

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ

В. Л. Катков (Новосибирск)

Указаны инвариантно-групповые решения некоторых задач, описывающих конвективные движения. Часть решений этого типа получена ранее другими методами.

1. Рассматриваются плоские движения несжимаемой вязкой жидкости, возникающие вследствие неоднородного нагревания границ. В декартовых координатах такие движения описываются следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} uu_x + vu_y &= u_{xx} + u_{yy} - p_x \\ uv_x + vv_y &= v_{xx} + v_{yy} - p_y + \lambda\theta \\ u\theta_x + v\theta_y &= \sigma(\theta_{xx} + \theta_{yy}), \quad u_x + v_y = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v — составляющие скорости по x - и y -осям, p — давление, θ — температура (точнее, их отклонения от некоторых стандартных значений), λ — число Грасгофа, σ — число Прандтля.

Система уравнений (1.1) допускает группу преобразований, для описания которой достаточно знать соответствующие базисные операторы [2].

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial p}, \quad X_4 = \lambda y \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial \theta} \\ X_5 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v} - 2p \frac{\partial}{\partial p} - 3\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Первый оператор описывает преобразование сдвига по x :

$$x' = x + a, \quad y' = y, \quad u' = u, \quad v' = v, \quad p' = p, \quad \theta' = \theta$$

Здесь штрихом обозначены новые переменные, a — произвольный параметр. Два других оператора задают аналогичные преобразования сдвига по y и p . Четвертый оператор эквивалентен преобразованию

$$x' = x, \quad y' = y, \quad u' = u, \quad v' = v, \quad p' = p + \lambda ya, \quad \theta' = \theta + a$$

Наконец, пятый оператор описывает преобразование растяжения

$$x' = ax, \quad y' = ay, \quad u' = \frac{u}{a}, \quad v' = \frac{v}{a}, \quad p' = \frac{p}{a^2}, \quad \theta' = \frac{\theta}{a^3}$$

Если подвергнуть инвариантно-групповое решение преобразованиям из основной группы, то снова получим решение системы (1.1). Необходимо поэтому выделить существенно различные решения, т. е. такие, которые нельзя перевести одно в другое никакими преобразованиями основной группы [2]. Для построения существенно различных решений необходимо знать оптимальную систему однопараметрических подгрупп. Несложные вычисления показывают, что эта система порождается пятью операторами:

$$X_1, \quad \alpha X_1 + X_3, \quad \alpha X_1 + X_4, \quad \alpha X_1 + X_2 + \beta X_4, \quad X_5 \quad (1.3)$$

Будем обозначать через H_j подгруппу, порожденную оператором X_j .

2. Рассмотрим получающиеся решения. Техника нахождения этих решений описана в [2] и состоит в следующем. Определяются инварианты подгруппы H_j как совокупность линейно независимых решений уравнения $X_j J = 0$. Пусть таких инвариантов будет k , J_1, J_2, \dots, J_k ; затем часть инвариантов выбирается в качестве независимых переменных, а остальные считаются функциями первых и подставляются в уравнения (1.1). Интегрирование получающихся уравнений дает искомое решение. Возникающие при интегрировании постоянные будем обозначать через u_i, v_i, θ_i ($i = 0, 1$), p_0 .

Ниже из-за недостатка места будут выписываться выражения только для u, v и θ .

2.1. Подгруппа H_1 . Инварианты $J_1 = u, J_2 = v, J_3 = p, J_4 = \theta, J_5 = y$; решение ищем в виде $u = U(y), v = V(y), \theta = T(y), p = P(y)$. После подстановки в (1.1) из последнего уравнения получим, что $v = v_0 = \text{const}$, а остальные принимают вид

$$v_0 U' = U'', \quad P' = \lambda T, \quad v_0 T' = \sigma T'' \quad (2.1)$$

Рассмотрим вначале случай $v_0 = 0$; после интегрирования получаем (ср. с [3])

$$u = u_0' y + u_1, \quad v = 0, \quad \theta = \theta_0 y + \theta_1 \quad (2.2)$$

Решение (2.2) описывает течение Куэтта [4] между двумя движущимися плоскостями, когда эти плоскости имеют разные температуры.

Если $v_0 \neq 0$, то решением (2.1) будет

$$u = u_0 e^{v_0 y} + u_1, \quad v = v_0, \quad \theta = \theta_0 e^{m y} + \theta_1 \quad (2.3)$$

где $m = v_0 / \sigma$. Это решение описывает конвекцию между двумя пористыми стенками, когда через одну стенку газ подается, а через другую отсасывается, причем вектор скорости на обеих стенках имеет разные углы наклона [5].

2.2. Подгруппа H_2 . Решение ищем в виде $u = U(y)$, $v = V(y)$, $\theta = T(y)$, $p = \alpha x + P(y)$. Опять, как и выше, из последнего уравнения следует, что $v = v_0$. Остальные уравнения совпадают с (2.1), только в первом из них в правой части появляется слагаемое $-\alpha$. При $v_0 = 0$ имеем решение

$$u = \frac{1}{2} \alpha y^2 + u_0 y + u_1, \quad v = 0, \quad \theta = \theta_0 y + \theta_1 \quad (2.4)$$

Это решение представляет собой обобщение течения Пуазейля [4], возникающего между двумя нагретыми плоскостями под действием постоянного градиента давления.

Пусть теперь $v_0 \neq 0$. Интегрирование уравнений дает

$$u = u_0 e^{v_0 y} - \frac{\alpha}{v_0} \left(y + \frac{1}{v_0} \right) + u_1, \quad v = v_0, \quad \theta = \theta_0 e^{m y} + \theta_1, \quad m = \frac{v_0}{\sigma} \quad (2.5)$$

Это решение можно интерпретировать как течение между пористыми стенками.

2.3. Подгруппа H_3 . Решение ищем в виде

$$u = U(y), \quad v = V(y), \quad \theta = \beta x + T(y), \quad p = \lambda \beta x y + P(y)$$

и после подстановки в (1.1) приходим к уравнениям

$$V U' = U'' - \lambda \beta y, \quad V V' = V'' - P' + \lambda T, \quad U \beta + V T' = \sigma T'', \quad V' = 0 \quad (2.6)$$

Первый случай, когда $v = 0$, дает решение

$$u = \frac{1}{6} \lambda \beta y^3 + u_0 y + u_1, \quad \theta = \beta x + \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{\lambda \beta}{120} y^5 + \frac{u_0}{6} y^3 + \frac{u_1}{2} y^2 \right) + \theta_0 y + \theta_1 \quad (2.7)$$

Полученное решение описывает, например, течение внутри плоского канала, когда вдоль него поддерживается постоянный градиент температуры β (ср. с [6]).

При $v \neq 0$ решение тоже выписывается в элементарных функциях.

2.4. Подгруппа H_4 . Решения, получаемые на этой подгруппе, зависят от двух параметров α и β , которые могут обращаться в нуль. Поэтому различаем четыре случая.

2.4.1. Пусть вначале $\alpha = \beta = 0$. Решение следует искать в виде

$$u = U(x), \quad v = V(x), \quad \theta = T(x), \quad p = P(x)$$

Система уравнений (1.1) принимает вид

$$U U' = U'' - P', \quad U V' = V'' + \lambda T, \quad U T' = \sigma T'', \quad U' = 0 \quad (2.8)$$

Из последнего уравнения следует, что $u = u_0$. Если $u_0 = 0$, то интегрирование (2.8) дает

$$u = 0, \quad v = -\lambda \left(\frac{1}{6} \theta_0 x^3 + \frac{1}{2} \theta_1 x^2 \right) + v_0 x + v_1, \quad \theta = \theta_0 x + \theta_1 \quad (2.9)$$

Полученное решение описывает, например, течение в вертикальной щели, когда температура стенок различна [7]. Если же $u_0 \neq 0$, то имеем

$$u = u_0, \quad \theta = \theta_0 e^{m x} + \theta_1 \quad (m = u_0 / \sigma)$$

$$v = v_1 e^{u_0 x} - \frac{\lambda \theta_0 \sigma^2}{u_0^2 (1 - \sigma)} e^{m x} + \frac{\lambda \theta_1}{u_0} x + \frac{\lambda \theta_1}{u_0^2} + v_0 \quad (2.10)$$

Для интерпретации этого решения рассмотрим следующую задачу. Пусть при $x = 0$ расположена пористая стенка с температурой θ_0 и через нее отсасывается воздух со скоростью u_0 . И пусть на бесконечно большом расстоянии от стенки в правой полу-

плоскости температура газа равна нулю. Следовательно, краевые условия таковы:

$$\begin{aligned} u = u_0, v = 0, \theta = \theta_0 & \quad \text{при } x = 0 \\ u = u_0, v = 0, \theta = 0 & \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (u_0 < 0) \end{aligned}$$

Давление всюду постоянно и равно p_0 . С этими краевыми условиями имеем из (2.10)

$$v = \frac{\lambda \theta_0 \sigma^2}{u_0^2 (1 - \sigma)} (e^{u_0 x} - e^{mx}), \quad \theta = \theta_0 e^{mx} \quad (2.11)$$

Линии тока приведены на фиг. 1.

2.4.2. Случай $\beta = 0, \alpha \neq 0$ исследован в [8].

2.4.3. $\beta \neq 0, \alpha = 0$. Решение ищем в виде

$$u = U(x), \quad v = V(x), \quad \theta = \beta y + T(x), \quad p = \frac{1}{2} \lambda \beta y^2 + P(x)$$

После подстановки в (1.1) приходим к системе

$$UU' = U'' - P', \quad UV' = V'' + \lambda T, \quad UT' + \beta V = \sigma T'', \quad U' = 0. \quad (2.12)$$

Из последнего уравнения $u = u_0$, а из первого $P = p_0$. Система (2.12) эквивалентна одному уравнению четвертого порядка для V :

$$V^{IV} - u_0 \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) V'''' + \frac{u_0^2}{\sigma} V'' + \frac{\lambda \beta}{\sigma} V = 0 \quad (2.13)$$

Если V найдено, то T определится из второго уравнения (2.12).

Вначале рассмотрим случай $u_0 = 0, \beta > 0$. Характеристическое уравнение, соответствующее (2.13), имеет вид

$$k^4 = -\omega^2 \quad (\omega^2 = \lambda \beta / \sigma) \quad (2.14)$$

Корни уравнения (2.14) таковы:

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \mu(1 \pm i) \\ k_{3,4} &= -\mu(1 \pm i), \quad (\mu = \frac{1}{2} \sqrt{2|\omega|}) \end{aligned}$$

Для интерпретации решения рассмотрим следующую задачу. Пусть при $x = 0$ расположена вертикальная стенка, температура которой растет с увеличением y по линейному закону, и на бесконечно большом расстоянии от стенки газ покоится, т. е.

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad \theta = \beta y + \theta_0 & \quad \text{при } x = 0 \\ u = v = 0, \quad \theta = \beta y & \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (\beta > 0) \end{aligned}$$

Давление всюду постоянно. Решение, удовлетворяющее этим условиям, будет

$$u = 0, \quad v = \frac{\lambda \theta_0}{2\mu^2} e^{-\mu x} \sin \mu x, \quad \theta = \beta y + \theta_0 e^{-\mu x} \cos \mu x \quad (2.15)$$

Все течение (фиг. 2) разбилось на ряд полос шириной $L = \pi / \mu$, причем направление потока меняется на обратное при переходе от одной полосы к другой. Суммарный расход газа через поперечное сечение

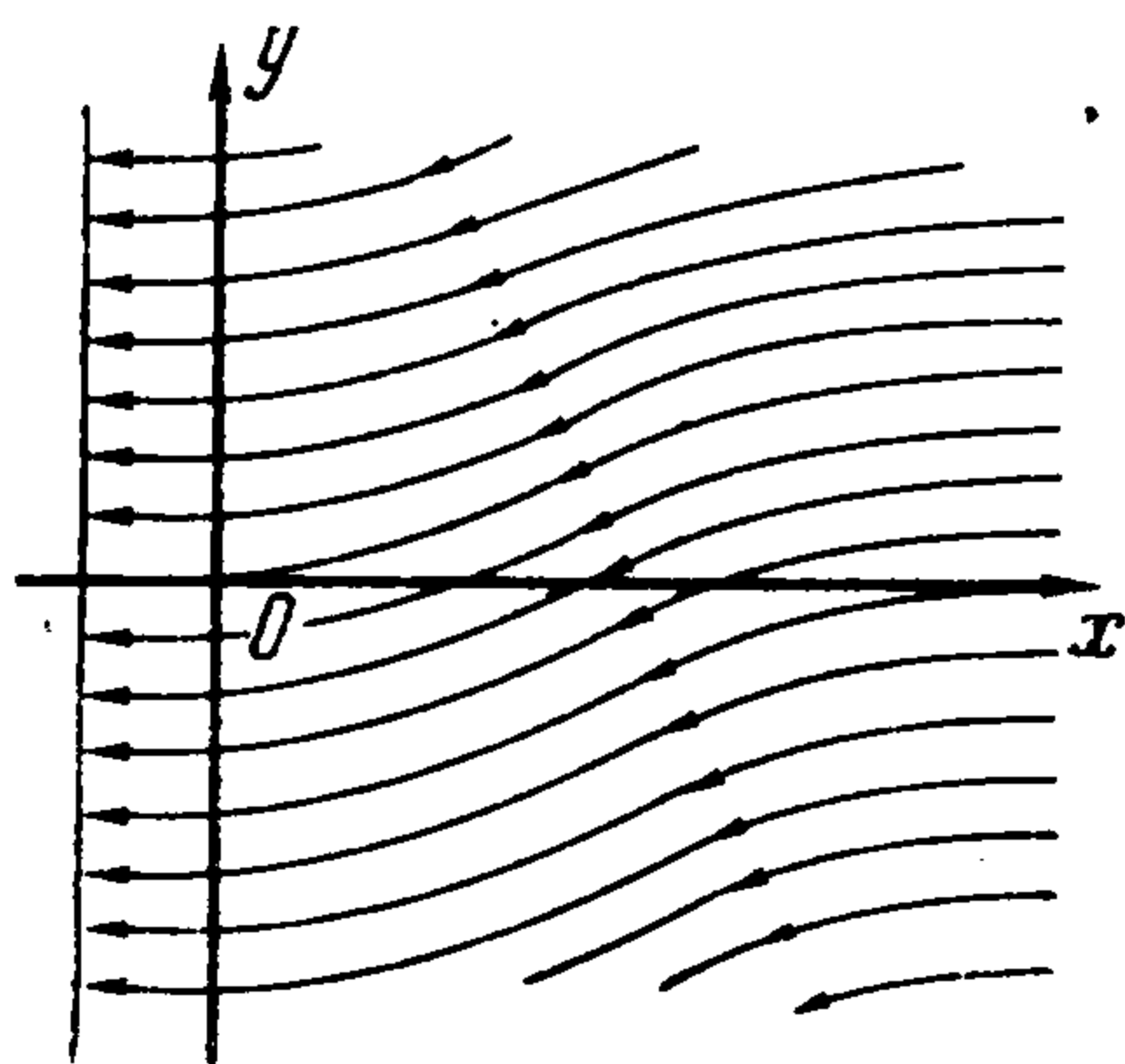
$$Q = \int_0^\infty v dx = \frac{\lambda \theta_0}{4\mu^3}$$

Перейдем к случаю $u = 0, \beta < 0$. Теперь градиент температуры по вертикали отрицателен. Обозначим $\lambda \beta / \sigma$ через $-\omega^2$; V можно записать в виде

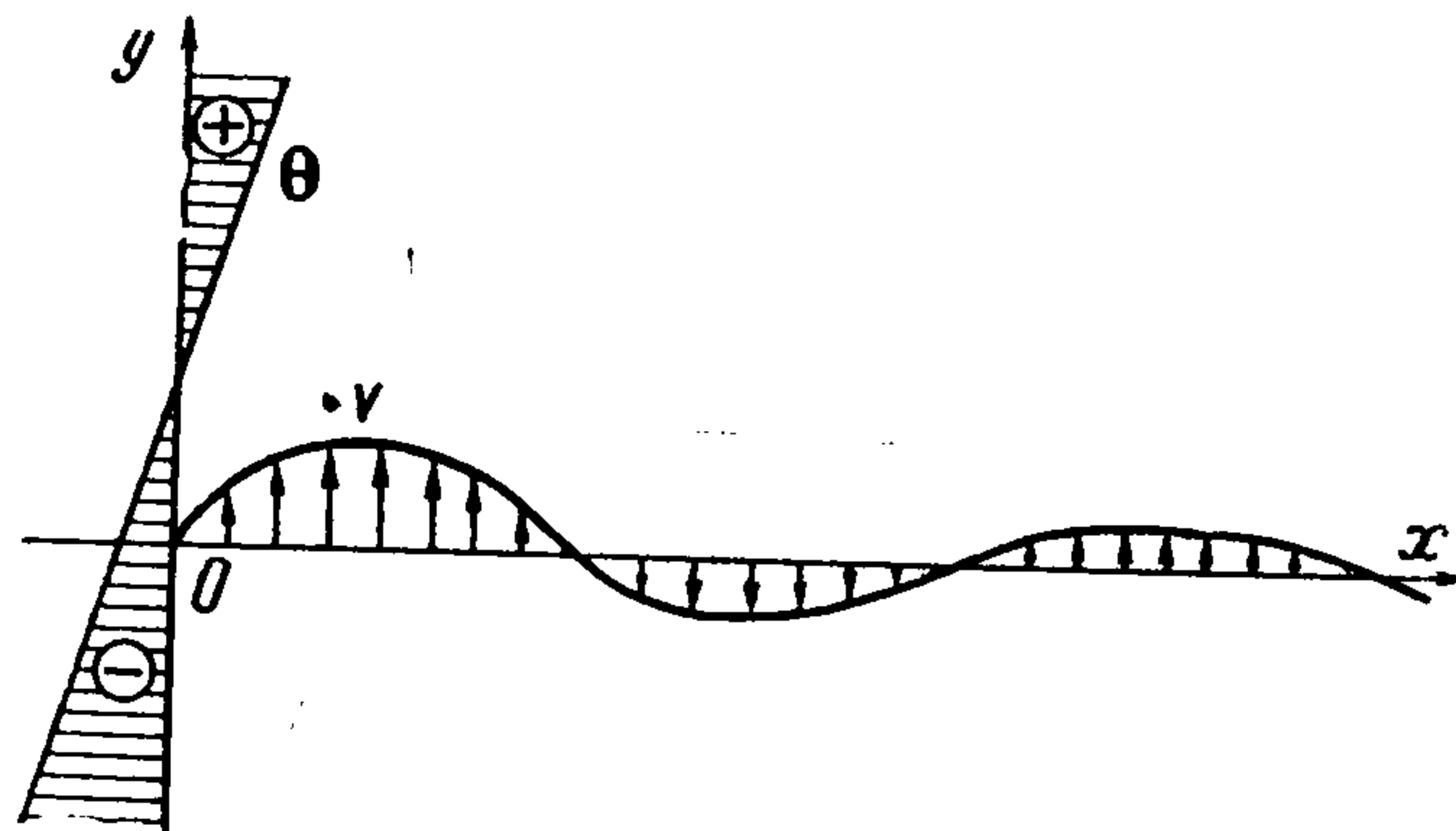
$$\begin{aligned} V &= C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x} + C_3 \sin \mu x + \\ &+ C_4 \cos \mu x \quad (\mu = \sqrt{|\omega|}) \end{aligned}$$

Здесь можно рассмотреть две задачи (ср. с [9]). Первая соответствует условиям:

$$u = v = 0, \quad \theta = \beta y \quad \text{при } x = 0, \quad u = v = 0, \quad \theta = \beta y \quad \text{при } x = L$$



Фиг. 1



Фиг. 2

При этом параметр L — ширина щели — неизвестен. Решение имеет вид

$$u = 0, \quad v = v_0 \sin \mu x, \quad \theta = \beta y + \frac{\mu^2}{\lambda} v_0 \sin \mu x \quad (2.16)$$

Ширина щели $L = k\pi / \mu$, $k = 1, 2, \dots$. Величина v_0 задает максимальное значение скорости.

Вторая задача может описывать течение вблизи «контактного разрыва». Краевые условия таковы:

$$u = 0, \quad v = v_0, \quad \theta = -\frac{\mu^2 v_0}{\lambda} + \beta y \quad \text{при } x = 0$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \theta = \beta y \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

Решение с этими краевыми условиями имеет вид (фиг. 3)

$$u = 0, \quad v = v_0 e^{-\mu x}, \quad \theta = \beta y - \frac{\mu^2 v_0}{\lambda} e^{-\mu x} \quad (2.17)$$

Если $u_0 \neq 0$, то решение также можно выписать в явном виде, однако формулы будут довольно громоздкими.

2.4.4. Случай $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Решение ищем в виде

$$u = U(\xi), \quad v = V(\xi), \quad \theta = \beta y + T(\xi) \\ p = \frac{1}{2} \lambda \beta y^2 + P(\xi), \quad (\xi = x - \alpha y)$$

Если подставить эти выражения в (1.1), то из уравнения неразрывности будет следовать первый интеграл

$$U = \alpha V + u_0 \quad (2.18)$$

Остальные уравнения с учетом этого интеграла переписутся в виде

$$\alpha u_0 V' = -P' + \alpha(1 + \alpha^2)V'', \quad u_0 V' = \alpha P' + (1 + \alpha^2)V'' + \lambda T \\ u_0 T' + \beta V = \sigma(1 + \alpha^2)T'' \quad (2.19)$$

Если константа $u_0 = 0$, то система (2.19) сводится к следующему простому уравнению для температуры:

$$T^{IV} + \frac{\lambda\beta}{\sigma(1 + \alpha^2)^3} T = 0 \quad (2.20)$$

Скорость определится из последнего уравнения системы (2.19). При $\beta < 0$ решение (2.20) исследовал Прандтль [10], изучая конвекцию над наклонной плоскостью.

2.5. Подгруппа H_5 доставляет единственное автомодельное решение. Удобно перейти к полярным координатам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad u = U \cos \varphi - V \sin \varphi, \quad v = U \sin \varphi + V \cos \varphi$$

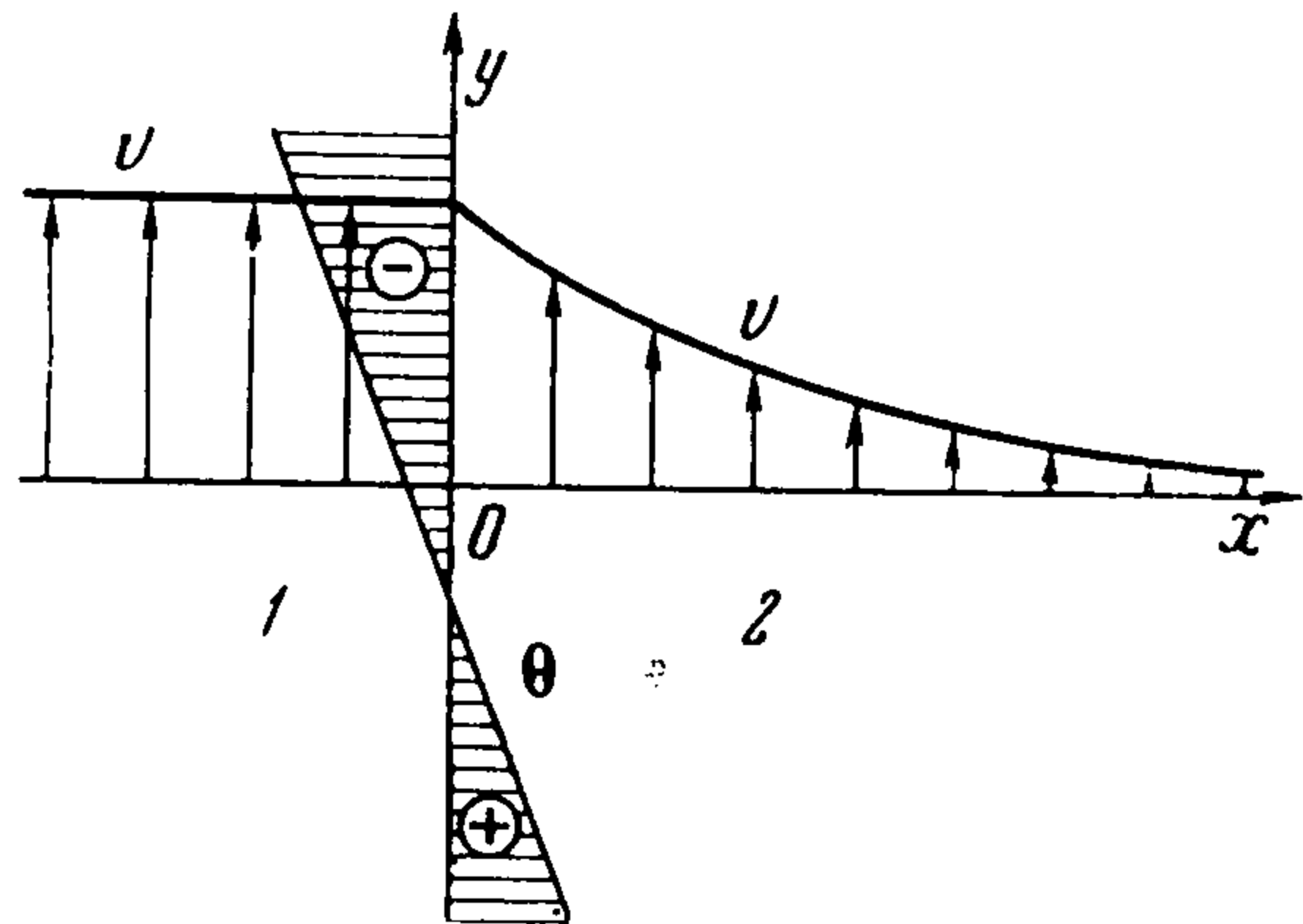
Здесь U , V — радиальная и тангенциальная составляющие вектора скорости. Решение ищется в виде

$$U = \frac{1}{r} F(\varphi), \quad V = \frac{1}{r} \Phi(\varphi), \quad p = \frac{1}{r^2} P(\varphi), \quad \theta = \frac{1}{r^3} T(\varphi) \quad (2.21)$$

Из уравнения неразрывности, записанного в полярных координатах, следует, что $\Phi = u_0$. Если $u_0 \neq 0$, то через луч $\varphi = \text{const}$ будет существовать поток газа. Для упрощения выкладок будем считать в дальнейшем $u_0 = 0$. Легко показать, что линиями тока в этом случае будут лучи $\varphi = \text{const}$.

Уравнения (1.1) записываются в полярных координатах и в них подставляется решение (2.21); после несложных выкладок приходим к системе

$$F'' + F^2 + 2P + \lambda T \sin \varphi = 0, \quad T'' + 9T = -3\sigma^{-1} FT, \quad P' = 2F' + \lambda T \cos \varphi \quad (2.22)$$



Фиг. 3

Рассмотрим следующую задачу. В вершине плоского угла, температура стенок которого различна, задан точечный источник (или сток) мощностью Q . Необходимо построить течение внутри этого угла. К системе (2.22) добавляются, следовательно, краевые условия

$$F = 0, \quad T = \theta_1 \quad \text{при } \varphi = \alpha_1 \quad (2.23)$$

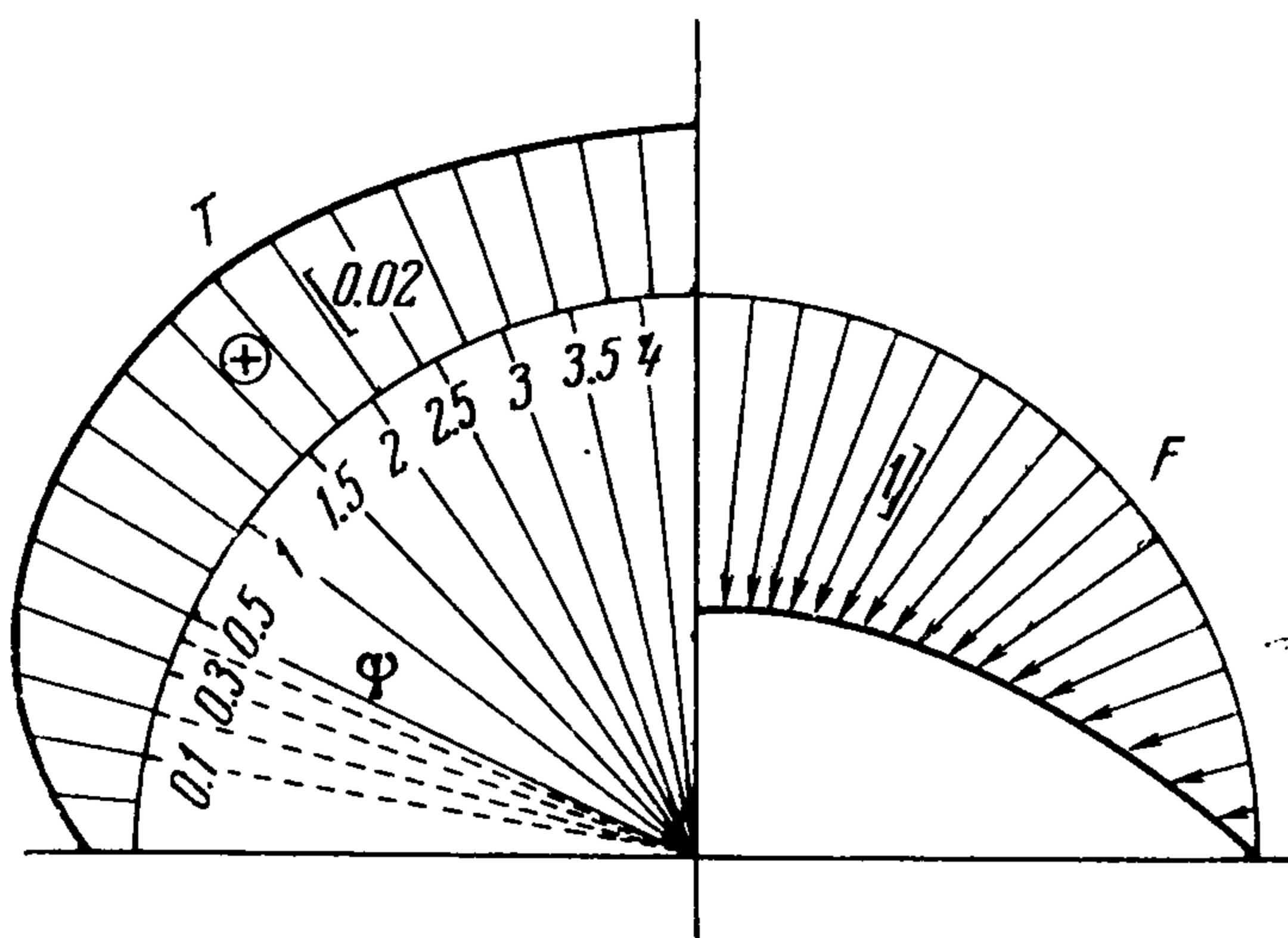
$$F = 0, \quad T = \theta_2, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} rU \, d\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F \, d\varphi = Q, \quad \text{при } \varphi = \alpha_2$$

Здесь Q — расход газа. Поставленная задача может интерпретироваться по-разному.

При $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$ и $Q > 0$ получаем задачу о горящем газовом факеле, когда

температура газа в источнике бесконечно большая. Если $\alpha_1 = -\frac{1}{2}\pi$, $\alpha_2 = \frac{3}{2}\pi$, $Q > 0$, то вместо плоского угла получаем бесконечно тонкую щель (иглу), из которой истекает газ с положительной или отрицательной температурой.

Отметим следующий факт. При $\lambda = 0$ уравнения (2.22) с краевыми условиями (2.23) описывают решение Гамеля в диффузоре [4], когда температура стенок различна. Как известно, в этом случае течение с источником существует лишь для небольших углов раствора; в случае стока решение существует всегда. По-видимому



Фиг. 4

аналогичное заключение справедливо и в отношении задачи (2.22), (2.23), однако доказательства этого утверждения получить не удалось.

Система (2.22) решалась численно с краевыми условиями (2.23) при следующих значениях параметров:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0,01, \quad \lambda = \sigma = 1, \quad Q = -8,88.$$

Счет проводился по методике, описанной в [11]: результаты приведены на фиг. 4. На правой половине фигуры дано распределение по углу радиальной скорости F ; на левой стороне в верхней части приведено распределение температуры T , а в нижней части даны линии тока. Цифры указывают на величину расхода газа через поперечное сечение. Для подсчета потока тепла через стенку необходимо иметь значение $T'(0)$; в проведенном расчете было получено $|T'(0)| = 0,113$.

При $\lambda = 0$, как уже указывалось, (2.22) описывает решение Гамеля. Заметим, что в этом случае для температуры может быть задан произвольный степенной закон $\theta = r^m T(\varphi)$.

Уравнения (1.1) приводятся к следующей системе:

$$F'' + F^2 + 2P = 0, \quad T'' + m^2 T = m\sigma^{-1} FT, \quad P = 2F + p_0 \quad (2.24)$$

где p_0 — произвольная постоянная. При $m = 0$ температура будет линейной функцией φ , а F выражается через φ неявно при помощи квадратуры.

Автор благодарен Г. З. Гершуни и Е. М. Жуховицкому за обсуждение работы и библиографию по известным точным решениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1954.
2. О в с я н н и к о в Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
3. S c h l i c h t i n g Н. Einige exakte Lösungen für die Temperaturverteilung in einer laminaren Strömung. ZAMM, 1951, vol. 31, Hft. 3.
4. С л е з к и н Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
5. L e e J. M., G i l l W. N. Heat transfer in laminar and turbulent flows between parallel plates with transverse flows. A. J. Ch. E. Journal, 1964, vol. 10, No. 6.
6. Б и р и х Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости. ПМТФ, 1966, № 3.
7. Г е р ш у н и Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. ЖТФ, 1953, т. 23, № 10.
8. К а т к о в В. Л. Одно точное решение в теории океанических течений. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1968, т. 4, № 1.
9. C h i a - S h u n Y i h. Thermal instability of viscous fluids. Quart. Appl. Math., 1959, vol. 17, No. 1.
10. П р а н д т л ь Л. Гидроаэромеханика. М., Изд. иностр. лит., 1949.
11. К а т к о в В. Л. Автомодельное решение задачи о локальном ветре. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 2.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ, ДОПУСКАЮЩЕЙ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

В. М. Ентов

(Москва)

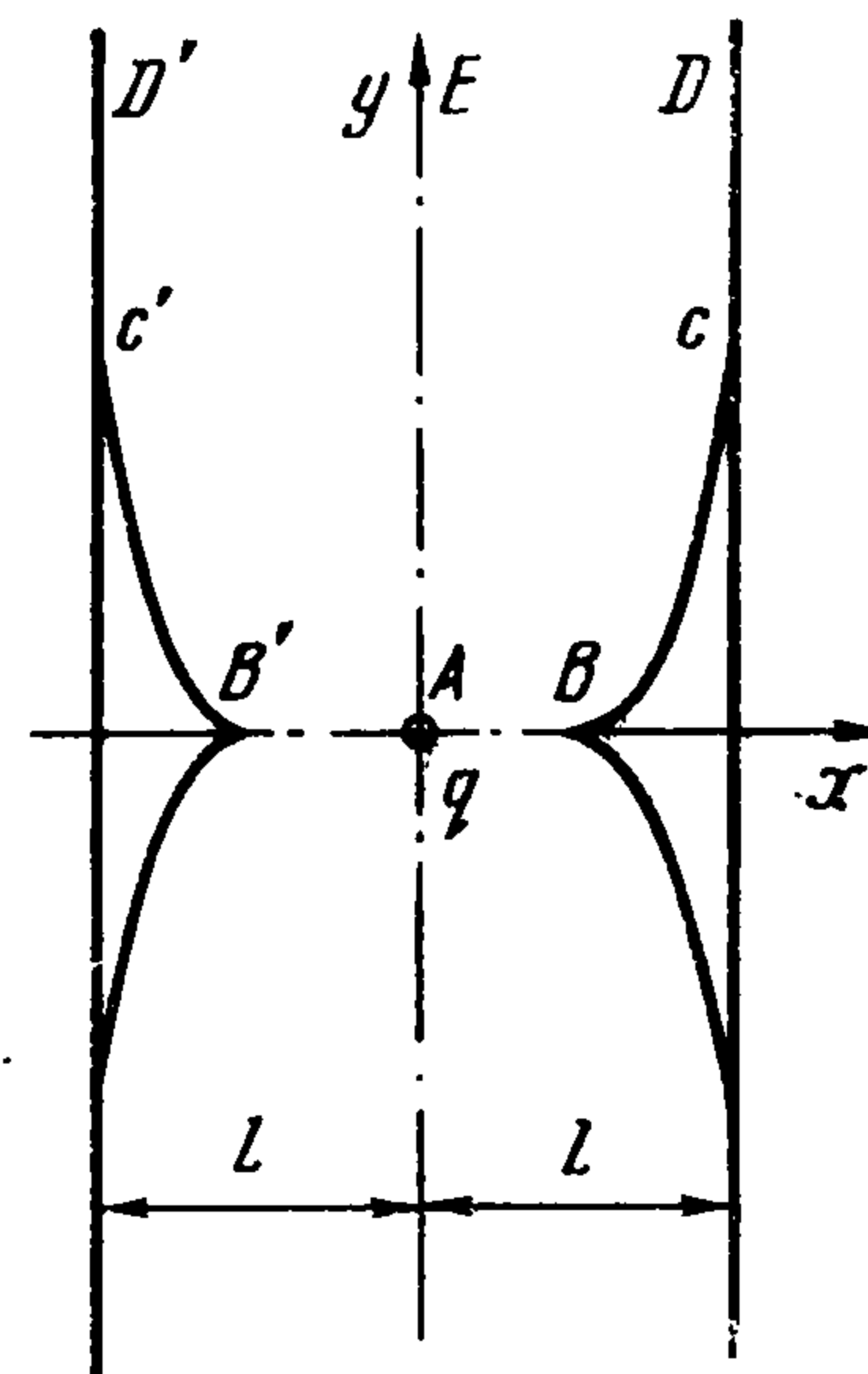
Методом интегральных преобразований строится точное решение задачи о поле бесконечного ряда источников при фильтрации с предельным градиентом. Определяется положение границы застойной зоны; результаты сопоставляются с данными приближенного решения.

1. В работе [1] показано, что ряд симметричных задач фильтрации с предельным градиентом преобразованием годографа сводится к определению функции тока ψ как решения линейного уравнения

$$w(w + \lambda) \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + (w - \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.1)$$

где w — модуль скорости фильтрации, θ — угол, составляемый ею с осью x , а λ — характерная постоянная скорость, пропорциональная величине начального градиента, при котором начинается движение.

Уравнение (1.1) в этих задачах должно быть решено в полубесконечной полосе $0 < \theta < \theta_0$, $0 < w < \infty$ с разрезом вдоль отрезка $0 < w < a$ или луча $a < w < \infty$, $\theta = \theta_1$, причем на всей границе заданы граничные значения ψ . В работе [1] рассмотрены простейшие предельные случаи с $a = 0$; построить точное решение при $a \neq 0$ в общем случае не удастся. Ниже рассмотрен частный случай, когда достаточно просто отыскивается точное решение задачи. На физической плоскости он отвечает течению от бесконечного ряда источников интенсивности q , расположенных вдоль прямой на равных расстояниях или, что равнозначно, течению от источника, расположенного между двумя непроницаемыми границами (фиг. 1); соответствующая картина в плоскости $w\theta$ показана на фиг. 2, где $a = 1/4 q/L$. В силу очевидной симметрии задачи на луче $a < w < \infty$, $\theta = 1/2\pi$ функция тока обращается в нуль, так что рассматриваемая задача равносильна первой краевой задаче для полубесконечной полосы $0 < w < \infty$,



Фиг. 1