При $H_{y1} = 0$ отсутствуют решения задачи о поршне с промежуточными ионизующими волнами, а также решения с альфвеновскими и медленными магнитогидродинамическими ударными волнами. При изменении знака y-й составляющей скорости поршня в решении изменяется только знак H_y и знак y-й составляющей скорости.

Поступила 22 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

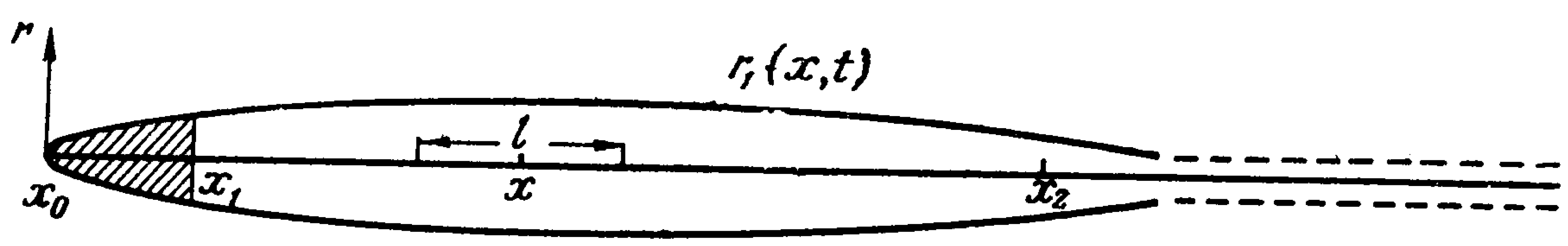
1. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Об ударных волнах, ионизующих газ, находящийся в электромагнитном поле. Докл. АН СССР, 1968, т. 178, № 1.
2. Cowley M. D. Gas — ionizing shocks in a magnetic field. J. Plasma. Phys., 1967, vol. 1, part. 1.
3. Taussig R. T. Comparison of oblique, normal end transverse ionizing shock waves. Phys. of Fluids, 1967, vol. 10, No. 6.
4. Gross R. A. Strong ionizing shock waves. Rev. Modern Phys. 1965, vol. 37, No. 4.

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СРЫВНОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ КАВИТАЦИИ

Ю. Л. Якимов

(Москва)

В работе [1] рассматривалась задача об отрывном обтекании тонкого тела вращения идеальной несжимаемой жидкостью под нулевым углом атаки при малых числах кавитации. Ниже на основе более точных оценок выведено дифференциальное уравнение для плотности источников на оси симметрии — аналогичное уравнению в [1]; однако выведенное здесь уравнение содержит дополнительные члены. Причем задача сводится к этому дифференциальному уравнению, только если сделать дополнительные предположения (по сравнению с [1] о порядке малости числа кавитации σ, в противном случае задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению.



Будем иметь в виду схему движения, представленную на фиг. 1, где x_0, x_1 — тело; x_1, x_2 — каверна; $r_1(x, t)$ — граница каверны; x_2, $+\infty$ — след за телом и каверной; $V(t)$ — абсолютная скорость движения тела; P — давление внутри каверны; P_∞ — давление в бесконечности; скорость в бесконечности равна нулю.

Величины r, x, V, P, t будем считать уже безразмерными числами, так что их единичным значениям соответствуют некоторые L_0, V_0, $P_0 = \rho_0 V_0^2$, $t_0 = L_0 / |V_0|$, где V_0 — скорость тела в данный момент; ρ_0 — плотность жидкости.

Безразмерный потенциал поля скоростей вне границ тела, каверны и следа будем искать в виде:

$$\varphi(r, x, t) = \int_{x_1}^{\infty} \frac{g(\xi, t)\, d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + r^2}} \tag{1}$$

Каверну в точке $x \sim 1$ будем считать тонкой:

$$r_1 \lesssim \varepsilon \tag{2}$$

Кроме того, пока предположим, что верны оценки:

$$|g| \lesssim \varepsilon^2 \tag{3}$$

$$|g_t|,\ |g_{tx}| \lesssim \varepsilon^2 \quad \text{при } x_1 < x < x_2 \tag{4}$$

и при $x \to \infty$ g — сгремится к нулю достаточно быстро.

Из (1) имеем:

$$\varphi_t(r_k, x, t) = -\frac{g(x_0 t)\, x_0^{\cdot}}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + r_1^2}} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{g_t d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + r_1^2}} + \int\limits_{x_1}^{x-l/2} \frac{g_t d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + r_1^2}} +$$

$$+ \int\limits_{x-l/r}^{x+l/r} \frac{g_t d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + r_1^2}} + \int\limits_{x+l/2}^{x_2} \frac{g_t d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + r_1^2}} + \int\limits_{x_2}^{\infty} \frac{g_t d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + r_1^2}} = \tag{5}$$

$$= \frac{g(x_0, t)}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + r_1^2}} + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 \left(l = \frac{1}{\ln^2 \varepsilon},\ x_0^{\cdot} = -1 \right)$$

С точностью до малых высшего порядка имеем:

$$\left| \frac{g(x_0, t)}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + r_1^2}} \right| = \frac{|g(x_0, t)|}{|x_0 - x|} \approx \varepsilon^2, \qquad |J_1| = \left| \int\limits_{x_1}^{x} \frac{g_t d\xi}{|x - \xi|} \right| \lesssim \varepsilon^2 \tag{6}$$

$$|J_2| = \left| \int\limits_{x_1}^{x - {}^1\!/_2 l} \frac{g_t d\xi}{|x - \xi|} \right| \leqslant |\max g_t| \ln \left| \frac{2(x_1 - x)}{l} \right| \lesssim \varepsilon^2 2 |\ln |\ln \varepsilon|| \tag{7}$$

Аналогично интегралы

$$|J_4| \lesssim \varepsilon^2 2 \ln |\ln \varepsilon|$$

$$J_3 = [g_t(x, t) + \delta] \int\limits_{x - {}^1\!/_2 l}^{x + {}^1\!/_2 l} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + r_1^2}} = (g_t + \delta) \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 + 4(r/l)^2}}{-1 + \sqrt{1 + 4(r/l)^2}} \right] =$$

$$= -2g_t \ln r + 2g_t \ln l - 2\delta \ln (r/l) = -2g_t \ln r \tag{8}$$

$$|\delta| \leqslant |\max g_{tx}|\, l \leqslant \frac{\varepsilon^2}{|\ln \varepsilon|}$$

Интеграл

$$J_5 \sim |\max g_t| \lesssim \varepsilon^2 \tag{9}$$

по предположению. Аналогично для V_r^2 и V^2 имеем следующие оценки:

$$\varphi_r = -\frac{2g(x, t)}{r}, \qquad (\varphi_x)^2 \sim g^2 \lesssim \varepsilon^4 \tag{10}$$

Граничными условиями на границе каверны будут кинематическое условие и условие постоянства давления:

$$\partial r_1 / dt = \varphi_r, \qquad P_\infty - P_1 = \varphi_t + {}^1\!/_2 [\varphi_r^2 + \varphi_x^2] \tag{11}$$

Из первого уравнения (11) имеем:

$$g = -\frac{1}{4} \frac{\partial r_1^2}{\partial t} = -\frac{1}{4} u_t \qquad u = r_1^2 \tag{12}$$

Подставляя (6), (7), (8), (10) во второе соотношение (11) и учитывая (12), получим:

$$\frac{1}{4} u_{tt} \ln u + \frac{1}{8} \frac{(u_t)^2}{u} + \frac{g(x_0, t)}{|x - x_0|} + J_1 + J_5 + J_2 + J_4 - \frac{1}{2} \sigma = 0 \tag{13}$$

$$\sigma = \frac{P_\infty - P_1}{{}^1\!/_2 \rho_0 V_0^2} = 2(p_\infty - p_1) \tag{14}$$

Здесь σ — число кавитации. Все члены интегро-дифференциального уравнения (13), кроме первого числа кавитации и $(J_2 + J_4)$, были оценены величиной ε^2. Если предположить, что $\sigma \lesssim \varepsilon^2$, то получим, учитывая оценку для $(J_2 + J_4)$:

$$|u_{tt} \ln u| \lesssim \varepsilon^2 \ln |\ln \varepsilon|, \quad \text{или} \quad |u_{tt}| \lesssim \frac{\varepsilon^2 \ln |\ln \varepsilon|}{|\ln \varepsilon|} \tag{15}$$

Подставив теперь оценку $g_t \approx u_{tt}$ в (7), получим вместо нее:

$$|J_2 + J_4| \leqslant \frac{\varepsilon^2 (\ln |\ln \varepsilon|)^2}{|\ln \varepsilon|} \leqslant \varepsilon^2 \tag{16}$$

Следовательно, вместо (15) может быть взято более сильное неравенство:

$$|u_{tt} \ln \varepsilon| \lesssim \varepsilon^2, \quad \text{или} \quad |u_{tt}| \lesssim \frac{\varepsilon^2}{|\ln \varepsilon|} \tag{17}$$

Следовательно, оценка для (7) может быть еще более усилена и $(J_2 + J_4)$ в (13) можно пренебречь.

В результате получим на границе каверны дифференциальное уравнение:

$$u_{tt} \ln + \frac{1}{2} \frac{(u_t)^2}{u} - 2\sigma = -\frac{4g(x_0, t)}{|x - x_0|} - 4 \int_{x_0}^{x_1} \frac{g_t d\xi}{|x - \xi|} - 4 \int_{x_2}^{\infty} \frac{g_t d\xi}{|x - \xi|} \tag{18}$$

Дополнительными условиями для этого уравнения будут условия при $x = x_1$ и начальные данные. При этом $g(x, t)$ при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ и $x_2 < x < \infty$ должны быть заданы из дополнительных соображений, например, из уравнений движения тонких тел.

При $\sigma = 0$ и стационарном движении $u(x, t) = u(x + t))$ уравнение (18) дает известную асимптотику для границы каверны [2]:

$$u = \frac{c}{\sqrt{\ln x}} x$$

В случае стационарного движения и схемы Рябушинского с кавитатором и замыкателем в виде конусов ($g_x = \text{const}$, $g(0) = 0$) уравнение (18) примет вид

$$u'' \ln u + \frac{1}{2} \frac{(u')^2}{u} - 2\sigma = \frac{2u(x_1)}{(x_1 - x_0)} \ln \frac{x - x_0 + \sqrt{(x - x_0)^2 + u}}{x - x_1 + \sqrt{(x - x_1)^2 + u}} +$$
$$+ \frac{2u(x_2)}{(x_3 - x_2)^2} \ln \frac{x_3 - x - \sqrt{(x_3 - x)^2 + u}}{x_2 - x + \sqrt{(x_2 - x)^2 + n}} \tag{19}$$

с краевыми условиями, выражающими непрерывность производной у линии тока в начале и конце каверны

$$u'(x_1) - \frac{2u(x_1)}{x_1 - x_0} = 0, \qquad u'(x_2) + \frac{2u(x_2)}{x_3 - x_2} = 0 \tag{20}$$

Численный расчет (19), (20) показывает, что для несимметричной схемы Рябушинского с длинами кавитатора и замыкателя, отличающимися в два раза и $\sigma < 0.01$, сумма сил, действующих на кавитатор и замыкатель, меньше 0.1 от сопротивления кавитатора, в то время как в точном решении должен выполняться парадокс Даламбера.

Автор признателен Г. А. Константинову, которым выполнены числительные расчеты, и С. С. Григоряну — за обсуждение работы при подготовке статьи.

Поступила 8 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.