4(1-\varepsilon) h_0 (\lambda^2 - 1) > 0 \end{matrix}\right\}$$

для преобразования T^2 либо осуществляется один из случаев, описанных для областей {4} и {0}, либо преобразование T^2 будет иметь две полуустойчивые неподвижные точки.

4. *Пример.* Рассмотрим динамическую систему (электромеханический спусковой регулятор), движение которой описывается уравнениями в безразмерных переменных

$$\left.\begin{aligned} x^{\cdot\cdot} + x &= -r + y^2 \\ y^{\cdot} + ay &= a \end{aligned}\right\} \quad \text{при } x^{\cdot} \geqslant 0,\ |x + b + d| < b \tag{4.1}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x^{\cdot\cdot} + x &= -r\frac{x^{\cdot}}{|x^{\cdot}|} \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{при } x^{\cdot} \geqslant 0,\ |x + b + d| > b \\ &\text{или } x^{\cdot} < 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Переход от (4.2) к (4.1) происходит при $x = -2b - d,\ x^{\cdot} \geqslant 0$, а от (4.1) к (4.2) — при $x = -d,\ x^{\cdot} > 0$. Здесь a, b, d и r — параметры, которые могут быть лишь неотрицательными.

Фазовое пространство x, y, $x^{\cdot}$ рассматриваемой динамической системы состоит из части плоскости и подшитой к ней трехмерной области. Исследование разбиения фазового пространства на траектории сводится к исследованию точечного преобразования T полупрямой Γ_1 ($x = -2b - d$, $y = 0$, $\dot{x} \geqslant 0$) самое в себя. Как показывает исследование, для неподвижной точки преобразования T в пространстве параметров a, b, d и r существует бифуркационная поверхность N_{-1}, на которой величина g_0 меняет знак. Величина g_0 обращается в нуль, например, для сечения $a = 2$, $d = 0{,}2$ поверхности N_{-1} в точке $b = b_0 \approx 0.164$ $r = r_0 \approx 0.058$. При $b < b_0$ будет $g_0 < 0$, а при $b > b_0$ будет $g_0 > 0$. В рассматриваемом случае осуществляется бифуркация, соответствующая случаю $h_0 < 0$.

В рассматриваемом сечении в окрестности точки (b_0, r_0) плоскости параметров существует область, точкам которой соответствует преобразование T^2, имеющее две устойчивые и две неустойчивые неподвижные точки (устойчивые — внешние, неустойчивые — внутренние), и область, точкам которой соответствует преобразование T^2, имеющее две устойчивые неподвижные точки. Первой из перечисленных областей соответствует фазовое пространство, в котором существуют простой устойчивый предельный цикл и два двухоборотных предельных цикла (внутренний неустойчивый, а внешний устойчивый). Второй из перечисленных областей соответствует фазовое пространство, в котором существуют простой неустойчивый и двухоборотный устойчивый предельные циклы.

В заключение автор благодарит Н. Н. Баутина за многочисленные советы и обсуждения.

Поступила 14 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Изв. вузов, Радиофизика, 1958, т. 1, № 2.
2. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
3. Серебрякова Н. Н. О поведении динамической системы с одной степенью свободы вблизи тех точек границы области устойчивости, где безопасная граница переходит в опасную. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
4. Баутин Н. Н. О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра. Матем. сб., 1952, т. 30, вып. 1.