О ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЕ СДВИГА

А. М. Скобеев (Москва)

Строится автомодельное решение задачи о распространении возмущения, вызванного скользящим ударом по границе полупространства, материал которого подчиняется уравнениям Прандтля — Рейсса.

Формулируются простые условия разрешимости задачи для граничных условий двух типов: 1) полного прилипания, 2) сухого трения Кулона.

1. Уравнения Прандтля — Рейсса иногда применяются для описания движения грунта под действием сильных нагрузок [1]. В этом случае задачи обычно содержат две пространственные переменные и время. Эти задачи можно решать только численно. В ряде таких задач приходится рассматривать взаимодействие волн с твердой поверхностью. Необходимые граничные условия в этом случае выяснены недостаточно.

Естественно попытаться понять ситуацию на примере какой-нибудь простой задачи. Далее рассматривается простейший случай, когда еще сохраняются некоторые существенные особенности сложных задач взаимодействия волн с поверхностями.

Пусть к границе полупространства прижата напряжением σ_0 твердая плита, которой при $t = 0$ сообщена постоянная скорость v_0, направленная вдоль границы. Полупространство при $t < 0$ покоится, и напряжение в нем постоянно.

Так как основные уравнения допускают появление касательных напряжений в среде, можно на границе ставить условие прилипания или естественный для контакта твердых тел закон сухого трения.

В п. 2 показано, что при условии прилипания задача имеет решение лишь для скоростей, ограниченных неравенством $v_0 \leqslant v_*$; при $v_0 > v_*$ решение, если предполагать его единственность, не существует. В п. 3 задача решается для закона сухого трения. Показано, что решение существует, лишь если коэффициент трения удовлетворяет некоторому неравенству (достаточно простому).

Далее вводятся обозначения: x — координата, ось x направлена в глубь полупространства; u — скорость по x, v — скорость по нормали к x; K — модуль объемного сжатия, G — модуль сдвига; θ — объемное сжатие; σ — напряжение по x, τ — касательное напряжение, p — гидростатическое давление; f — коэффициент трения.

Условие пластичности берется в виде

$$^3/_4 (\sigma + p)^2 + \tau^2 = T^2, \quad T = {}^1/_2 \sqrt{3}\, kp \tag{1.1}$$

Предполагается, что плотность равна единице

$$K = K_1 \text{ при } \theta^\cdot > 0 \qquad K = K_2 \text{ при } \theta^\cdot < 0 \qquad ((K_1,\ K_2 = \mathrm{const})$$
$$K > G, \qquad kK_2 > {}^4/_3 G > kK_1 \qquad (G,\ k = \mathrm{const}) \tag{1.2}$$

Далее вводятся вспомогательные переменные

$$s = +\sqrt{1 - \tau^2 / T^2}, \qquad a = x / t$$

Решается система из уравнений движения, уравнения неразрывности и уравнений Прандтля — Рейсса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = -K\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \left[G\frac{\sigma + p}{T^2}\frac{\partial u}{\partial x} + G\frac{\tau}{T^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}}{2}k\frac{\partial p}{\partial t}\right]\tau = G\frac{\partial v}{\partial x}$$

с начальными и граничными условиями

$$\tau = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \sigma = \sigma_0 = -kp_0 \quad \text{при } t = 0$$
$$u = 0, \quad v = v_0 \quad \text{при } t > 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{или} \quad (\text{п. } 3)$$
$$u = 0, \quad \tau = f\,|\,\sigma\,|\,\mathrm{sgn}\,[v_0 - v\,(t,\ +0)] \quad \text{при } t > 0,\ x = 0$$

Далее предполагается $v_0 > 0$; случай $v_0 < 0$ получается заменой знака.

Из [2] следует, что при сформулированных предположениях возможны следующие зависящие лишь от a решения основной системы: 1) постоянное решение, 2) сильный разрыв, распространяющийся со скоростью $\sqrt{(1+k)K}$, 3) простая центрированная волна. В области, занятой волной, выполняются соотношения

$$a = \sqrt{\omega - \sqrt{\omega^2 - GKs(s+k)}} \tag{1.3}$$

$$p = p_1\varphi(s), \qquad \sigma = -(1+ks)p, \qquad \tau = {}^1/_2\sqrt{3}\sqrt{1-s^2}\,kp \tag{1.4}$$

$$u = -\int_1^s \frac{d\sigma}{ds}\frac{ds}{a} + u_1, \qquad v = +\int_1^s \frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{a} + v_1 \tag{1.5}$$

$$\omega = {}^1/_2\left[(1+ks)K - {}^1/_3(4-s^2)G\right] \qquad (p_1 = p_0 + \Delta p)$$

$$\varphi(s) = \exp\int_1^s \frac{kKd\xi}{a^2(\xi) - (1+ks)K}$$

Здесь Δp есть интенсивность сильного разрыва. Формулы (1.3) — (1.5) определяют в параметрическом виде зависимость σ, p, τ, u и v от a.

На плоскости xt (фигура) прямая *1* обозначает сильный разрыв, прямые *2* и *3* — передний и задний фронты простой волны, прямая *2* описывается уравнением $x = \sqrt{G}t$, $s = 1$, прямая *3* — уравнением $x = a(s_2)\,t$, s_2 — произвольная постоянная, удовлетворяющая неравенству $0 \leqslant s_2 \leqslant 1$. В областях D_1, D_2, D_3 решение постоянно. Величины в области D_i отмечаем индексом i.

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, есть две произвольные постоянные Δp и s_2.

2. Вначале рассмотрим условие прилипания, т. е. $u_2 = 0$, $v_2 = v_0$. Прежде всего заметим, что $v_1 = 0$ и если $v_0 > 0$, то $s_2 \neq 1$. Из (1.4), (1.5) следует, что $u_2 > u_1$ и $u_1 < 0$, $\Delta p < 0$, т. е. сильный разрыв вводится для того, чтобы скомпенсировать изменение u на простой волне. Используя граничные условия, соотношения на скачке и выражения (1.4), (1.5), получим два уравнения для p_1 и s_2:

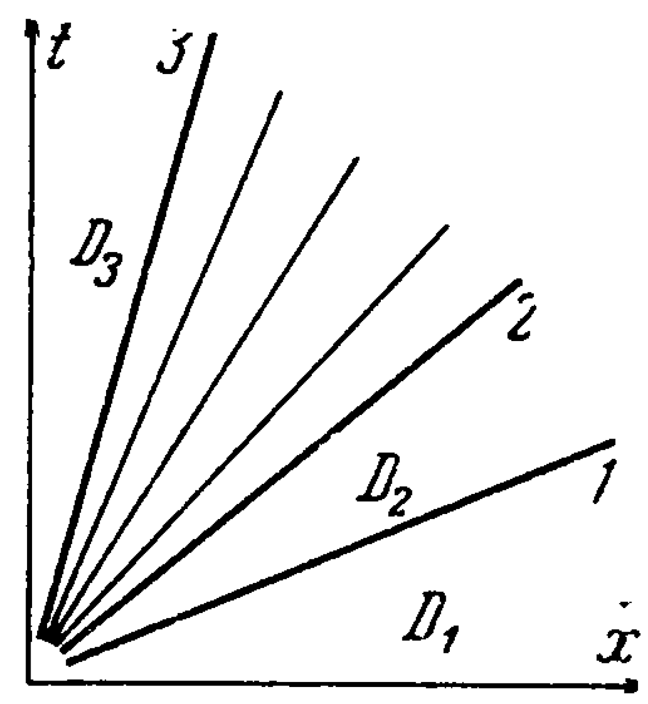
$$p_2(1 + h(s_2)) - p_0 = 0 \tag{2.1}$$

$$p_1\psi(s_2) - v_0 = 0 \tag{2.2}$$

где

$$h(s_2) = \int_1^{s_2} \frac{k\sqrt{(1+k)K}\,\varphi(s)\,a(s)\,ds}{a^2(s) - (1+ks)K} \tag{2.3}$$

$$\psi(s_2) = \int_1^{s_2} k\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{[(k+s)K - sa^2(s)]}{a^2(s) - (1+ks)K}\,\frac{\varphi(s)\,ds}{a\sqrt{1-s^2}} \tag{2.4}$$



Из (1.3) и (1.2) следует, что $a^2 < G$ и $a = O(\sqrt{s})$ при $s \to 0$, $k \neq 0$. Простое исследование показывает, что функции $h(s_2)$ и $\psi(s_2)$ положительны и ограничены, $h'(s_2) < 0$ $\psi'(s_2) < 0$ и $d\psi(1+h)^{-1}/ds_2 < 0$.

Из (2.2) и (2.1) следует

$$\psi(s_2)\,[1 + h(s_2)]^{-1} = v_0 \tag{2.5}$$

Так как левая часть (2.5) монотонная и ограниченная функция s_2, из (2.5) можно определить s_2, если

$$v_0 \leqslant v_* \equiv \psi(0)\,/\,[1 + h(0)]$$

Если ввести коэффициент трения покоя f_0 по формуле $f_0 = \max|\tau_2 / \sigma_2|$, то из (1.4) получится $f_0 = {}^1/_2\sqrt{3k}$.

Таким образом, задание на границе условий прилипания позволяет решить задачу лишь если $v_0 \leqslant v_*$.

3. Пусть теперь при $x = 0$ заданы условия сухого трения, т. е. $u_2 = 0$, $\tau_2 = f \mid \sigma_2 \mid \operatorname{sgn}(v_0 - v_2)$. Из (1.5) следует $\operatorname{sgn} \tau_2 = \operatorname{sgn} v_2$, а так как $v_0 > 0$, то из граничных условий получается $\tau_2 > 0$, $v_2 < v_0$.

Условие $u_2 = 0$ дает по-прежнему уравнение (2.1), условие для τ дает второе уравнение (с использованием (1.4))

$$^1/_2 k \sqrt{3} \sqrt{1 + s_2{}^2} = f(1 + ks_2) \qquad (3.1)$$

Из (3.1) и (2.1) легко находится s_2 и p_1, и решение задачи строится в явном виде.

Так как $0 \leqslant s_2 < 1$, то (3.1) разрешимо, лишь если $f \leqslant {}^1/_2 \sqrt{3}\, k = f_0$, т. е. для разрешимости задачи необходимо, чтобы коэффициент трения скольжения был меньше или равен коэффициенту трения покоя.

Необходимо еще проверить условие $v_2 < v_0$. Это условие выглядит так:

$$v_0 > \psi(s_2) \, / \, [1 + h(s_2)] \equiv v_- \qquad (3.2)$$

где s_2 определяется из (3.1), ψ и h заданы формулами (2.4) и (2.3).

Таким образом, условия разрешимости приобретают вид

$$v_0 > v_-, \ f \leqslant f_0$$

Так как из (3.2) следует $v_- < v_*$, то для любых $v > 0$ можно решить задачу, если для $v_0 \leqslant v_-$ пользоваться условием прилипания, для $v_0 > v_-$ законом сухого трения с $f < f_0$. Очевидно, что этим не исчерпывается вопрос о граничных условиях в общем случае, так как v_- априори не известна.

Поступила 21 XII 1967

Институт проблем механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
2. Скобеев А. М. О плоской упруго-пластической волне. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

В. В. Румянцев (Москва)

В работе [1] изложен метод исследования устойчивости стационарных движений механических систем, позволяющий получать достаточные, а в ряде случаев и необходимые условия устойчивости.

В данной статье рассматриваются некоторые аспекты и выясняются дальнейшие возможности метода, в частности, его приложимость к неголономным системам. Устанавливается связь этого метода с методом Четаева построения функций Ляпунова. Изложение иллюстрируется примерами.

Рассмотрим некоторую механическую систему, фазовые переменные которой, характеризующие ее положение и скорости в любой момент времени t, или часть из них, обозначены через x_s $(s = 1, \ldots, n)$. Будем предполагать, что переменные x_s являются независимыми, если система голономная, или, возможно, связаны некоторыми неинтегрируемыми уравнениями связей, если система неголономная. За эти переменные можно, например, принять лагранжевы переменные системы q_j, $\dot{q}_j$; или некоторые неголономные координаты, или квазикоординаты.

Допустим, что для дифференциальных уравнений движения системы, записанных в той или иной форме, известно некоторое число независимых первых интегралов

$$F_i, (x_1, \ldots, x_n) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, m, \quad m < n) \qquad (1)$$

не зависящих явно от времени; c_i — произвольные постоянные интегрирования.

Известна теорема Рауса [2] с существенным дополнением Ляпунова [3].