О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СЛОЕВ ЖИДКОСТИ, СВЯЗАННЫХ ТЕПЛОВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

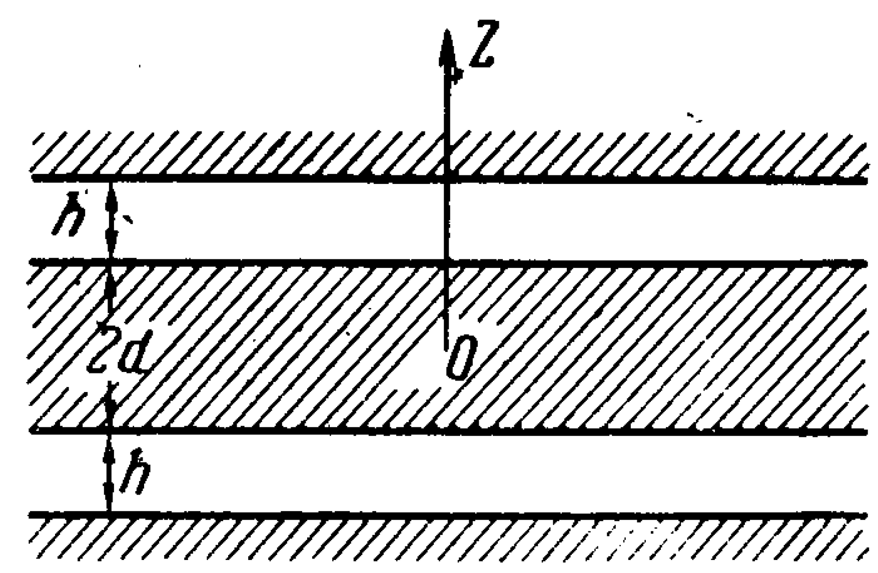
Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий

(Пермь)

Рассмотрена задача о возникновении конвекции в системе двух плоских бесконечных горизонтальных слоев жидкости, разделенных твердым теплопроводным массивом. Найдены критические значения числа Рэлея, определяющие границу устойчивости равновесия, в зависимости от расстояния между слоями и отношения теплопроводностей жидкости и массива. Показано, что тепловое взаимодействие слоев через теплопроводную прослойку приводит к понижению устойчивости.

1. Рассмотрим два плоских бесконечных горизонтальных слоя жидкости одинаковой толщины h, граничащих с однородным твердым теплопроводным массивом. Расстояние между внутренними границами слоев $2d$ (фиг. 1). Предполагается, что жидкости, заполняющие оба слоя, одинаковы по физическим параметрам и что теплопроводности внешних массивов и прослойки также одинаковы.

В состоянии равновесия скорость жидкости равна нулю, а градиенты температуры вертикальны и в каждом из слоев жидкости или массива постоянны.



Фиг. 1

Градиенты температуры в жидкости A и в массиве A_m связаны условием непрерывности вертикального теплового потока в состоянии равновесия

$$\varkappa A = \varkappa_m A_m \qquad (1.1)$$

где $\varkappa$ и $\varkappa_m$ — коэффициенты теплопроводности жидкости и массива.

Уравнения для малых возмущений можно получить обычным образом из уравнений конвекции с учетом принципа монотонности возмущений. Выбрав следующие единицы: расстояния — толщину слоя жидкости h, скорости χ / h (χ — температуропроводность жидкости), температуры Ah и давления $\rho\nu\chi / h^2$ (ρ и ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости), получим для стационарных на границе устойчивости возмущений безразмерные уравнения:

$$\nabla p = \Delta \mathbf{v} + RT\boldsymbol{\gamma} \qquad \left(R = \frac{g\beta A h^4}{\nu\chi}\right) \qquad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \Delta T = -v_z, \qquad \Delta T_m = 0 \qquad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, T и T_m — возмущения температуры жидкости и массива, p — возмущение давления; $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх. Число Рэлея R, входящее в систему (1.2), (1.3), определено через градиент температуры в жидкости, толщину слоя и параметры жидкости.

Исключая из системы (1.2), (1.3) давление и горизонтальные компоненты скорости, а также рассматривая нормальные возмущения, зависящие от горизонтальных координат по закону $\exp i(k_1 x + k_2 y)$, получим уравнения для амплитуды вертикальной скорости $v(z)$ и амплитуд возмущений температуры $\theta(z)$ и $\theta_m(z)$:

$$v^{\mathrm{IV}} - 2k^2 v'' + k^4 v = k^2 R\theta \qquad (k^2 = k_1^2 + k_2^2) \qquad (1.4)$$

$$\theta'' - k^2\theta = -v, \qquad \theta_m'' - k^2\theta_m = 0 \qquad (1.5)$$

На границе жидкость — массив исчезают все компоненты скорости, а температура и тепловой поток непрерывны. Отсюда получаем граничные условия, которые должны выполняться на внутренних и внешних границах жидких слоев

$$v = v' = 0, \qquad \theta = \theta_m, \qquad \lambda\theta' = \theta_m' \quad \text{при } z = z_1,\ z = z_2 \qquad (\lambda = \varkappa / \varkappa_m) \qquad (1.6)$$

Здесь z_1 и z_2 — внутренняя и внешняя границы слоев; $\varkappa$, $\varkappa_m$ — теплопроводности жидкости и массива.

Во внешнем массиве на бесконечности возмущения температуры исчезают

$$\theta_m \to 0 \quad \text{при } z \to \pm\infty \tag{1.7}$$

Краевая задача (1.4)—(1.7) определяет критические числа Рэлея R и соответствующие им критические возмущения.

Основному уровню неустойчивости, очевидно, соответствуют четные по z возмущения вертикальной скорости и температуры. Поэтому при рассмотрении основного уровня неустойчивости достаточно ограничиться решением задачи в области $z > 0$. Считая возмущение температуры в твердой прослойке четной функцией z.

2. Эффективное приближенное решение, описывающее основной уровень неустойчивости, можно получить с помощью метода Галеркина. Для этого аппроксимируем амплитуду вертикальной скорости $v(z)$ в соответствии с граничными условиями (1.6) следующим образом:

$$v = c\,(z - z_1)^2\,(z_2 - z)^2 \tag{2.1}$$

Здесь c — постоянный коэффициент; ввиду однородности задачи этот коэффициент остается произвольным и далее по условию нормировки положен равным единице.

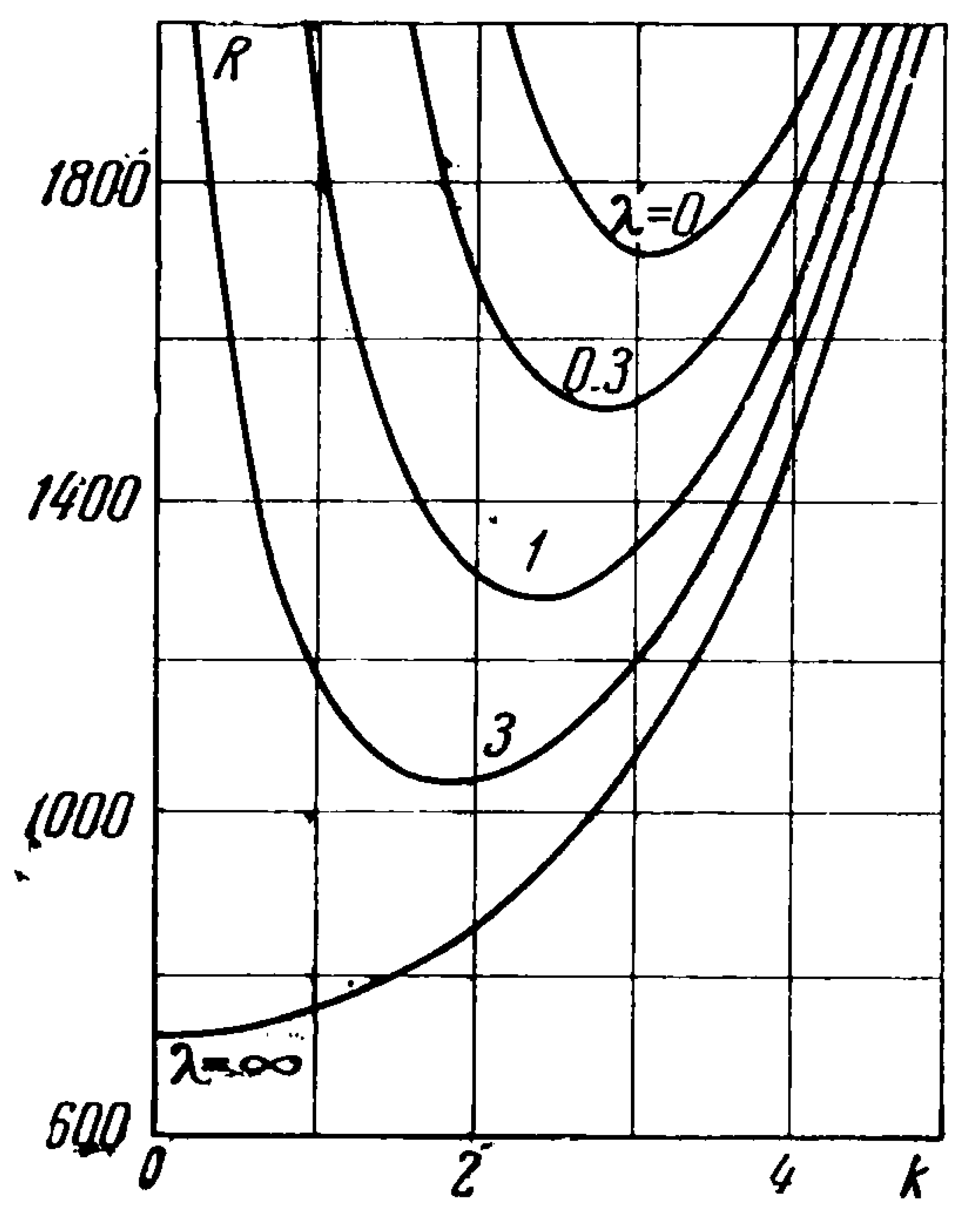
Соответствующее распределение температуры в жидкости θ, твердой прослойке θ_{m1} и внешнем массиве θ_{m2} найдем, решая уравнения теплопроводности (1.5) с заданным распределением скорости (2.1).

С учетом (1.7) решение уравнения теплопроводности для внешнего массива имеет вид

$$\theta_{m2} = Ae^{-kz} \qquad (z \geqslant z_2) \tag{2.2}$$

Распределение температуры в твердой прослойке описывается четной функцией

$$\theta_{m1} = B\,\mathrm{ch}kz \qquad (z \leqslant z_1) \tag{2.3}$$



Фиг. 2

Решение уравнения теплопроводности в области $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ дает распределение температуры в слое жидкости

$$\theta = C_1\,\mathrm{ch}ku + C_2\,\mathrm{sh}ku + k^{-6}\,[k^4u^2(1-u)^2 + 2k^2(6u^2 - 6u + 1) + 24]$$
$$(u = z - z_1) \tag{2.4}$$

Постоянные интегрирования A, B, C_1 и C_2 находятся из условий непрерывности температуры и теплового потока на внутренней $(z = z_1)$ и внешней $(z = z_2 = z_1 + 1)$ границах слоя жидкости. Приведем лишь постоянные C_1 и C_2, определяющие возмущение температуры в жидкости

$$C_1 = -\,\delta^{-1}\,[a\,(\mathrm{sh}k + \lambda\,\mathrm{ch}k)\,\mathrm{th}kz_1 + \lambda\,(a + b\,\mathrm{sh}k) + \lambda^2 b\,(1 + \mathrm{ch}k)]$$
$$C_2 = -\,\delta^{-1}\,[a\,(1 - \mathrm{ch}k)\,\mathrm{th}kz_1 + \lambda\,(b - a\mathrm{sh}k)\,\mathrm{th}kz_1 - b\lambda\,(\mathrm{ch}k + \lambda\mathrm{sh}\,k)] \tag{2.5}$$
$$\delta = (\mathrm{sh}k + \lambda\,\mathrm{ch}k)\,\mathrm{th}\,kz_1 + \lambda(\mathrm{ch}k + \lambda\mathrm{sh}\,k), \qquad a = 2k^{-6}(12 + k^2), \qquad b = 12k^{-5}$$

Подставляя распределения скорости (2.1) и температуры (2.4) в уравнение Навье — Стокса (1.4), умножая на функцию $v(z)$ и интегрируя по z в пределах от z_1 до z_2, получим соотношение, из которого находится критическое значение числа Релея

$$R = \frac{(f_1 + \lambda f_2)\,\mathrm{th}\,kz_1 + \lambda f_2 + \lambda^2 f_1}{(f_3 + \lambda f_4)\,\mathrm{th}\,kz_1 + \lambda f_4 + \lambda^2 f_5} \tag{2.6}$$

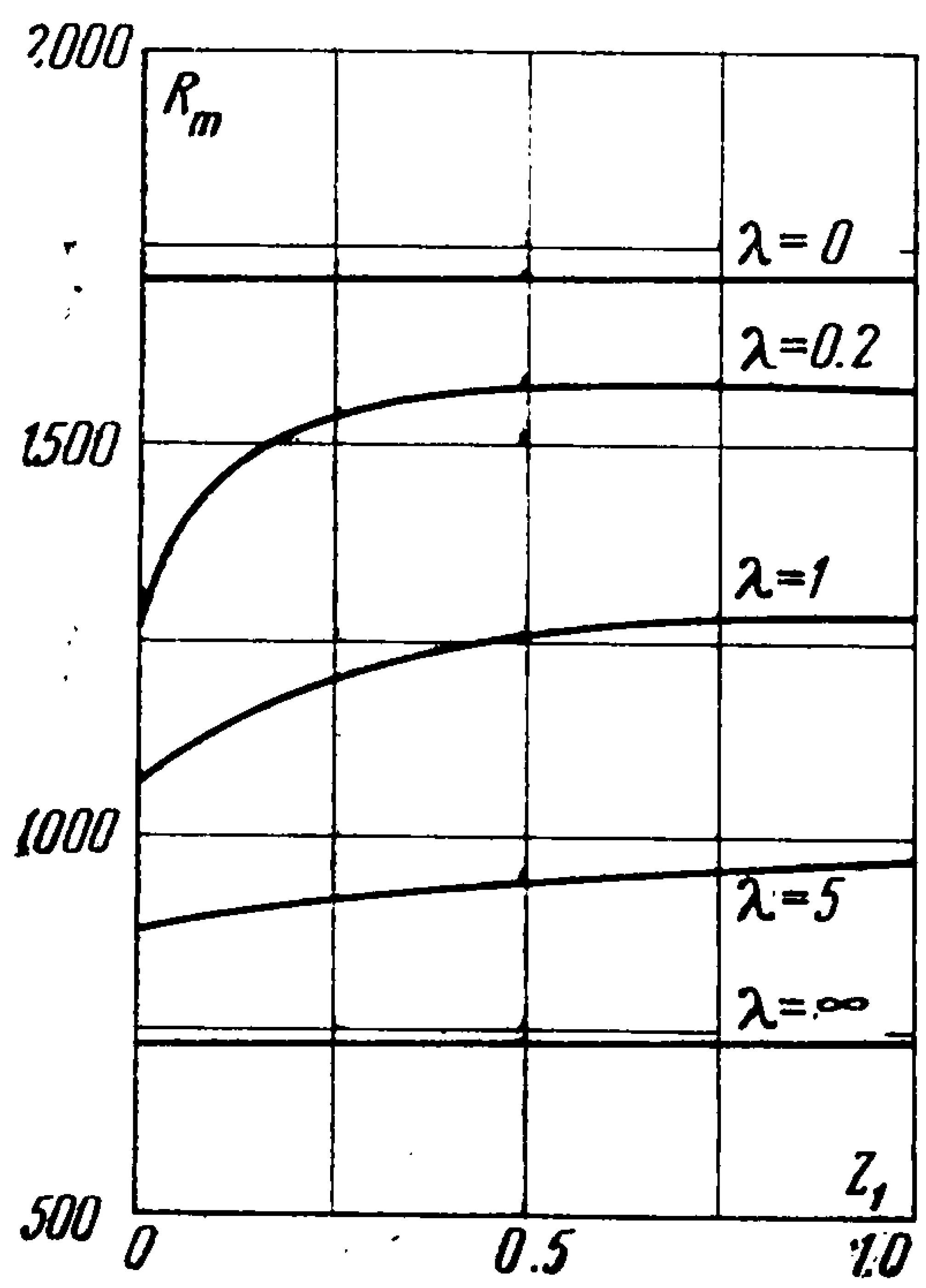
Здесь функции f_i зависят только от волнового числа k:

$$f_1 = (504 + 24k^2 + k^4)k^9, \qquad f_2 = (504 + 24k^2 + k^4)k^9\,\mathrm{cth}\,k$$
$$f_3 = (504 - 12k^2 + k^4)k^5 + 5040\,(12 + k^2)\,[6k - (12 + k^2)\,\mathrm{th}\,{}^1\!/_2\,k]$$
$$f_4 = (504 - 12k^2 + k^4)k^5\,\mathrm{cth}\,k + 2520\,[12k\,(12 + k^2)\,\mathrm{csch}\,k - (144 - 12k^2 + k^4)] \tag{2.7}$$
$$f_5 = (504 - 12k^2 + k^4)k^5 + 30240\,k\,[6k\,\mathrm{cth}\,k\,/\,2 - (12 + k^2)]$$

Формула (2.6) определяет критическое значение числа Рэлея в зависимости от трех параметров: волнового числа возмущений k, отношения теплопроводностей жидкости и массива λ и геометрического параметра z_1 ($2z_1$ — толщина твердой прослойки в единицах толщины слоя жидкости).

3. Из общей формулы (2.6) можно, прежде всего, найти критическое число Рэлея, определяющее начало конвекции в предельном случае одиночного горизонтального слоя жидкости, ограниченного сверху и снизу массивом произвольной теплопроводности. Это обобщение известной задачи Рэлея на случай твердых границ слоя, обладающих произвольной теплопроводностью, было предпринято в работах [1, 2].

Для того, чтобы перейти к случаю одиночного слоя, необходимо в (2.6) произвести предельный переход $z_1 \to \infty$, так как в случае твердой прослойки бесконечной толщины тепловое взаимодействие слоев жидкости отсутствует и слои становятся независимыми.



Фиг. 3

Полагая $z_1 \to \infty$, из (2.6) получаем

$$R = \frac{(\lambda + \operatorname{cth} {}^1\!/_2 k)\, f_1}{\lambda f_5 + (2f_4 - f_5 \operatorname{th} {}^1\!/_2 k)} \tag{3.1}$$

На фиг. 2 приведены нейтральные кривые R (k) для различных значений отношения теплопроводностей жидкости и массива, построенные по формуле (3.1). Минимальное критическое число R_m уменьшается по мере увеличения λ от значения $R_m = 1708$ при $\lambda = 0$ (массив бесконечной теплопроводности) до значения $R_m = 720$ при $\lambda = \infty$ (нетеплопроводный массив). Предельные значения R_m практически совпадают со значениями, полученными в [2] из точного характеристического соотношения.

Перейдем к обсуждению результатов вытекающих из общей формулы (2.6).

Для каждого фиксированного значения параметра z_1, определяющего расстояние между слоями жидкости, и фиксированного значения отношения теплопроводностей λ можно при помощи (2.6) построить нейтральную кривую R (k) и после минимизации найти значения R_m.

На фиг. 3 представлены полученные описанным способом зависимости минимального критического числа R_m от z_1 для нескольких значений параметра λ. Все семейство кривых располагается между линиями $R_m = 1708$ и $R_m = 720$, соответствующими предельным случаям массива бесконечной теплопроводности ($\lambda = 0$) и нетеплопроводного массива ($\lambda = \infty$). В этих предельных случаях, естественно, зависимость минимального критического числа Рэлея от толщины прослойки отсутствует. Для промежуточных значений λ критические числа R_m возрастают с увеличением z_1, стремясь при $z_1 \to \infty$ к предельным значениям, зависящим от λ (эти предельные значения совпадают, как уже отмечалось, с критическими числами Рэлея для одиночного слоя).

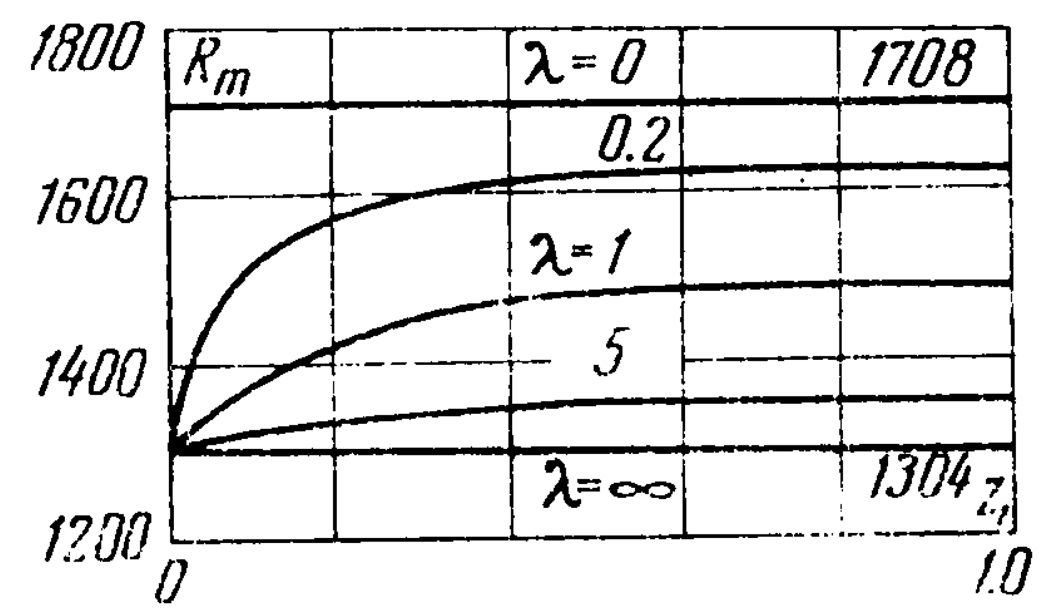
Следует отметить, что с увеличением z_1 критические числа R_m весьма быстро достигают предельных значений. Практически выход на предельные значения, соответствующие невзаимодействующим слоям, наступает уже при $z_1 > 0.5$, т. е. тогда, когда толщина твердой прослойки становится равной толщине слоя жидкости.

Критическое волновое число k_m при данном λ медленно растет с увеличением z_1. Так, для $\lambda = 1$ при увеличении z_1 от 0 до ∞ волновое число k_m изменяется от 2.0 до 2.4.

Таким образом, по мере увеличения расстояния между слоями (т. е. с ослаблением их тепловой связи) конвективная устойчивость повышается, а критическая длина волны (горизонтальный размер ячейки Бенара) уменьшается. В связи с этим заметим, что в рассмотренной ранее [3] задаче о конвективной устойчивости двух плоских вертикальных слоев жидкости имеет место противоположная ситуация — происходит уменьшение нижнего критического числа Рэлея при увеличении расстояния между слоями. Это объясняется наличием между вертикальными слоями жидкости не только тепловой связи через разделяющую их твердую прослойку, но и гидродинамической — благодаря возможному перетеканию жидкости из одного вертикального канала в другой (по этой причине удаленные вертикальные слои жидкости остаются гидродинамически связанными).

4. Рассмотренная выше задача относилась к случаю, когда твердая прослойка, разделяющая горизонтальные слои жидкости, и внешние массивы обладают одинаковой теплопроводностью.[1] Обобщение на случай разных теплопроводностей прослойки и внешних массивов приводит к весьма громоздкой формуле для критического числа Рэлея. Приведем лишь результаты, относящиеся к случаю, когда теплопроводность прослойки произвольна, а внешние массивы имеют бесконечно большую теплопроводность (в этом случае на внешних границах слоев жидкости возмущения температуры исчезают). Сохраняя аппроксимацию (2.1), получим вместо (2.6).

$$R = \frac{f_1 \operatorname{th} kz_1 + \lambda f_2}{f_3 \operatorname{th} kz_1 + \lambda f_4} \tag{4.1}$$



Фиг. 4

Здесь теперь λ — отношение теплопроводностей жидкости и прослойки, а f_i определяются по-прежнему, согласно (2.7).

Зависимость минимального $R_m(z_1)$ для различных значений параметра λ представлена на фиг. 4. Как и в рассмотренном выше случае, имеется повышение устойчивости по мере увеличения расстояния между слоями жидкости. Для случаев $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ критические числа Рэлея не зависят от расстояния между слоями. Все кривые семейства на фиг. 4 выходят при $z_1 = 0$ из одной точки (при нулевой толщине прослойки ее теплопроводность несущественна).

В пределе при $z_1 \to \infty$ получается задача об устойчивости одиночного горизонтального слоя, граничащего с одной стороны с идеально теплопроводным массивом а с другой,— с массивом произвольной теплопроводности (эта задача рассмотрена в работе [1]). При $z_1 \to \infty$ из формулы (4.1) получаем

$$R = \frac{f_1 + \lambda f_2}{f_3 + \lambda f_4} \tag{4.2}$$

Для $\lambda = \infty$ (один из массивов идеально теплопроводный, а другой — нетеплопроводный) минимальное критическое число Рэлея оказывается равным $R_m = 1304$, что весьма близко к значению 1296, найденному в [1].

Авторы приносят благодарность В. Русакову, Н. Баяндиной и Д. Шварцблату за помощь в проведении расчетов.

Поступила 29 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Sparrow E. M., Goldstein R. J., Jonsson V. K. Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary condition and nonlinear temperature profil. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, No. 4.
2. Hurle D. T. J., Jakeman E., Pike E. R. On the solution of the Bénard problem with boundaries of finite conductivity. Proc. Roy. Soc. Ser A, 1967, vol. 296, No. 1447.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Шайдуров Г. Ф. О конвективной неустойчивости жидкости в связанных вертикальных каналах. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.