

ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ ГАЗА В ИОНИЗУЮЩИХ УДАРНЫХ ВОЛНАХ. ЗАДАЧА О ПРОВОДЯЩЕМ ПОРШНЕ

А. А. Бармин, А. Г. Куликовский

(Москва)

Излагаются результаты исследования изменения скорости в ионизирующих ударных волнах, произвольным образом ориентированных по отношению к магнитному полю и распространяющихся по газу, магнитная вязкость которого много больше остальных диссипативных коэффициентов. Рассматривается плоский случай, т. е. считается, что скорость газа лежит в плоскости, проведенной через нормаль к ионизирующей волне и магнитное поле перед ней. Результаты используются для исследования решения авто-модельной задачи о движении проводящего поршня.

Приведем результаты об изменении скорости в ионизирующих ударных волнах, полученные путем рассмотрения структуры таких волн. Обозначим через u и v изменение x - и y -й компонент скорости в системе координат, в которой ось x выбрана по нормали к волне, $H_{y1} \geq 0$, $H_{z1} = 0$, где \mathbf{H}_1 — магнитное поле перед волной. Будем предполагать, что волна плоская, т. е. что за волной $H_z = 0$.

В рассматриваемом ниже случае большой магнитной вязкости могут существовать пять типов ионизирующих волн [1]. Некоторые типы этих волн рассматривались также в работах [2, 3]. Быстрая волна характеризуется неравенствами $a_A \leq u_2 \leq a_+$ и в рассматриваемом случае может быть только сверхзвуковой $a_0 < u_1$ (u_1, u_2 — скорости газа относительно ионизирующей волны перед и за ней, a_0 — газодинамическая скорость звука перед ионизирующей волной, a_+ , a_A — быстрая магнитозвуковая и альфвеновская скорости за волной). Так как в этой волне магнитное поле не меняется [1-3], то изменение в ней касательной составляющей скорости газа равно нулю. На плоскости uv в случае, изображенном на фигуре, быстрой ударной волне соответствуют точки оси u , лежащие правее точки E .

Промежуточная волна характеризуется неравенствами $a_- \leq u_2 \leq a_A$ (a_- — медленная магнитозвуковая скорость). В рассматриваемом здесь плоском случае существуют промежуточные волны, в которых не меняется магнитное поле, а также промежуточные волны, в которых меняется определенным образом касательная составляющая магнитного поля H_y с изменением ее знака. Если промежуточная волна дозвуковая $u_1 < a_0$, то перед ней должно выполняться дополнительное условие, заключающееся в том, что состояние газа перед ионизирующей волной ρ_1, T_1 должно быть критическим, т. е. должно принадлежать кривой $\Phi(\rho, T) = 0$, разделяющей на плоскости ρT области $\sigma = 0$ и $\sigma > 0$. Это условие определяет интенсивность газодинамической ударной волны, которая распространяется по начальному состоянию и обеспечивает выполнение этого условия перед ионизирующей волной. Дозвуковые промежуточные волны всегда изменяют величину и знак касательной составляющей магнитного поля. Изменению скорости в сверхзвуковых промежуточных волнах соответствуют на фигуре точки отрезков BC, DE, PG .

В медленной ударной волне, характеризуемой неравенством $u_2 < a_-$, касательная составляющая магнитного поля меняется произвольно в некоторых пределах. Приращения обеих компонент скорости в медленных сверхзвуковых ($u_1 > a_0$) ионизирующих волнах в некоторых пределах произвольны, так что на плоскости uv медленным ударным волнам соответствуют некоторые области. На фигуре эта область ограничена криволинейной ломаной $NCD FGKL$. Граница ее состоит из отрезков кривых, на которых выполняется одно из следующих условий.

1. Скорость ионизирующей волны равна скорости газодинамической ударной волны, за которой состояние газа становится критическим (кривая NL).

2. $u_2 = a_{-2}$ (кривые CD и LKG). Медленные ионизирующие волны, удовлетворяющие условию $u_2 = a_{-2}$, называются [3, 4] волнами Жуге.

3. Изменение скорости в медленной ионизирующей волне равно изменению скорости в промежуточной волне и медленной магнитогидродинамической волне, движущихся одна за другой с одинаковыми скоростями (кривые NC и DFG).

Перед медленной дозвуковой ($u_1 < a_0$) волной состояние газа должно быть критическим $\Phi(\rho_1, T_1) = 0$. Это условие определяет интенсивность газодинамической ударной волны, которая распространяется по начальному состоянию перед ионизирующей волной. Заметим, что в случае произвольного соотношения между диссипативными коэффициентами состояние газа перед медленной дозвуковой волной произвольно, а изменение компонент скорости газа связано между собой некоторым соотношением.

Для удобства дальнейшего изложения на фигуре представлено изменение скорости газа при прохождении им системы двух волн — газодинамической ударной и медленной дозвуковой ионизирующей волн. Это изменение скорости принадлежит области $VXNBMW$. При этом в каждой точке области $LXBM$ соответствуют две ионизирующие волны, распространяющиеся с различной скоростью. Остальным точкам соответствует единственная ионизирующая волна. Граница рассматриваемых областей состоит из отрезков кривых, на которых выполняется одно из следующих условий.

1. Изменение скорости в медленной ионизирующей волне равно изменению скорости в медленной магнитогидродинамической волне (кривая BN).
2. Скорость распространения ионизирующей волны относительно газодинамической ударной волны равна нулю (кривая NL).
3. Скорость $u_2 = a_{-2}$ — линия Жуге (кривая LMW).
4. Скорости двух ионизирующих волн, соответствующие одному и тому же изменению скорости газа совпадают — линия ветвления (кривая BM).
5. Скорость ионизирующей волны равна нулю (луч, BXV параллельный оси v).

Рассмотрим теперь автомодельную задачу о движении газа, вызываемом движением поршня. Пусть идеально проводящий плоский поршень в момент времени $t = 0$ начинает двигаться из положения $x = 0$ с постоянной скоростью $|\mathbf{U} = ue_x + ve_y$. В начальный момент времени в области $x > 0$ находится покоящийся непроводящий газ с постоянными плотностью и давлением, а электрическое поле $\mathbf{E} = Ee_z$ и магнитное поле $\mathbf{H} = H_xe_x + H_ye_y$ однородны. Предполагается, что движение поршня вызывает образование ионизирующей ударной волны, за которой электропроводность газа равна бесконечности. Требуется найти движение газа.

Граничные условия на поверхности поршня вытекают из требования обращения в нуль касательной к поршню составляющей электрического поля в системе координат, связанной с поршнем. Если проводящий газ примыкает к поршню, то это сводится к совпадению касательных составляющих скоростей газа и поршня. Нормальные составляющие скоростей в этом случае также совпадают вследствие условия непротекания.

Задача об электрическом разряде, когда движение газа вызывается тем, что на плоскости x , начиная с момента $t = 0$, поддерживается заданное постоянное электрическое поле Ee_z , представляет собой частный случай поставленной выше задачи о поршне, характеризующейся условиями $u = 0, v = cE / H_x$. Задача о разряде рассматривалась в работах [4, 5]. В частности, в этих работах указано решение с медленной ионизирующей волной Жуге и следующей за ней волной разрежения. Однако в некоторых случаях при решении задачи использовались также волны Жуге, не имеющие структуры, соответствующие пунктирной линии DJG на фигуре. Заметим, что в работах [3, 4] не дается полного исследования зависимости решения от параметров задачи.

Задача о поршне представляет интерес также и потому, что решение автомодельной задачи о распаде произвольного начального разрыва можно считать состоящим из решений задачи о поршне для каждого полупространства (роль поршня в этом случае играет контактный разрыв, скорость которого подлежит определению).

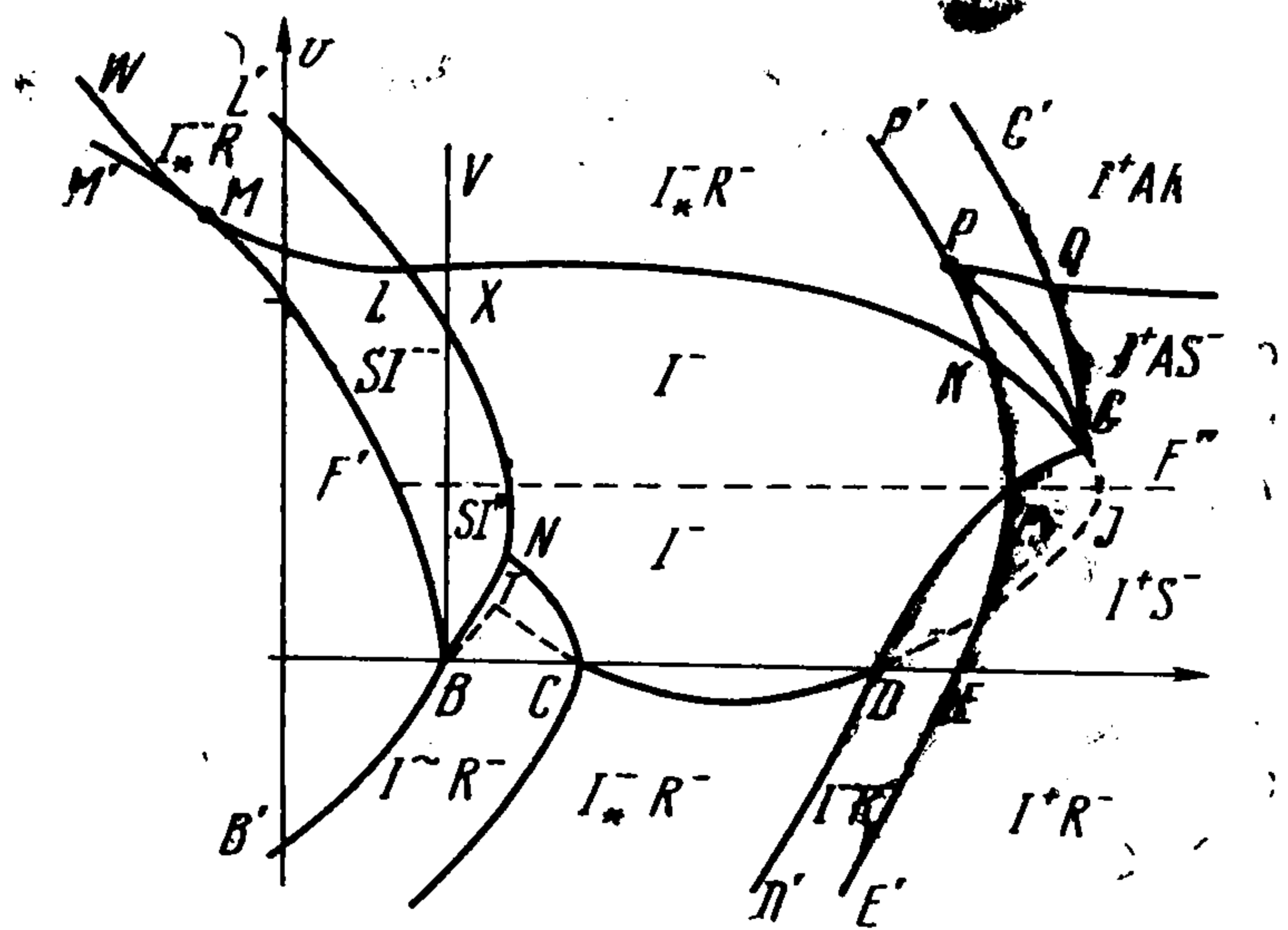
Поставленная выше задача о поршне автомодельна, и ее решение должно состоять из поверхностей разрыва и простых волн, разделенных областями с постоянными значениями всех величин. Порядок следования волн определяется их скоростями. Самой первой в этой системе волн идет электромагнитная волна.

В электромагнитной волне меняются на одну и ту же величину поперечные составляющие электрического и магнитного полей. В области за ионизирующей волной, где проводимость газа бесконечна, $\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{v} / c$. Такой же порядок имеет поперечная составляющая электрического поля в области между ионизирующей и электромагнитной

волнами. Если начальное электрическое поле пренебрежимо мало, по сравнению с магнитным, и $v/c \ll 1$, то изменением магнитного поля в электромагнитной волне можно пренебречь, т. е. считать магнитное поле перед ионизирующей волной равным начальному. Будем в дальнейшем для простоты рассматривать этот случай.

Будем изображать скорость поршня $U = ue_x + ve_y$ точкой на плоскости uv . В зависимости от значений u и v решение задачи будет представляться в виде той или иной комбинации волн, следующих одна за другой. Совокупности точек плоскости uv , которым соответствуют решения, состоящие из одинаковых комбинаций волн, образуют области на этой плоскости. Расположение и вид этих областей был исследован качественно при различных начальных значениях магнитного поля, плотности и давления. Для случая, когда p_1/H_x^2 и H_{y1}/H_x не очень велики, расположение областей изображено на фигуре. Комбинация волн, представляющая решение задачи для точек каждой области, написана на чертеже внутри области. Используются следующие обозначения:

I^+ , I^- , I^{\sim} — сверхзвуковые быстрая, промежуточная и медленная ионизирующие волны; I^{--} — дозвуковая медленная ионизирующая волна; I^{\sim} и I^{*-} — ионизирующие медленные сверхзвуковая и дозвуковая волны Жуге, S^- , R^- — магнитогидродинамические [медленные волны — ударная волна и волна разрежения, соответственно; A — альфвеновский разрыв, поворачивающий касательную составляющую магнитного поля на 180° ; S — газодинамическая ударная волна, переводящая начальное состояние газа в критическое.



Решение с быстрой сверхзвуковой ионизирующей волной возможно, когда скорость поршня лежит справа от линии $E'EFKPP'$. За быстрой ионизирующей волной могут следовать медленные ударные волны или медленные волны разрежения. Кроме того, возможны решения, в которых между ионизирующей и медленной волнами распространяется альфвеновский разрыв, изменяющий знак u H_y . Решениям с альфвеновским разрывом соответствуют скорости поршня, лежащие выше линии FF'' (точкам линии $F'FF''$ отвечают решения, в которых H_y на поршне равно нулю).

Если ионизация происходит в промежуточной волне, то решение задачи может состоять из одной промежуточной волны, если скорость принадлежит отрезкам BC , DE и PG . В областях, примыкающих к этим отрезкам, решение представляется промежуточной ионизирующей волной и следующей за ней медленной магнитогидродинамической волной — ударной или разрежения, причем в области PGF решение имеет вид $I^{\sim}S^-$, а в области $P'PGG'$ — вид $I^{\sim}R^-$. Заметим, что в изображенном на фигуре случае, решения с промежуточными дозвуковыми волнами отсутствуют.

Решение с медленными сверхзвуковыми ионизирующими волнами возможно, когда скорость поршня принадлежит области $G'QGFDD'C'CNLL'$. Решение может состоять либо из одной ионизирующей волны (область $LKGFDCN$), либо из ионизирующей волны Жуге (отрезки LKG и CD) и следующей за ней медленной волны разрежения.

Решение с медленной дозвуковой ионизирующей волной возможно, когда скорость поршня принадлежит области $VXNBMMW$. В этом случае, согласно сказанному выше, перед ионизирующей волной распространяется газодинамическая ударная волна, переводящая газ из начального состояния в критическое. При этом решение состоит либо только из двух волн ударной и ионизирующей, либо ионизирующая волна является волной Жуге и тогда за ней может следовать медленная магнитогидродинамическая волна разрежения (область $M'MLL'$). Заметим, что значениям скорости поршня из области $VXBMM'$ соответствуют два различных решения с медленными волнами. При этом в области $VXLL'$ одно решение с дозвуковой, а другое со сверхзвуковой ионизирующей

волной; в области $L'LXVMM'$ оба решения с дозвуковыми волнами. Эти решения совпадают на линии VMM' . По-видимому, то из решений, которое содержит ионизирующую волну, движущуюся с меньшей скоростью (на отрезке BXV скорость этой волны обращается в нуль), неустойчиво. При скоростях поршня, слева от линии $B'VMM'$ решение представляется обычной газодинамической волной, за которой газ остается непроводящим. Отметим, что фиксированному значению скорости поршня из области $P'PKFGQG'$ соответствуют три различных решения: либо с быстрой, либо с промежуточной, либо с медленной ионизирующими ударными волнами.

В области FKG возможны решения I^+AS^- , I^-S^- , I^- ; в области KPG — решения I^+AS^- , I^-S^- , $I_*^-R^-$; в области PGQ — решения I^+AS^- , I^-R^- , $I_*^-R^-$; в области $P'PQQ'$ — решения I^+AR^- , I^-R^- , $I_*^-R^-$.

На границах области $P'PKFGQG'$ решения попарно совпадают: решение с промежуточной волной совпадает на $FKPP'$ с решениями с быстрой волной, а на $FGQG'$ — с решениями с медленной ионизирующей волной. Если рассмотреть какие-либо функции, задающие решения задачи, например изменение магнитного поля в I^+A , I^- и I^- , как функции u и v , то указанной области будет соответствовать трехзначный кусок этой функции. При этом при одних и тех же u и v большему изменению магнитного поля соответствует решение с быстрой ионизирующей волной, среднему — с промежуточной, меньшему — с медленной. В подобных случаях средняя ветвь обычно соответствует неустойчивым решениям.

Построенная выше картина в плоскости uv имеет место для совершенного газа при начальных значениях параметров, определяемых системой следующих неравенств:

$$\left| \frac{H_{y1}}{H_x} \right| < \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{a_0}{a_{A1}} \right) \quad (1)$$

$$u^{*2} < a_{A1}^2 \frac{Z^2}{Z + (a_0/a_{A1})^2} \frac{4}{(\gamma + 1)^2} \quad \left(a_{A1} = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho_1}} \right) \quad (2)$$

Здесь u^* — изменение нормальной компоненты скорости в газодинамической волне, приводящей газ в критическое состояние, ρ_1 — начальная плотность газа, Z — меньший корень уравнения

$$(\gamma - 1)Z^2 + \left[(\gamma - 1) \frac{H_{y1}^2}{H_x^2} + \left(\frac{a_0^2}{a_{A1}^2} - 1 \right) (\gamma + 1) \right] Z + (\gamma + 1) \frac{a_0^2 H_{y1}^2}{a_{A1}^2 H_x^2} = 0 \quad (3)$$

В соотношениях (1), (2) энергия, идущая на ионизацию, не учитывалась.

Аналогичные картины на плоскости uv получены и при других начальных значениях давления, плотности и магнитного поля. Отметим их некоторые особенности.

Решения с ионизирующими волнами Жуге, в которых H_y не меняет знак, существуют только в тех случаях, когда одновременно выполнены неравенства (1) и (2), в последнем под Z нужно понимать больший корень уравнения (3). При условии

$$\frac{u^*}{a_{A1}} \geq 2 \frac{1 - a_0^2/a_{A1}^2}{\sqrt{(\gamma - 1)(\gamma + 1 - 2a_0^2/a_{A1}^2)}}$$

решения с промежуточной волной, в которой магнитное поле не меняется, отсутствуют и решения, в которых H_y не меняет знак, содержат либо быструю сверхзвуковую, либо медленную дозвуковую ионизирующие волны (знак равенства соответствует совпадению точек E и B на фигуре). При этих же значениях параметров имеют место решения с промежуточными дозвуковыми волнами, т. е. область $G'GFPP'$ или только ее часть лежит слева от линии $L'LVNB$. Тогда в дозвуковой части области $G'GFPP'$ решение будет двухзначно, так как третье решение с быстрыми дозвуковыми волнами в рассматриваемом предельном случае большой магнитной вязкости отсутствует.

При достаточно малых значениях H_x^2 / ρ_1 сверхзвуковые ионизирующие волны могут быть только быстрыми. Дозвуковые ионизирующие волны (промежуточные изменяющие магнитное поле и медленные) существуют при сколь угодно малых значениях H_x , а скорость их стремится к нулю вместе с H_x .

При $H_{y1} = 0$ отсутствуют решения задачи о поршне с промежуточными ионизирующими волнами, а также решения с альфвеновскими и медленными магнитогидродинамическими ударными волнами. При изменении знака y -й составляющей скорости поршня в решении изменяется только знак H_y и знак y -й составляющей скорости.

Поступила 22 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

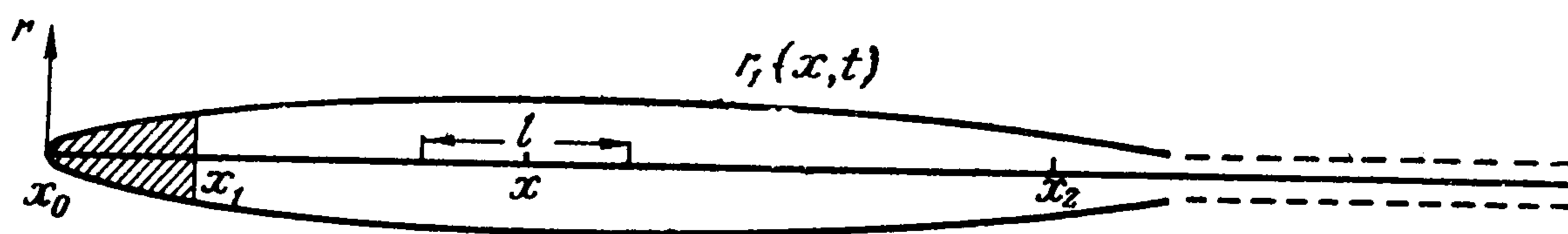
1. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Об ударных волнах, ионизирующих газ, находящийся в электромагнитном поле. Докл. АН СССР, 1968, т. 178, № 1.
2. Cowley M. D. Gas — ionizing shocks in a magnetic field. J. Plasma. Phys., 1967, vol. 1, part. 1.
3. Taussig R. T. Comparison of oblique, normal and transverse ionizing shock waves. Phys. of Fluids, 1967, vol. 10, No. 6.
4. Gross R. A. Strong ionizing shock waves. Rev. Modern Phys. 1965, vol. 37, No. 4.

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СРЫВНОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ КАВИТАЦИИ

Ю. Л. Якимов

(Москва)

В работе [1] рассматривалась задача об отрывном обтекании тонкого тела вращения идеальной несжимаемой жидкостью под нулевым углом атаки при малых числах кавитации. Ниже на основе более точных оценок выведено дифференциальное уравнение для плотности источников на оси симметрии — аналогичное уравнению в [1]; однако выведенное здесь уравнение содержит дополнительные члены. Причем задача сводится к этому дифференциальному уравнению, только если сделать дополнительные предположения (по сравнению с [1] о порядке малости числа кавитации σ , в противном случае задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению.



Будем иметь в виду схему движения, представленную на фиг. 1, где x_0, x_1 — тело; x_1, x_2 — каверна; $r_1(x, t)$ — граница каверны; $x_2, +\infty$ — след за телом и каверной; $V(t)$ — абсолютная скорость движения тела; P — давление внутри каверны; P_∞ — давление в бесконечности; скорость в бесконечности равна нулю.

Величины r, x, V, P, t будем считать уже безразмерными числами, так что их единичным значениям соответствуют некоторые $L_0, V_0, P_0 = \rho_0 V_0^2, t_0 = L_0 / |V_0|$, где V_0 — скорость тела в данный момент; ρ_0 — плотность жидкости.

Безразмерный потенциал поля скоростей вне границ тела, каверны и следа будем искать в виде:

$$\varphi(r, x, t) = \int_{x_1}^{\infty} \frac{g(\xi, t) d\xi}{V(\xi - x)^2 + r^2} \quad (1)$$

Каверну в точке $x \sim 1$ будем считать тонкой:

$$r_1 \lesssim \varepsilon \quad (2)$$