ОБ ИНВАРИАНТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПЛОСКИХ УСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

С. В. Панько (Томск)

Приводятся преобразования для уравнений Эйлера, относительно которых исходная система инвариантна. Это дает возможность ввести новую плоскость течения XY, где жидкость подчиняется иному уравнению состояния. Установленная связь между параметрами течений в обеих плоскостях позволяет находить решение какой-либо задачи в одной из плоскостей по известному решению задачи в другой плоскости, аналогично работе [1].

§ 1. Преобразование уравнений движения. Рассмотрим уравнения движения и уравнение неразрывности для плоского течения сжимаемой жидкости.

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\qquad \frac{\partial}{\partial x}\rho u+\frac{\partial}{\partial y}\rho v=0 \tag{1.1}$$

Используя уравнение неразрывности, двум первым равенствам этой системы можно придать дивергентную форму

$$\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial y}\rho uv=0,\qquad \frac{\partial}{\partial x}\rho uv+\frac{\partial}{\partial y}(p+\rho v^2)=0 \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует, что можно ввести две независимые функции X и Y при помощи равенств

$$dX=(p+\rho v^2)dx-\rho uvdy,\qquad dY=-\rho uvdx+(p+\rho u^2)dy \tag{1.3}$$

Обозначим

$$\frac{u}{p}=U,\qquad \frac{v}{p}=V,\qquad \frac{\rho p}{p+\rho w^2}=\rho^\circ,\qquad -\frac{1}{p}=P \tag{1.4}$$

Переходя теперь к новым независимым переменным X, Y в системе (1.1), и получив

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=-\frac{1}{\rho^\circ}\frac{\partial P}{\partial X},\qquad U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}=-\frac{1}{\rho^\circ}\frac{\partial P}{\partial Y} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\rho^\circ U+\frac{\partial}{\partial Y}\rho^\circ V=0\qquad\left(\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}=p(p+\rho w^2)=+\frac{1}{P(P+\rho^\circ W^2)}\right)$$

Отбрасывая случай $p=0$ получим, что переменные X, Y будут независимыми. Таким образом, течению жидкости в плоскости xy с параметрами u, v, p, ρ соответствует в плоскости X, Y течение другой жидкости с параметрами U, V, P, ρ°; причем переход из плоскости XY в физическую плоскость будет осуществляться по формулам, вытекающим из (1.3) и (1.4). Так, решая (1.3) относительно dx и dy, находим зависимости $x=x(X, Y)$, $y=y(X, Y)$, которые определяются криволинейными интегралами, взятыми вдоль любого пути, соединяющего две заданные точки плоскости

$$x=-\int\limits_L(P+\rho^\circ V^2)\,dX-\rho^\circ UV\,dY\qquad y=-\int\limits_L-\rho^\circ UVdX+(P+\rho^\circ U^2)\,dY \tag{1.6}$$

§ 2. Линии тока. Введем из соответствующих уравнений неразрывности (1.1) и (1.5) функции типа ψ и Ψ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\rho v,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\rho u;\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial X}=-\rho^\circ V,\qquad \frac{\Psi}{\partial Y}=\rho^\circ U \tag{2.1}$$

Возьмем в плоскости xy линию тока $\psi=\mathrm{const}$ и найдем ее о браз в плоскости XY Так как

$$d\psi=-\rho vdx+\rho udy \tag{2.2}$$

то формулы (1.3) могут быть записаны

$$dX = pdx - vd\psi, \qquad dY = pdy + ud\psi \tag{2.3}$$

Из (2.3) исключим dx и dy при помощи (2.2); получим

$$d\psi = -\frac{\rho v}{p + \rho w^2}\, dX + \frac{\rho u}{p + \rho w^2}\, dY \tag{2.4}$$

Принимая во внимание (1.4), придем к формуле

$$d\psi = -\rho_0 V dX + \rho_0 U dY = d\Psi \tag{2.5}$$

Отсюда видно, что линия $\psi = \text{const}$ перейдет при данном преобразовании в линию $\Psi = \text{const}$, причем $\psi = \Psi$ и углы наклона касательных к линиям тока $\psi = c$ и $\Psi = c$ с соответствующими осями будут одинаковы.

Таким образом, преобразования, осуществляемые по формулам (1.3), переводят линии тока в плоскости xy в линии тока плоскости XY. Если течение безвихревое, то данное преобразование сохраняет ортогональность линий тока и эквипотенциальных линий. Фиктивный потенциал скорости в плоскости XY можно ввести при помощи зависимости

$$d\varphi = UdX + VdY \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что преобразование годографа даст имеющиеся уже уравнения, в которых зависимости плотности и скорости от давления будут иными.

§ 3. **Уравнения состояния.** В физической плоскости вдоль линий тока выполняется следующее равенство:

$$\rho w dw + dp = 0 \tag{3.1}$$

В плоскости XY также будет иметь место аналогичное соотношение, причем

$$\rho^\circ W dW + dP = \frac{1}{J}(\rho w dw + dp) \tag{3.2}$$

Здесь J — якобиан преобразования.

Используя (1.4), (3.1), (3.2), можно определить связь плотности с давлением в плоскости.

Рассмотрим в плоскости XY течение несжимаемой жидкости, тогда из (1.4) и (3.1) получим, что в данном случае этому течению в физической плоскости соответствует течение гипотетического газа Чаплыгина

$$p = c\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho}\right) \tag{3.3}$$

Определив U и V из выражения для Ψ (2.5), а P из (3.2), легко можно получить соответствующее решение для сжимаемой жидкости путем пересчета по формулам (1.6).

Рассматривая задачу обтекания окружности потоком несжимаемой жидкости и переходя к физической плотности, получим обтекание симметричного относительно оси x овального профиля.

Двигаясь по линии тока $\psi = \text{const}$, из (2.3) имеем

$$dX = pdx, \qquad dY = pdy \tag{3.4}$$

Если линия тока будет линией постоянного давления, что имеет место на свободной поверхности, то из (3.4) следует

$$X = p_\infty x + c, \qquad Y = p_\infty y + c_1$$

Таким образом, форма свободной поверхности находится сразу, если известен ее образ в одной из плоскостей.

Поступила 24 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсесян Л. А. Об одном инвариантном преобразовании уравнений одномерных неустановившихся движений идеальной сжимаемой жидкости. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.