3. Пусть теперь при $x = 0$ заданы условия сухого трения, т. е. $u_2 = 0$, $\tau_2 = f \mid \sigma_2 \mid \operatorname{sgn}(v_0 - v_2)$. Из (1.5) следует $\operatorname{sgn} \tau_2 = \operatorname{sgn} v_2$, а так как $v_0 > 0$, то из граничных условий получается $\tau_2 > 0$, $v_2 < v_0$.

Условие $u_2 = 0$ дает по-прежнему уравнение (2.1), условие для τ дает второе уравнение (с использованием (1.4))

$$^1/_2 k \sqrt{3} \sqrt{1 + s_2^2} = f(1 + ks_2) \tag{3.1}$$

Из (3.1) и (2.1) легко находится s_2 и p_1, и решение задачи строится в явном виде.

Так как $0 \leqslant s_2 < 1$, то (3.1) разрешимо, лишь если $f \leqslant {}^1/_2 \sqrt{3}\, k = f_0$, т. е. для разрешимости задачи необходимо, чтобы коэффициент трения скольжения был меньше или равен коэффициенту трения покоя.

Необходимо еще проверить условие $v_2 < v_0$. Это условие выглядит так:

$$v_0 > \psi(s_2) \,/\, [1 + h(s_2)] \equiv v_- \tag{3.2}$$

где s_2 определяется из (3.1), ψ и h заданы формулами (2.4) и (2.3).

Таким образом, условия разрешимости приобретают вид

$$v_0 > v_-, \; f \leqslant f_0$$

Так как из (3.2) следует $v_- < v_*$, то для любых $v > 0$ можно решить задачу, если для $v_0 \leqslant v_-$ пользоваться условием прилипания, для $v_0 > v_-$ законом сухого трения с $f < f_0$. Очевидно, что этим не исчерпывается вопрос о граничных условиях в общем случае, так как v_- априори не известна.

Поступила 21 XII 1967

Институт проблем механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
2. Скобеев А. М. О плоской упруго-пластической волне. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

В. В. Румянцев (Москва)

В работе [1] изложен метод исследования устойчивости стационарных движений механических систем, позволяющий получать достаточные, а в ряде случаев и необходимые условия устойчивости.

В данной статье рассматриваются некоторые аспекты и выясняются дальнейшие возможности метода, в частности, его приложимость к неголономным системам. Устанавливается связь этого метода с методом Четаева построения функций Ляпунова. Изложение иллюстрируется примерами.

Рассмотрим некоторую механическую систему, фазовые переменные которой, характеризующие ее положение и скорости в любой момент времени t, или часть из них, обозначены через x_s $(s = 1, \ldots, n)$. Будем предполагать, что переменные x_s являются независимыми, если система голономная, или, возможно, связаны некоторыми неинтегрируемыми уравнениями связей, если система неголономная. За эти переменные можно, например, принять лагранжевы переменные системы q_j, $\dot{q}_j$; или некоторые неголономные координаты, или квазикоординаты.

Допустим, что для дифференциальных уравнений движения системы, записанных в той или иной форме, известно некоторое число независимых первых интегралов

$$F_i, (x_1, \ldots, x_n) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, m, \quad m < n) \tag{1}$$

не зависящих явно от времени; c_i — произвольные постоянные интегрирования.

Известна теорема Рауса [2] с существенным дополнением Ляпунова [3].

Теорема. Когда для дифференциальных уравнений движения какой-либо системы найдено некоторое число интегралов, не зависящих явно от времени, и в числе этих интегралов существует такой, который имеет минимум или максимум как при данных так и при всяких достаточно близких к данным величинах остальных интегралов, причем значения входящих в него переменных, обращающие его в экстремум, суть непрерывные функции величин этих интегралов, то движение системы, отвечающее определенным значениям переменных, обращающим его в минимум или в максимум при данных величинах остальных интегралов, будет устойчивым по отношению к этим переменным для всяких достаточно малых возмущений.

А. М. Ляпунов не привел доказательства этой теоремы, считая, по-видимому, ее очевидной. Действительно, можно дать очень простое доказательство [4], идея которого состоит, коротко, в следующем.

Пусть $F_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1$ — интеграл, о котором идет речь в теореме.

Так как по условию этот интеграл имеет минимум или максимум как при данных величинах постоянных $c_j = c_j{}^\circ$, так и при всяких достаточно близких к данным величинах $c_j = c_j{}^\circ + \Delta c_j$ $(j = 2, \ldots, m)$ остальных интегралов, то функция

$$V = F_1(x_1, \ldots, x_n) - F_1(x_1{}^*, \ldots, x_n{}^*) \tag{2}$$

будет знакоопределенной функцией переменных

$$\Delta x_s = x_s - x_s{}^*$$

удовлетворяющей всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости ($V^{\cdot} \equiv 0$). Здесь $x_s{}^*$ обозначают значения переменных x_s, отвечающие минимуму или максимуму функции $F_1(x_1, \ldots, x_n)$ при возмущенных значениях постоянных $c_j = c_j{}^\circ + \Delta c_j{}^*$. В силу непрерывной зависимости значений x_s, обращающих функцию F_1 в минимум или максимум, от постоянных c_j остальных интегралов, возмущения можно, очевидно, выбрать столь малыми, что невозмущенное движение системы $x_s = x_s{}^\circ$ будет находиться в области минимума или максимума функции F_1 при возмущенных значениях постоянных $c_j = c_j{}^\circ + \Delta c_j{}^*$. А из этого факта следует устойчивость невозмущенного движения $x_s = x_s{}^\circ$ по отношению к x_s для всяких достаточно малых возмущений.

Следуя [5], будем называть теорему Рауса с дополнением Ляпунова теоремой Рауса — Ляпунова.

Важно отметить, что в доказательстве этой теоремы голономность системы не предполагалась, так что теорема Рауса — Ляпунова справедлива как для голономных, так и для неголономных систем.

Во многих задачах механики интегралом, который может иметь минимум при данных величинах постоянных остальных первых интегралов, является обычно интеграл энергии системы $H = T - U = \text{const}$.

Иное доказательство теоремы применительно к интегралу энергии для голономной системы с циклическими координатами было дано в работе [6] в предположении голоморфности функции Гамильтона H в окрестности стационарного движения. Один частный случай применимости теоремы Рауса к неголономным системам рассмотрен в заметке [7], где использовался метод Рауса игнорирования циклических координат.

В случае, когда имеются циклические координаты системы, то при их игнорировании появляется измененная потенциальная энергия системы, и теорему Рауса — Ляпунова можно сформулировать несколько иначе, например, в форме теоремы 4 работы [4]. Следует, однако, иметь в виду, что возможны случаи, когда при определенном выборе лагранжевых координат q_j не все известные первые интегралы системы из числа (1), линейные относительно скоростей $q_j{}^{\cdot}$, будут отвечать циклическим координатам. В подобных случаях предпочтительнее пользоваться приведенной выше формулировкой теоремы Рауса — Ляпунова, нежели теоремой Рауса в форме, приведенной в работе [8], или в форме теоремы 4 работы [4],— применительно к интегралу энергии, полученному при игнорировании циклических координат.

Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 1. Уравнения вращательного движения симметричного снаряда (см., работу [8], стр. 108—111) допускают интеграл энергии $H = \mathrm{const}$ и два линейных относительно скоростей интеграла $F_i = \mathrm{const}$ $(i = 1, 2)$, из которых только второй $p = \mathrm{const}$ отвечает циклической координате ω. Для невозмущенного движения $\alpha = \beta = \alpha^{\cdot} = \beta^{\cdot} = 0$ функция $W = a_* \cos\alpha \cos\beta$ не имеет минимума. Однако интеграл $H = \mathrm{const}$ имеет, как легко видеть, минимум при фиксированных значениях двух других интегралов, если выполняется условие Майевского $A^2p^2 - 4aB > 0$.

В связи с этим примером напомним [9], что интегралами, линейными относительно скоростей $q_j^{\cdot}$, обладают только такие голономные системы, которые либо имеют циклические координаты, либо могут быть преобразованы в системы с циклическими координатами, вследствие чего можно найти такое расширенное точечное преобразование переменных q_j в переменные Q_j, что все линейные относительно скоростей интегралы вида (1) будут отвечать циклическим координатам Q_α. В этом случае рассматриваемые формулировки теоремы Рауса — Ляпунова будут, очевидно, эквивалентными, если интегралом, имеющим минимум, является интеграл энергии.

Сделаем два добавления к теореме Рауса — Ляпунова.

Добавление 1. Теорема остается справедливой и в случае, когда при движении системы возможно рассеяние энергии и интеграла энергии не существует, если энергия системы (или части системы) H, постоянная на рассматриваемом движении, такова, что она удовлетворяет остальным требованиям теоремы и производная по времени от H в силу уравнений движения неположительна.

Действительно, принимая в этом случае за функцию F_1 энергию H и рассматривая функцию V вида (2), видим, что данное выше доказательство теоремы проходит и в этом случае, так как $V^{\cdot} \leqslant 0$.

Пример 2. Уравнения движения по горизонтальной плоскости тяжелого гиростата со сферическим основанием (см, например, [10], стр. 781—784) допускают энергетическое соотношение $H \leqslant \mathrm{const}$ (знак равенства будет в случаях абсолютно шероховатой или гладкой плоскостей) и два интеграла $F_i = \mathrm{const}$ (4.10) и (4.11), из которых первый отвечает циклической координате ψ только в случае, когда центр масс гиростата совпадает с центром сферического основания [7]. Функция H имеет минимум при фиксированных значениях постоянных первых интегралов $F_i = \mathrm{const}$, если выполняется условие (4.18)

$$\left(C - A\frac{a}{l}\right) r_0^2 + C_2\omega r_0 + Mg\,\frac{a_1 l}{a} > 0 \qquad (l = a - a_1 > 0)$$

Добавление 2. Теорема Рауса — Ляпунова справедлива и в случае, когда некоторые из интегралов (1) зависят явно от времени, если неособой заменой переменных эти интегралы можно привести к виду уравнений, не содержащих явно времени.

Пример 3. Уравнения движения динамически симметричного гиростата с неподвижной точкой, представляющего собой твердое тело с ротором, находящегося под действием внешних сил с потенциальной энергией $V(\gamma_3)$ и некоторых внутренних сил, допускают первые интегралы [10]

$$H = A(p^2 + q^2) + 2V(\gamma_3) = \mathrm{const}, \qquad F_1 = A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + [Cr + k(t)]\gamma_3 = \mathrm{const},$$
$$F_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0, \quad F_3 = Cr + k(t) = \mathrm{const}$$

второй и четвертый из которых зависят явно от времени посредством переменного гиростатического момента $k(t)$, определяемого внутренними силами и предполагаемого непрерывным. Функция $V(\gamma_3)$ предполагается ограниченной и непрерывной, обладающей непрерывными ограниченными производными первого и второго порядков.

Заменой переменной r на новую R по формуле

$$Cr + k(t) = R$$

эти интегралы приводятся к виду интегралов, не зависящих явно от времени. Полагая $R = R_0$ и рассматривая функцию

$$\Phi = H + 2\lambda F_1 + \mu F_2 \quad (\pm\mu = -\lambda R_0 V'(1)) \qquad (\lambda \text{ — произвольная постоянная})$$

найдем, что она имеет стационарное значение в точке, определяемой значениями переменных

$$p = q = 0, \ \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \ \gamma_3 = \pm 1$$

соответствующей вращению гиростата вокруг неподвижной оси ζ с переменной угловой скоростью

$$r = \frac{1}{C}(R_0 - k(t))$$

Условия минимума функции H сводятся к неравенству

$$R_0^2 \mp 4AV'(1) > 0$$

являющемуся достаточным условием устойчивости рассматриваемого движения гиростата. Аналогичные неустановившиеся движения, зависящие явно от времени, возможны и для симметричного спутника-гиростата в центральном ньютоновском поле сил [4].

Как следует из формулировки теоремы Рауса — Ляпунова, ее применение включает в себя решение следующих трех задач; 1) разыскание стационарных точек функции F_1 при данных фиксированных величинах постоянных c_j $(j = 2, \ldots, m)$ остальных первых интегралов (1), отвечающих действительным движениям системы; 2) установление условий, при которых рассматриваемая стационарная точка будет отвечать минимуму или максимуму функции F_1; 3) проверка требования непрерывной зависимости координат точек минимума или максимума функции F_1 от величин c_j.

Заметим, что условия, получаемые при решении первых двух задач, гарантируют, согласно теореме Рауса, устойчивость невозмущенного движения по крайней мере для возмущений, не изменяющих величин c_j $(j = 2, \ldots, m)$, а если к тому же выполняются условия, требуемые третьей задачей, то гарантируется, согласно дополнению Ляпунова, безусловная устойчивость.

Первая из указанных задач введением множителей Лагранжа λ_j приводится, как известно, к задаче о безусловном экстремуме функции

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n; \lambda_2 \ldots, \lambda_m) = F_1(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=2}^{m} \lambda_j F_j(x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

Допустим, что найдены значения

$$x_s = x_s^\circ, \qquad \lambda_j = \lambda_j^\circ \tag{4}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n), \quad F_j(x_1, \ldots, x_n) = c_j^\circ \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{5}$$

Отвечающее величинам (4) значение функции Φ обозначим через

$$\Phi^\circ = \Phi(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, \lambda_2^\circ, \ldots, \lambda_m^\circ).$$

Рассмотрим функцию

$$V = \Phi - \Phi^\circ = F_1 - F_1^\circ + \sum_{j=2}^{m} \lambda_j^\circ (F_j - F_j^\circ) \tag{6}$$

которая в силу уравнений (5) не содержит, очевидно, линейных относительно вариаций переменных x_s членов в окрестности решения (4). Если эта функция при некоторых условиях будет знакоопределенной в окрестности решения $x_s = x_s^\circ$, то функция Φ для рассматриваемого решения имеет безусловный минимум или максимум, а функция F_1 — условный минимум или максимум. Но выражения

$$V_j = F_j - F_j^\circ = \text{const}$$

представляют собой, очевидно, первые интегралы уравнений возмущенного движения системы, как и функция (6), которую можно переписать в виде

$$V = V_1 + \sum_{j=2}^{m} \lambda_j^\circ V_j \tag{7}$$

Вид этой функции указывает на связь теоремы Рауса — Ляпунова с эффективным методом Четаева построения функции Ляпунова в форме связки известных первых интегралов $V_j = \mathrm{const}$ уравнений возмущенного движения. Метод Четаева состоит, как известно, в построении функции Ляпунова вида

$$V = V_1 + \sum_{j=2}^{m} \lambda_j V_j + \sum_{\alpha=1}^{m} \mu_\alpha V_\alpha^2 \tag{8}$$

где постоянные λ_j ($j = 2, \ldots, m$), μ_α ($\alpha = 1, \ldots, m$) подбираются так, чтобы функция (8) была знакоопределенной. При этом в силу выбора множителей λ_j в выражении (8), как и в выражении (6), не будет линейных относительно вариаций переменных x_s членов, ибо в противном случае выражения (6) и (8) не могли бы быть знакоопределенными. Очевидно, при таком выборе коэффициентов λ_j они играют в выражении (8) роль, аналогичную роли множителей Лагранжа в вариационной задаче (6).

В случае, когда все $\mu_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \ldots, m$) и $\lambda_j = \lambda_j^\circ$ ($j = 2, \ldots, m$), функция Ляпунова (8) тождественно совпадает с функцией (7). Если при этом функция (7) знакоопределенна, то, так как $V^\cdot \equiv 0$, она удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости. Следовательно, условия знакоопределенности функции (7), обеспечивающие, как отмечено выше, условный минимум или максимум функции F_1, являются достаточными условиями безусловной устойчивости невозмущенного движения. В силу этого, третью из указанных задач — проверку непрерывной зависимости координат точек экстремума функции F_1 от значений c_j — в этом случае решать излишне.

Следует заметить, что достаточные условия условного минимума или максимума функции F_1 можно получить также из условий знакоопределенности функции (7) на линейных многообразиях [11]

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_s}(x_s - x_s^\circ) = 0 \qquad (j = 2, \ldots, m) \tag{9}$$

Число условий знакоопределенности функции (7) на линейных многообразиях (9) будет меньше числа условий знакоопределенности этой функции при произвольных значениях вариаций x_s на число $m - 1$ условных независимых уравнений (9), и они могут оказаться, вообще говоря, более широкими по сравнению с условиями безусловного экстремума этой функции [5].

Поступила 23 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
2. Routh E. J. A treatise on the stabilite of a given state of motion. London, Macmillan end Co., 1877.
3. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1, М., Изд-во АН СССР, 1954.
4. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1967.
5. Кузьмин П. А. Стационарные движения твердого тела и их устойчивость в центральном поле тяготения. Тр. Межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости движения и аналитической механике. Казань, 1964.
6. Пожарицкий Г. К. О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
7. Семенова Л. Н. О теореме Рауса для неголономных систем. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
8. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2-е. М., Гостехиздат, 1955.
9. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М., ОНТИ, 1937.
10. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гиростатов некоторого вида. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
11. Шостак Р. Я. О признаке условной определенности квадратичной формы n-переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функции n-переменных. Усп. матем. н., 1951, т. 9, вып. 2 (60).