

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1954.
2. О в с я н н и к о в Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
3. S c h l i c h t i n g Н. Einige exakte Lösungen für die Temperaturverteilung in einer laminaren Strömung. ZAMM, 1951, vol. 31, Hft. 3.
4. С л е з к и н Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
5. L e e J. M., G i l l W. N. Heat transfer in laminar and turbulent flows between parallel plates with transverse flows. A. J. Ch. E. Journal, 1964, vol. 10, No. 6.
6. Б и р и х Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости. ПМТФ, 1966, № 3.
7. Г е р ш у н и Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. ЖТФ, 1953, т. 23, № 10.
8. К а т к о в В. Л. Одно точное решение в теории океанических течений. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1968, т. 4, № 1.
9. C h i a - S h u n Y i h. Thermal instability of viscous fluids. Quart. Appl. Math., 1959, vol. 17, No. 1.
10. П р а н д т л ь Л. Гидроаэромеханика. М., Изд. иностр. лит., 1949.
11. К а т к о в В. Л. Автомодельное решение задачи о локальном ветре. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 2.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ, ДОПУСКАЮЩЕЙ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

В. М. Ентов

(Москва)

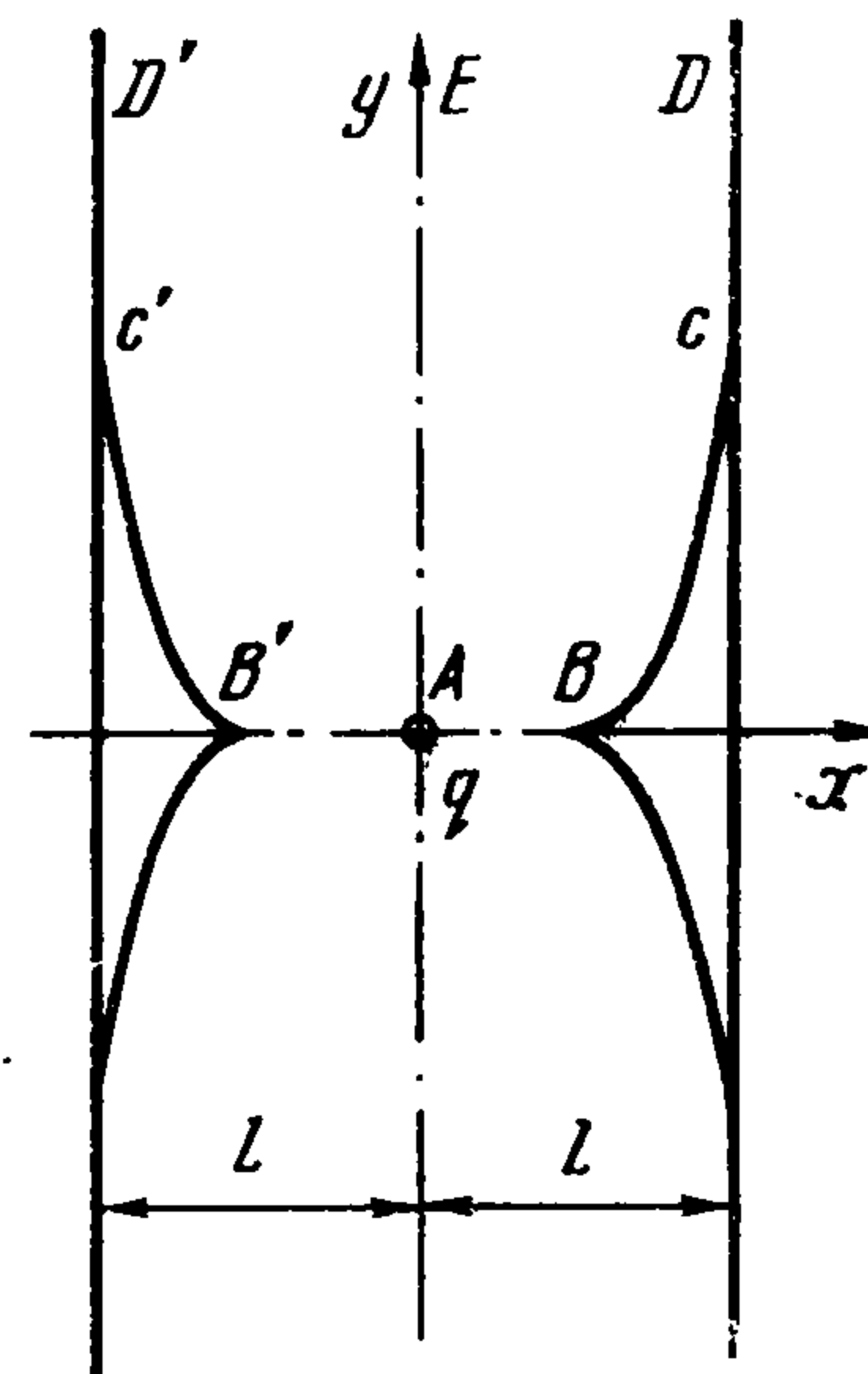
Методом интегральных преобразований строится точное решение задачи о поле бесконечного ряда источников при фильтрации с предельным градиентом. Определяется положение границы застойной зоны; результаты сопоставляются с данными приближенного решения.

1. В работе [1] показано, что ряд симметричных задач фильтрации с предельным градиентом преобразованием годографа сводится к определению функции тока ψ как решения линейного уравнения

$$w(w + \lambda) \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + (w - \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.1)$$

где w — модуль скорости фильтрации, θ — угол, составляемый ею с осью x , а λ — характерная постоянная скорость, пропорциональная величине начального градиента, при котором начинается движение.

Уравнение (1.1) в этих задачах должно быть решено в полубесконечной полосе $0 < \theta < \theta_0$, $0 < w < \infty$ с разрезом вдоль отрезка $0 < w < a$ или луча $a < w < \infty$, $\theta = \theta_1$, причем на всей границе заданы граничные значения ψ . В работе [1] рассмотрены простейшие предельные случаи с $a = 0$; построить точное решение при $a \neq 0$ в общем случае не удастся. Ниже рассмотрен частный случай, когда достаточно просто отыскивается точное решение задачи. На физической плоскости он отвечает течению от бесконечного ряда источников интенсивности q , расположенных вдоль прямой на равных расстояниях или, что равнозначно, течению от источника, расположенного между двумя непроницаемыми границами (фиг. 1); соответствующая картина в плоскости $w\theta$ показана на фиг. 2, где $a = 1/4 q/L$. В силу очевидной симметрии задачи на луче $a < w < \infty$, $\theta = 1/2\pi$ функция тока обращается в нуль, так что рассматриваемая задача равносильна первой краевой задаче для полубесконечной полосы $0 < w < \infty$,



Фиг. 1

$0 < \theta < 1/2\pi$ с условиями

$$\begin{aligned} \psi(w, \theta) = \psi(0, \theta) = 0 \\ \psi(w, 1/2\pi) = 0 \quad (0 < w < a), \quad \psi(w, 1/2\pi) = Q = 1/4 q \quad (a < w < \infty) \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. Для решения рассматриваемой задачи, равно как и для обследования других задач, связанных с уравнением (1.1), удобно использовать интегральное преобразование по переменной w . При этом необходимо установить формулы разложения в интеграл по собственным функциям уравнения

$$u(u+1)Y'' + (u-1)Y' + \alpha Y = 0 \quad (2.1)$$

Общий метод построения разложения дан в книге Титчмарша [2]; там же (гл. 4) подробно разобрано построение разложения для гипергеометрического уравнения

$$u(u+1)Y'' + [\gamma + (\zeta - 1)u]Y' + \Lambda Y = 0 \quad (2.2)$$

при $\gamma > 2$. В случае уравнения (2.1) $\gamma = -1$ и формулы Титчмарша непосредственно не применимы. Однако можно почти буквально повторить рассуждения [2] с учетом того,

что в данном случае из двух независимых решений уравнения (2.1) нужным поведением вблизи нуля обладает решение

$$Y_2 = u^2 F(2 + i\sqrt{\alpha}, 2 - i\sqrt{\alpha}, 3, -u) \quad (2.3)$$

Здесь F — символ гипергеометрической функции; $\sqrt{1} = 1$, и разрез для корня проведен вдоль отрицательной полуоси α . В результате получим

$$g(u) = 1/4 u^2 \int_0^\infty \alpha(1+\alpha) \operatorname{cth}(\pi\sqrt{\alpha}) F(2 + i\sqrt{\alpha}, 2 - i\sqrt{\alpha}, 3, -u) g^*(\alpha) d\alpha \quad (2.4)$$

Трансформанта $g^*(\alpha)$ определяется выражением

$$g^*(\alpha) = \int_0^\infty (1+u) F(\alpha, u) g(u) du, \quad F(\alpha, u) = F(2 + i\sqrt{\alpha}, 2 - i\sqrt{\alpha}, 3, -u) \quad (2.5)$$

3. Положим в уравнении (1.1) $u = w/\lambda$, после чего оно примет вид

$$u(u+1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + (u-1) \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.1)$$

и применим к нему преобразование (2.5), т. е. домножим на $(1+u) F(\alpha, u)$ и проинтегрируем по u в пределах от 0 до ∞ . Интегрируя по частям и предполагая, что вклад от внеинтегральных членов на бесконечности равен нулю, получим

$$\frac{d^2 \psi^*(\alpha, \theta)}{d\theta^2} - \alpha \psi^*(\alpha, \theta) = -2\psi(0, \theta) \quad (3.2)$$

В рассматриваемом случае правая часть уравнения (3.2), в силу условия при $u = 0$, обращается в нуль, и решение, удовлетворяющее условию при $\theta = 0$, имеет вид

$$\psi^*(\alpha, \theta) = A(\alpha) \operatorname{sh} \sqrt{\alpha} \theta \quad (3.3)$$

Применяя преобразование (2.5) к граничному условию при $\theta = 1/2\pi$ (1.2) и используя формулу обращения (2.4), находим решение в виде

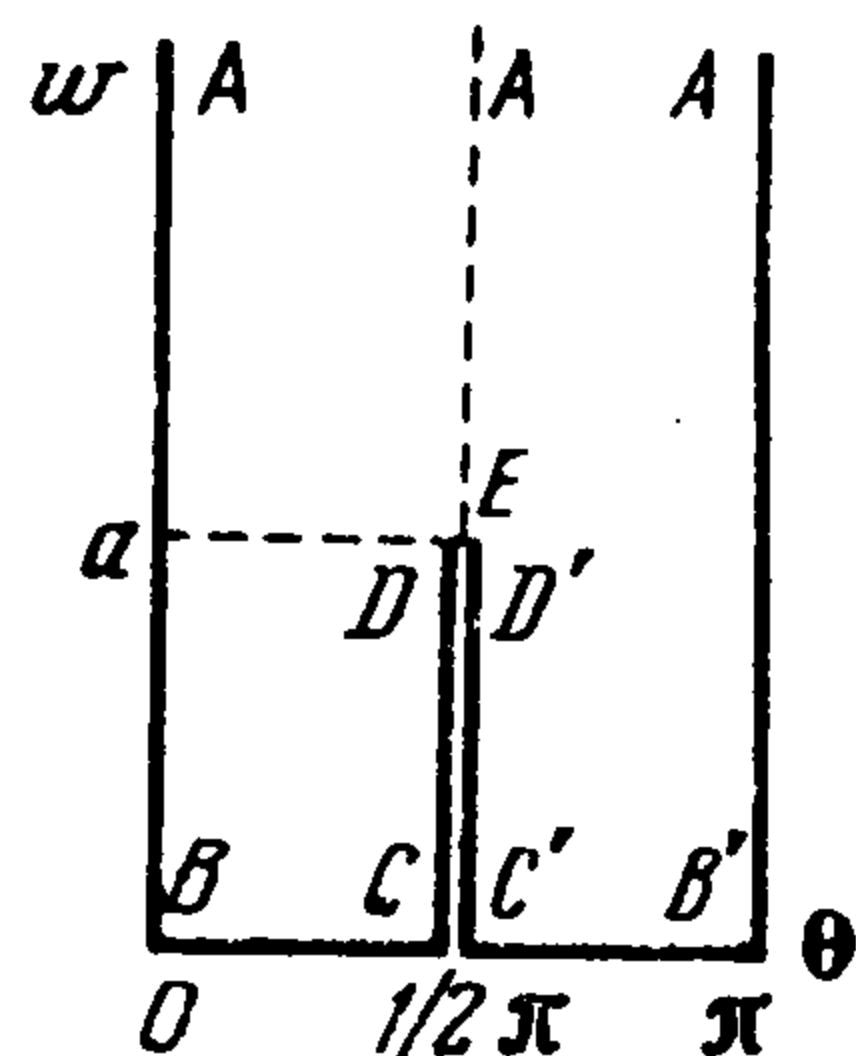
$$\psi(u, \theta) = \frac{Qu^2}{4} \int_0^\infty \frac{\alpha(1+\alpha) \operatorname{cth} \pi \sqrt{\alpha} \operatorname{sh} \sqrt{\alpha} \theta}{\operatorname{sh} 1/2 \pi \sqrt{\alpha}} F(\alpha, u) \int_{a_0}^\infty (1+v) F(\alpha, v) dv d\alpha, \quad a_0 = a/\lambda \quad (3.4)$$

Заметим, что в силу тождества (см., например, [3, 4])

$$\begin{aligned} F(\alpha, u) = u^{-2-i\sqrt{\alpha}} \frac{\Gamma(3) \Gamma(-2i\sqrt{\alpha})}{\Gamma(1-i\sqrt{\alpha}) \Gamma(2-i\sqrt{\alpha})} F_+(-1/u) + \\ + u^{-2+i\sqrt{\alpha}} \frac{\Gamma(3) \Gamma(2i\sqrt{\alpha})}{\Gamma(1+i\sqrt{\alpha}) \Gamma(2+i\sqrt{\alpha})} F_-(-1/u) \end{aligned}$$

$$F_\pm(-1/u) = F(2 \pm i\sqrt{\alpha}, \pm i\sqrt{\alpha}, 1 \pm 2i\sqrt{\alpha}, -1/u) \quad (3.5)$$

$$F(\alpha, u) = u^{-2} (C_1 u^{-i\sqrt{\alpha}} + C_2 u^{i\sqrt{\alpha}}) (1 + o(1)) \quad \text{при } u \rightarrow \infty$$



Фиг. 2

В результате внутренний интеграл в (3.4) сходится при $\alpha \neq 0$, а при $\alpha = 0$ имеет корневую особенность.

4. Определим, используя решение (3.4), форму границы застойной зоны (прообраз отрезка $w = 0$, $0 < \theta < 1/2\pi$). Согласно [1], для этого необходимо вычислить величину

$$\chi(\theta) = \lambda \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} = \frac{1}{\lambda} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \quad (4.1)$$

из (3.4) имеем

$$\chi(\theta) = \frac{Q}{2\lambda} \int_0^\infty \frac{\alpha(1+\alpha) \operatorname{cth} \pi \sqrt{\alpha} \operatorname{sh}(\theta \sqrt{\alpha})}{\operatorname{sh}^{1/2} \pi \sqrt{\alpha}} \int_{a_1}^\infty (1+v) F(\alpha, v) dv d\alpha \quad (4.2)$$

Чтобы преобразовать интеграл по α , воспользуемся соотношением (3.5). При этом подынтегральное выражение в (4.2) разобьется на сумму двух членов, один из которых аналитичен и экспоненциально убывает с ростом $|\alpha|$ в верхней полуплоскости, а другой — в нижней. (Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться формулами Ватсона п. 2.3 справочника [4].)

В результате интеграл (4.2) разбивается на два; в первом из них путь интегрирования можно деформировать в верхний берег разреза вдоль отрицательной действительной полуоси α , проходимый справа налево с обходом точек $\alpha = -n^2$ по бесконечно малым полуокружностям в верхней полуплоскости (контур Γ_+). Аналогичным образом второй интеграл можно вычислить вдоль нижнего берега разреза, обходя точки $\alpha = -n^2$ снизу по малым полуокружностям (контур Γ_-), так что

$$\begin{aligned} \chi(\theta) = & -\frac{Q}{2\lambda} \int_{\Gamma_+} \frac{\alpha(1+\alpha) \operatorname{cth} \pi \sqrt{\alpha} \operatorname{sh} \theta \sqrt{\alpha}}{\operatorname{sh}^{1/2} \pi \sqrt{\alpha}} \frac{\Gamma(3) \Gamma(2i \sqrt{\alpha})}{\Gamma(1+i \sqrt{\alpha}) \Gamma(2+i \sqrt{\alpha})} \times \\ & \times \int_{a_1}^\infty (1+v) F_-(-1/v) dv d\alpha + \frac{Q}{2\lambda} \int_{\Gamma_-} \frac{\alpha(1+\alpha) \operatorname{cth} \pi \sqrt{\alpha} \operatorname{sh}(\theta \sqrt{\alpha})}{\operatorname{sh}^{1/2} \pi \sqrt{\alpha}} \times \\ & \times \frac{\Gamma(3) \Gamma(-2i \sqrt{\alpha})}{\Gamma(1-i \sqrt{\alpha}) \Gamma(2-i \sqrt{\alpha})} \int_{a_2}^\infty (1+v) F_+(-1/v) dv d\alpha \end{aligned}$$

Заметим теперь, что подынтегральное выражение первого интеграла, рассматриваемое как функция α , аналитично в верхней полуплоскости, подынтегральное выражение второго интеграла — в нижней, а на отрезках $(-n^2, -(n-1)^2)$ действительной оси они совпадают в силу условия $\sqrt{\alpha} = i\sqrt{|\alpha|}$ сверху и $\sqrt{\alpha} = -i\sqrt{|\alpha|}$ снизу. Таким образом, в силу принципа аналитического продолжения они образуют аналитическую функцию $\Xi(\alpha)$, имеющую, возможно, точки $\alpha = -n^2$ своими полюсами. В результате имеем

$$\chi(\theta) = \frac{Q}{2\lambda} \int_{\Gamma} \Xi(\alpha) d\alpha \quad (\Gamma = \Gamma_+ + \Gamma_-) \quad (4.3)$$

В силу вышеуказанного, интегралы по отрезкам $(-n^2, -(n-1)^2)$ взаимно уничтожаются, и выражение (4.3) сводится к сумме интегралов по бесконечно малым окружностям, обходящим точки $\alpha = -n^2$. (Заметим, что при $\alpha = -(n + 1/2)^2$ особые точки (полюса) функции F_{\pm} погашаются нулями гиперболического котангенса и не дают вклада). Те точки $\alpha = -n^2$, которые отвечают нечетным $n = 2m + 1$, также не дают вклада. Действительно, в этих точках при $m = 0$ имеем полюс первого порядка у котангенса и полюса у $\Gamma(-2i \sqrt{\alpha})$ и $\Gamma(1 - i \sqrt{\alpha})$; здесь же $(1 + \alpha)$ обращается в нуль, так что особенность отсутствует.

При $m \neq 0$ добавляется лишний полюс в знаменателе, так что особенности снова нет. Рассмотрим теперь точки $n = 2m$. При $m = 0$ внутренний интеграл имеет порядок

$$\int_{a_1}^\infty u^{-1+i \sqrt{\alpha}} du = O(1/\sqrt{|\alpha|})$$

Стоящее перед ним выражение имеет порядок единицы; в результате особенность в точке $\sqrt{\alpha}$ интегрируема, и вклад ее равен нулю. Если же $m \neq 0$, то в нуль обращаются $h^{1/2} \pi \sqrt{\alpha}$, полюс имеют] котангенс и все гамма-функции; в результате все подынтегральное выражение имеет в точках $\alpha = -(2m)^2$ полюса первого порядка. Вычисляя вычеты, получим

$$\chi(\theta) = \frac{16Q}{\pi\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m^2 \frac{(2m-1)! (2m+1)!}{4m!} \times \\ \times \int_a^{\infty} (1+v) v^{-2-2m} F(2+2m, 2m, 1+4m, -1/v) dv \sin 2m\theta \quad (4.4)$$

Используя, как и в [1], интегральное представление Эйлера для гипергеометрической функции, можно представить (4.4) в виде

$$\chi(\theta) = \frac{16Q}{\pi\lambda} \int_a^{\infty} \frac{1+u}{u^2} du \int_0^1 \operatorname{Im} \frac{t^3}{(t+u)^2} \frac{e^{2i\theta} (1 - 8v^2 e^{2i\theta} + 3v^4 e^{4i\theta})}{(1 + v^2 e^{2i\theta})^4} dt \left(v = \frac{t(1-t)}{u+t} \right) \quad (4.5)$$

Для координат границы застойной зоны имеем

$$x(\varphi) + iy(\varphi) = \int_0^{\varphi} e^{i\theta} \chi(\theta) d\theta \quad (4.6)$$

Подставляя (4.5) в (4.6) и выполняя интегрирование по θ , получим

$$x(\varphi) + iy(\varphi) = -\frac{8Q}{\pi\lambda} \int_a^{\infty} \frac{1+u}{u^2} du \int_0^1 \frac{t^3 dt}{(t+u)^2} \left[\frac{1}{4v^3} \operatorname{arctg} \frac{v \cos \varphi}{1 + v \sin \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4v^3} \operatorname{arctg} \frac{v \cos \varphi}{1 - v \sin \varphi} - \frac{1}{2v^3} \operatorname{arctg} v - \frac{A(v, \varphi) \cos \varphi - B(v, \varphi) \sin \varphi}{2v^2 (1 + 2v^2 \cos 2\varphi + v^4)^3} + \right. \\ \left. + \frac{1 + 7v^4}{2v^2 (1 + v^2)^3} + \frac{i}{8v^3} \ln \frac{1 + 2v \sin \varphi + v^2}{1 - 2v \sin \varphi + v^2} - i \frac{A(v, \varphi) \sin \varphi + B(v, \varphi) \cos \varphi}{2v^2 (1 + 2v^2 \cos 2\varphi + v^4)^3} \right] \quad (4.7)$$

Здесь

$$A(v, \varphi) = 1 + 3v^2 \cos 2\varphi + 10v^4 \cos 4\varphi + 21v^6 \cos 2\varphi + \\ + v^6 \cos 6\varphi + 21v^8 + 7v^{10} \cos 2\varphi$$

$$B(v, \varphi) = v^2 \sin 2\varphi - 3v^6 \sin 2\varphi - v^6 \sin 6\varphi - 4v^8 \sin 4\varphi - 3v^{10} \sin 2\varphi$$

Соотношение (4.7) определяет координаты границы с точностью до постоянных, которые проще всего определить с учетом условий $x(1/2 \pi) = L$, $y(0) = 0$.

Вид границы застойной зоны, рассчитанный по формуле (4.7), показан на фиг. 3. Числа около кривых обозначают значения параметра a_0 .

5. Помимо расположения застойных зон, для приложений важно также знать, как влияет их появление на перепад давления между скважиной и удаленными частями пласта.

Выберем на оси y (фиг. 1) точки $y_1 \ll L$ и $y_2 \gg L$. Из закона фильтрации имеем

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -(w + \lambda) \quad (5.1)$$

так что

$$H(y_1) - H(y_2) = \lambda(y_2 - y_1) + \int_{y_1}^{y_2} w dy \quad (5.2)$$

При $\lambda = 0$ решение рассматриваемой задачи хорошо известно (см., например, [5]). В частности, распределение скорости фильтрации вдоль оси y определяется выражением

$$w^0(0, y) = \frac{Q}{L} \operatorname{cth} \frac{\pi y}{2L} \quad (5.3)$$

Используя (5.3) и отбрасывая малые величины, получим из (5.2)

$$H(y_1) - H(y_2) = \lambda(y_2 - y_1) + \Delta H_D + \int_0^\infty \left(w - \frac{Q}{L} \operatorname{cth} \frac{\pi y}{2L} \right) dy \quad (5.4)$$

$$H_D = \frac{Q}{L} \int_{y_1}^{y_2} \operatorname{cth} \frac{\pi y}{2L} dy \quad (5.5)$$

Здесь H_D — перепад напора, отвечающий линейному закону фильтрации; $\lambda(y_2 - y_1)$ представляет собой добавочную потерю напора, связанную с нелинейностью закона фильтрации; добавка такого вида получилась бы при течении от прямолинейной галереи. Интегральный член в (5.4) учитывает изменение потери напора в связи с перестройкой картины течения под влиянием нелинейности течения. При вычислении его связь между w и y задается выражением [1]

$$y = - \int_w^\infty \frac{\partial H}{\partial w} \Big|_{\theta=1/2\pi} \frac{dw}{w + \lambda} = - \int_w^\infty \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=1/2\pi} \frac{dw}{w^2} \quad (5.6)$$

$Q/L \ll w < \infty$

Выражение для производной $\partial \psi / \partial \theta$ получается дифференцированием (3.4) и в общем случае достаточно сложно. Оно может быть упрощено для больших и малых значений $a_0 = Q/\lambda L$.

6. Рассмотрим теперь предельный случай, когда $a = 0$. Как было показано в [1], решение в этом предельном случае дает нижнюю оценку для размеров застойной зоны; поэтому представляет интерес его сопоставление с полученным выше решением для малых $a \neq 0$. Искомое решение можно непосредственно взять из работы [1]. Имеем

$$\psi = (2/\pi)Q\theta + \Psi^\circ \quad (6.1)$$

$$\Psi^\circ = - \frac{2Q}{\theta_1(1+u)} \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{1+u-t}{t} \frac{(1+\pi/\theta_1) v^{\pi/\theta_1} e^{i\theta\pi/\theta_1} + v^{2\pi/\theta_1} e^{2i\pi\theta/\theta_1}}{(1+v^{\pi/\theta_1} e^{i\pi\theta/\theta_1})^2} dt \quad (6.2)$$

(В соответствующей формуле (4.23) работы [1] пропущен показатель степени в знаменателе и неверно выписан первый член числителя). Полагая здесь $\theta_1 = 1/2\pi$, вычислим

$$x^\circ = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{\partial \psi(u, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \frac{du}{u^2} = \frac{8Q}{\pi\lambda} \int_0^\infty \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{1+u} \int_0^1 \frac{(1-t)v(3-v^2)}{(1+v^2)^3} dt \right] \frac{du}{u^2} \quad (6.3)$$

В последнем интеграле можно произвести интегрирование по частям, перейти к интегрированию по v и изменить порядок интегрирования, что позволяет найти

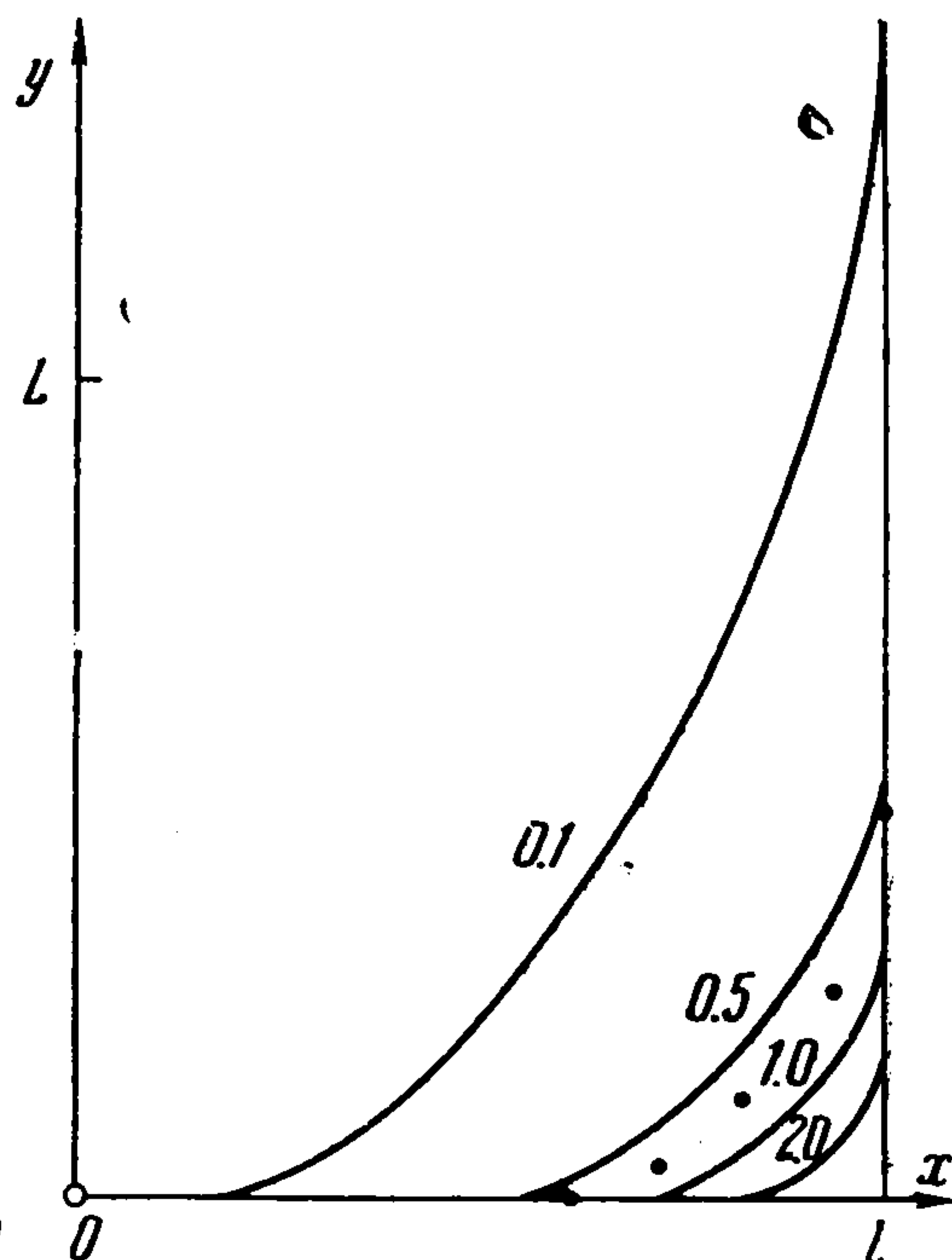
$$\frac{\pi\lambda x^\circ}{16Q} = \int_0^1 \left\{ \frac{v[6-3v-16v^2-2v^3+2v^4+v^5]}{(1+v^2)^4} \left[\frac{1-v}{(1+v)^2} - \frac{2v \ln v}{(1+v)^3} \right] \right\} dv = 0.45 \quad (6.4)$$

Чтобы определить форму застойной зоны, вычислим

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{24Q}{\pi} \sin 2\theta \left(\frac{\pi}{16 \cos^5 \theta} + \frac{1}{6 \cos^4 \theta} + \frac{1}{24 \cos^2 \theta} + \frac{\theta}{8 \sin \theta \cos^5 \theta} - \frac{\theta}{16 \sin \theta \cos^3 \theta} \right) \equiv \lambda \chi_0(\theta) \quad (6.5)$$

Отсюда для координат границы застойной зоны имеем

$$x(\theta) + iy(\theta) = x^\circ + \int_0^\theta \chi_0(\theta) e^{i\theta} d\theta$$



Фиг. 3

или

$$\begin{aligned} x(\theta) &= x^0 + \frac{24Q}{\pi\lambda} \left[\frac{\pi}{16} \operatorname{tg}^2 \theta + \frac{5}{24} \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{12} + \frac{1}{8} \frac{\theta \sin \theta}{\cos^2 \theta} \right] \\ y(\theta) &= \frac{24Q}{\pi\lambda} \left[\frac{\pi}{24} \operatorname{tg}^3 \theta + \frac{1}{8} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{12} \sin \theta + \frac{\theta}{12 \cos^3 \theta} - \frac{\theta}{8 \cos \theta} \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

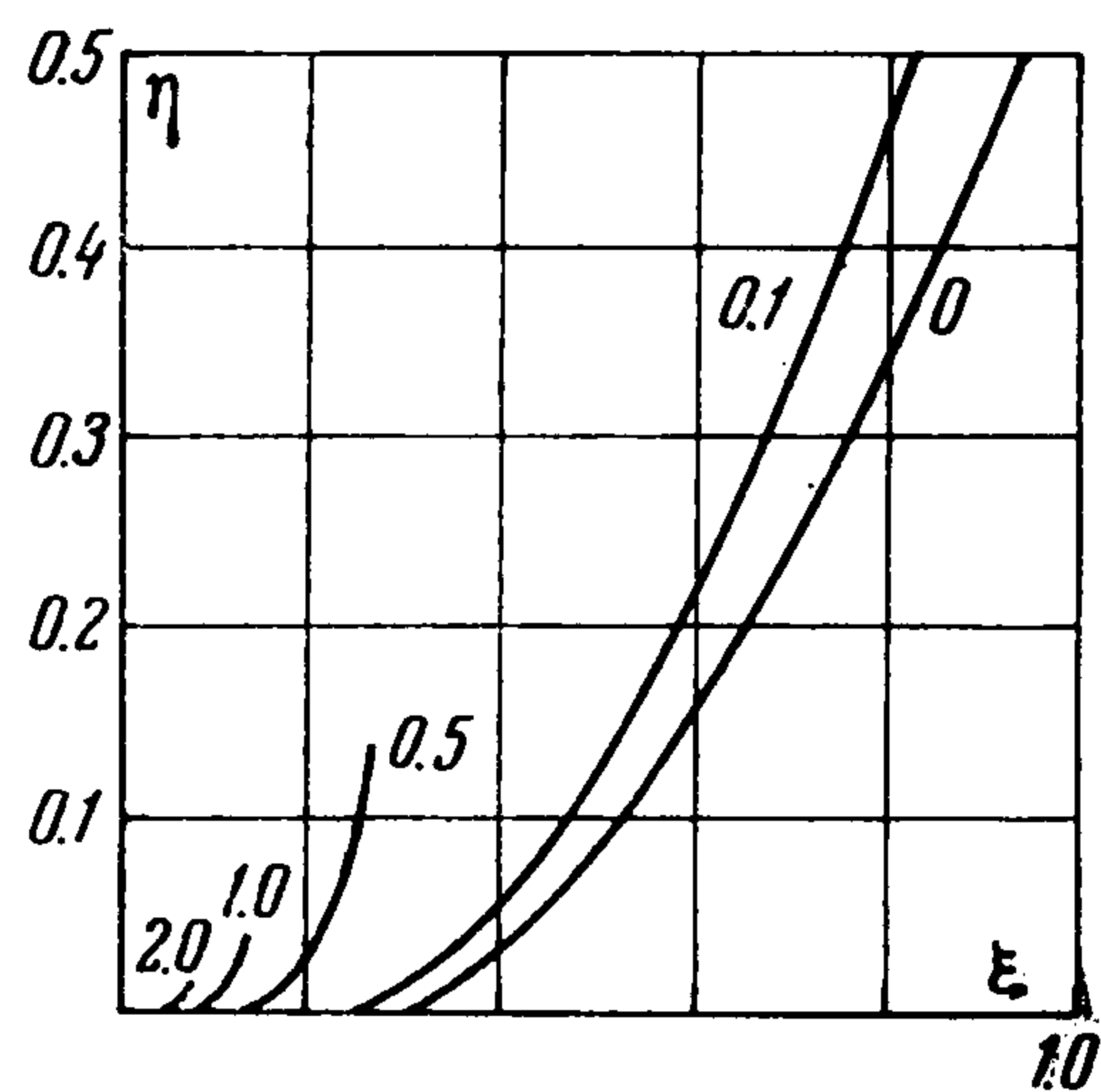
Предельная конфигурация застойной зоны, определяемая соотношениями (6.5) и (6.6), показана на фиг. 4; для сопоставления здесь показаны также кривые фиг. 3, но с величиной Q/λ в качестве масштаба ($\xi = \pi\lambda x / (24Q)$, $\eta = \pi\lambda y / (24Q)$). Как и ожидалось, предельное решение ($a_0 = 0$) дает нижнюю оценку для размеров застойной зоны, причем для случая $a_0 = 0.1$ эта оценка уже близка к решению.

7. В работе [6] предложен приближенный метод решения задач фильтрации с начальным градиентом, сводящийся к тому, что в области течения движение считается следующим законом Дарси, со скоростью, превосходящей заданное значение λ , а границы застойных зон находятся как линии тока, на которых скорость фильтрации равна λ . В такой постановке задача сводится к решению уравнения Лапласа в области с неизвестной границей и легко решается методами, известными в теории струй.

В рассматриваемом случае необходимо найти решение уравнения Лапласа для функции тока ψ в области $EABCD$ (фиг. 1), удовлетворив дополнительному условию $w = \lambda$ на BC . Искомое выражение, связывающее z потенциалом W , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dW} &= \frac{i(1+a_0^2)}{2a_0\lambda} \left[\sqrt{1 - \exp(-\pi W/Q)} - \sqrt{\alpha^2 - \exp(-\pi W/Q)} \right] \\ \alpha &= (a_0^2 - 1)/(a_0^2 + 1) \quad (W = H + i\psi, z = x + iy) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Интегрируя и полагая $\psi = 0$, получим искомое выражение для координат границы застойной зоны. Если взять за параметр угол θ , составляемый границей с осью x , то получим



Фиг. 4

$$\begin{aligned} \frac{z}{L} &= \frac{a_0^2 - 1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2a_0 \cos \theta}{a_0^2 - 1} - \frac{2a_0}{\pi} \cos \theta + \\ &+ i \left[\frac{1 + a_0^2}{2\pi} \ln \frac{1 + 2a_0 \sin \theta + a_0^2}{1 - 2a_0 \sin \theta + a_0^2} - \frac{2}{\pi} a_0 \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (7.2)$$

Легко видеть, что полученное решение пригодно лишь для достаточно больших a_0 . Действительно, при $a_0 < 1$ скорость потока на бесконечности меньше λ , что противоречит принятой модели; при a_0 близких к единице вершина застойной зоны уходит сколь угодно далеко по оси y . На фиг. 3 точками нанесены координаты границы, рассчитанные по формуле (7.2) для $a_0 = 2$; как видно, результат сильно отличается от точного решения.

Автор признателен В. Н. Телиянцу и Р. Т. Позвонковой, организовавшим вычисление по формуле (4.7), и Татьяне Н. Еричевой и А. Е. Сегалову за помощь в работе.

Поступила 15 II 1968

НИИ механики Московского университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Е н т о в В. М. О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
2. Т и т ч м а р ш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 1., М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Л е б е д е в Н. Н. Специальные функции и некоторые их приложения. М., Физматгиз, 1963.
4. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., «Наука», 1965.
5. Ч а р н ы й И. А. Подземная гидромеханика. М., Гостехиздат, 1948.
6. А л и ш а е в М. Г., В а х и т о в Г. Г., Г е х т м а н М. М., Г л у м о в И. Ф. О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.