

## О СООТНОШЕНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВА НАПРЯЖЕНИЙ В ТРЕХМЕРНЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев, Ю. М. Мяснянкин

(Москва — Воронеж)

Разрывные решения уравнений теории идеальной пластичности неоднократно применялись при решении многих задач плоской деформации, плоского напряженного состояния и кручения призматических стержней. Примеры использования в этих случаях разрывных решений достаточно хорошо известны [1-3].

В работе [4] исследованы соотношения на поверхности разрыва напряжений для трехмерных тел при напряженных состояниях, соответствующих ребру призмы Треска. В работе [5] показано, что на поверхности разрыва напряжений для выпуклых условий пластичности перемещения непрерывны, а скорости пластических деформаций равны нулю. Следует отметить, что известные соотношения на поверхностях разрыва напряжений были получены для статически определимых задач.

Ниже выведены соотношения на поверхностях разрыва напряжений при произвольном условии пластичности и получены следствия этих соотношений для условий пластичности Мизеса и Треска. В качестве примера рассмотрено равновесие правильной четырехгранной пирамиды.

1. Пусть в трехмерном идеально-пластическом теле существует некоторая поверхность  $G$ , на которой скорости перемещений  $u_i$ , напряжения  $\sigma_{ij}$  и скорости деформаций  $\epsilon_{ij}$ , вообще говоря, претерпевают разрыв. В дальнейшем будем рассматривать поверхности разрыва  $G$  в изотропных жестко-пластических телах. Причем ограничимся рассмотрением случая, когда с обеих сторон от  $G$  материал находится в пластическом состоянии. При этом напряжения  $\sigma_{ij}^+$  и  $\sigma_{ij}^-$  с обеих сторон от поверхности разрыва должны удовлетворять условию пластичности

$$f(\sigma_{ij}^+) = k, \quad f(\sigma_{ij}^-) = k \quad (1.1)$$

Из условий равновесия следует, что вектор напряжений на этой поверхности должен быть непрерывен, то есть

$$[\sigma_{ij}] v_j = 0, \quad [\sigma_{ij}] = \sigma_{ij}^- - \sigma_{ij}^+ \quad (1.2)$$

Здесь  $v_j$  — вектор единичной нормали к поверхности разрыва. Скорости деформаций в жесткопластическом теле связаны с напряжениями ассоциированным законом течения

$$\epsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) = \lambda (\partial f / \partial \sigma_{ij}) = \lambda f_{ij} \quad (1.3)$$

Здесь  $\lambda$  — неопределенный множитель больший нуля, запятая означает частное дифференцирование по соответствующей координате. Из (1.3) следует, что на поверхности разрыва имеет место соотношение

$$[\epsilon_{ij}] = 1/2 ([u_{i,j}] + [u_{j,i}]) = [\lambda f_{ij}] \quad (1.4)$$

Известно [7], что поверхности разрыва скоростей в несжимаемом материале совпадают с поверхностями максимального сдвига и могут иметь место при произвольном напряженном состоянии, лежащем на поверхности текучести, только при условии пластичности Треска. Для остальных условий пластичности поверхности разрыва скоростей возможны только при вполне определенных комбинациях девиатора напряжений; девиаторы напряжений должны быть непрерывны при переходе через поверхность разрыва скоростей. Из непрерывности девиаторов напряжений и условий (1.1) — (1.2) вытекает, что напряжения непрерывны на поверхности разрыва скоростей. Исключение составляют поверхности разрыва, соответствующие грани поверхности текучести Треска. В этом исключительном случае направляющие косинусы главных осей, а также максимальное и минимальное главные напряжения непрерывны при переходе через эту поверхность и только промежуточное главное напряжение может претерпевать разрыв.

В дальнейшем будем рассматривать поверхности разрыва напряжений, на которых скорости перемещений непрерывны. Из непрерывности скорости и геометрических условий совместности следует, что скачки скоростей деформаций на поверхности разрыва напряжений  $G$  могут быть представлены в виде

$$[\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2} (a_i v_j + a_j v_i), \quad a_i = [u_{i,j}] v_j \quad (1.5)$$

Выбирая каноническую систему координат  $v_1 = v_2 = 0$ ,  $v_3 = 1$  из соотношений (1.2) и (1.5) и условия несжимаемости, получим

$$[\varepsilon_{11}] = [\varepsilon_{22}] = [\varepsilon_{33}] = [\varepsilon_{12}] = 0, \quad [\sigma_{13}] = [\sigma_{23}] = [\sigma_{33}] = 0 \quad (1.6)$$

Из соотношений (1.6) следует, что

$$[\sigma_{ij}] [\varepsilon_{ij}] = 0$$

с другой стороны

$$[\sigma_{ij}] [\varepsilon_{ij}] = (\sigma_{ij}^- - \sigma_{ij}^+) \varepsilon_{ij}^- + (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) \varepsilon_{ij}^+ \geq 0 \quad (1.7)$$

Для выпуклых поверхностей текучести правая часть уравнения (1.7) обращается в нуль только при  $\sigma_{ij}^- = \sigma_{ij}^+$  или при  $\varepsilon_{ij}^- = \varepsilon_{ij}^+ = 0$ . Следовательно, для выпуклых поверхностей текучести на поверхности разрыва напряжений  $G$  скорости деформаций обращаются в нуль.

Соотношения (1.1) и (1.2) не определяют всех ограничений, которые следует наложить на напряженное состояние на поверхности  $G$ . Для определения оставшихся соотношений следует использовать ассоциированный закон течения (1.3). Предварительно рассмотрим частный случай, когда  $\sigma_{ij}^-$  и  $\sigma_{ij}^+$  попадают на плоский участок поверхности текучести. В этом случае правая часть соотношения (1.7) тождественно равна нулю и скорости деформаций могут претерпевать разрыв.

Из соотношений (1.4) и (1.5) имеем

$$\frac{1}{2} (a_i v_j + a_j v_i) = [\lambda f_{ij}] \quad (1.8)$$

Приравнявая в (1.8) индексы  $i$  и  $j$ , для несжимаемых тел получаем

$$a_i v_i = [\lambda f_{ii}] = 0 \quad (1.9)$$

Умножая равенства (1.8) на  $v_j$  и учитывая (1.9), имеем

$$a_i = 2 [\lambda f_{ij}] v_j \quad (1.10)$$

Исключая из соотношений (1.8) величины  $a_i$ , при помощи равенства (1.10) имеем

$$[\lambda f_{il}] v_l v_j + [\lambda f_{jl}] v_l v_i = [\lambda f_{ij}] \quad (1.11)$$

Среди шести соотношений (1.11) независимых только три, так как после свертки с тензором Кронеккера  $\delta_{ij}$  и  $v_i$  эти уравнения преобразуются к одному виду.

Три независимых соотношения (1.11) вместе с (1.1), (1.2) образуют замкнутую систему уравнения для определения  $\lambda^-/\lambda^+$  и  $\sigma_{ij}^-$ , если  $\sigma_{ij}^+$  и положение поверхности разрыва  $G$  известны, причем  $\lambda^-/\lambda^+$  должно быть положительным.

Покажем, что соотношения (1.11) имеют место и на поверхностях разрыва напряжений, на которых скорости деформаций  $\varepsilon_{ij}^-$  и  $\varepsilon_{ij}^+$  обращаются в нуль. Однако при этом под величиной  $\lambda$  следует понимать некоторую неизвестную величину, отличную от множителя в ассоциированном законе течения. Смысл этой величины будет очевиден при дальнейшем изложении.

Отметим, что если  $\varepsilon_{ij}^- = \varepsilon_{ij}^+ = 0$  на поверхности  $G$ , то из ассоциированного закона течения (1.3) следует, что  $\lambda^+ = \lambda^- = 0$ , при этом соотношения (1.8) и (1.11) обращаются в тождества, а из (1.10) следует, что  $a_i = 0$ . Следовательно, скорости и их первые производные непрерывны на поверхности разрыва напряжений.

Для определения ограничений, которые накладывает ассоциированный закон течения на величины  $\sigma_{ij}^+$  и  $\sigma_{ij}^-$ , в этом случае соотношения (1.8) следует продифференцировать по некоторому направлению  $x_l$ , не касающемуся поверхности разрыва  $G$ .

При этом, так как  $\lambda^+ = \lambda^- = 0$  на поверхности  $G$ , то имеем

$$[\varepsilon_{ij, l}] = [\lambda_{, l} f_{ij}] \quad (1.12)$$

Геометрические условия совместности второго порядка для величин  $u_i$ , непрерывных вместе с первыми производными, имеют вид

$$[u_{i, jl}] = b_i v_j v_l, \quad b_i = [u_{i, mn}] v_m v_n \quad (1.13)$$

Используя (1.13), из соотношений (1.12) получаем

$$b_i v_l v_j + b_j v_l v_i = 2 [\lambda_{, l} f_{ij}] \quad (1.14)$$

Сравнивая соотношения (1.8) и (1.14), легко видеть, что они совпадут, если величины  $b_i v_l$  и  $\lambda_{, l}$  заменить на  $a_i$  и  $\lambda$  соответственно. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае на поверхности разрыва будут иметь место соотношения, аналогичные (1.11) и все выводы, следующие из них, справедливы.

Если первые производные скоростей деформаций также равны нулю на поверхности разрыва напряжений, то  $\lambda_{, l} = 0$ , а соотношения (1.14) обратятся в тождество. В этом случае ассоциированный закон течения (1.3) следует дифференцировать дважды и, повторяя все рассуждения, снова получим, что уравнения, аналогичные (1.11) имеют место на поверхности разрыва напряжений. Если вторые производные от  $\varepsilon_{ij}$  обращаются в нуль, то дифференцирование следует провести три раза и т. д.

Все производные от  $\varepsilon_{ij}$  в нуль обратиться не могут, так как тогда  $\varepsilon_{ij} = 0$  в области пластического течения, поэтому уравнения (1.11) будут дополнительными ограничениями на величины  $\sigma_{ij}^-$  и  $\sigma_{ij}^+$  при любом невогнутом условии пластичности. Отметим, что величины  $\lambda^+$  и  $\lambda^-$  положительны в окрестности поверхности разрыва, поэтому первый член разложения величин  $\lambda^+$  и  $\lambda^-$  в ряде Тейлора по  $x_l$  должен быть положительным, откуда следует, что отношение  $\lambda^-/\lambda^+$  должно иметь знак  $(-1)^n$ , где  $n$  — число дифференцирований, необходимых для получения уравнений (1.11).

В канонической системе координат  $v_1 = v_2 = 0$ ,  $v_3 = 1$  соотношения на поверхности разрыва напряжений (1.1), (1.2) и (1.11) упрощаются и имеют вид:

$$[\sigma_{i3}] = 0, \quad [f(\sigma_{ij})] = 0, \quad [\lambda'_{11}] = [\lambda'_{22}] = [\lambda'_{12}] = 0 \quad (1.15)$$

2. Рассмотрим следствия соотношений (1.15) для условия пластичности Мизеса

$$f(\sigma_{ij}) = s_{ij} s_{ij} = k^2$$

В этом случае соотношения (1.15) принимают вид:

$$[\sigma_{i3}] = 0, \quad [s_{ij} s_{ij}] = 0, \quad [\lambda s_{11}] = [\lambda s_{22}] = [\lambda s_{12}] = 0 \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует

$$\{1 - (\lambda^-/\lambda^+)^2\} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2) = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) будет удовлетворяться, если имеет место одно из условий

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = s_{13} = 0, \quad \lambda^+ = \lambda^-, \quad \lambda^+ = -\lambda^-$$

В первых двух случаях из (2.1) следует непрерывность напряжений. Таким образом, на поверхности разрыва напряжений  $\lambda^+ = -\lambda^-$ . При этом из (2.1) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^- &= 2\sigma_{33}^+ - \sigma_{11}^+, & \sigma_{22}^- &= 2\sigma_{33}^+ - \sigma_{22}^+, & \sigma_{33}^- &= \sigma_{33}^+ \\ \tau_{12}^- &= -\tau_{12}^+, & \tau_{13}^- &= \tau_{13}^+, & \tau_{23}^- &= \tau_{23}^+ \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если  $l_i$ ,  $m_i$ ,  $n_i$  — направляющие косинусы главных осей тензора напряжений, то

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и учитывая, что

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij} \quad (2.5)$$

получаем систему двенадцати уравнений для определения  $\sigma_1^-$ ,  $\sigma_2^-$ ,  $\sigma_3^-$ ,  $l_i^-$ ,  $m_i^-$ ,  $n_i^-$ .

Решение этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1^- &= 2\sigma_{33} - \sigma_1^+, & \sigma_2^- &= 2\sigma_{33} - \sigma_2^+, & \sigma_3^- &= 2\sigma_{33} - \sigma_3^+ \\ l_1^- &= \pm l_1^+, & m_1^- &= \pm m_1^+, & n_1^- &= \mp n_1^+ \\ l_2^- &= \pm l_2^+, & m_2^- &= \pm m_2^+, & n_2^- &= \mp n_2^+ \\ l_3^- &= \mp l_3^+, & m_3^- &= \mp m_3^+, & n_3^- &= \pm n_3^+ \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из соотношений (2.6) следует, что одноименные главные оси равнонаклонены к поверхности разрыва  $G$  и лежат в одной плоскости с нормалью к этой поверхности. Девiatorные компоненты главных напряжений имеют противоположные знаки, следовательно, напряженное состояние по разные стороны от поверхности разрыва  $G$  соответствует диаметрально противоположным точкам кривой текучести в девiatorной плоскости.

3. Несколько усложняется анализ соотношений (1.15) при условии пластичности Треска. Пусть главные напряжения занумерованы так, что  $\sigma_1$  является промежуточным между  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , тогда условие пластичности имеет вид

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \pm 2k \quad (3.1)$$

Из соотношений (1.15), (2.4), (2.5) следует, что

$$\begin{aligned} [\sigma_{33}] &= [\sigma_1 l_3^2 + \sigma_2 m_3^2 + \sigma_3 n_3^2] = 0, & [\sigma_{13}] &= [\sigma_1 l_1 l_3 + \sigma_2 m_1 m_3 + \sigma_3 n_1 n_3] = 0 \\ [\sigma_{23}] &= [\sigma_1 l_2 l_3 + \sigma_2 m_2 m_3 + \sigma_3 n_2 n_3] = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon_{11}] &= [\lambda(m_1^2 - n_1^2)] = 0, & [\varepsilon_{22}] &= [\lambda(m_2^2 - n_2^2)] = 0 \\ [\varepsilon_{12}] &= [\lambda(m_1 m_2 - n_1 n_2)] = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Соотношения (3.1) — (3.3) инвариантны относительно вращения системы координат вокруг третьей оси. Произведем поворот координат так, чтобы  $\sigma_{13}^+$  обратилось в нуль, тогда из (3.2) следует, что и  $\sigma_{13}^- = 0$ . Учитывая это, из (3.1) — (3.2) получаем

$$\frac{m_3^+ n_3^+}{l_1^+} = \frac{m_3^- n_3^-}{l_1^-} \quad (3.4)$$

Уравнения (3.3), после исключения из них отношения  $\lambda^- / \lambda^+$ , будут выполнены тогда и только тогда, если имеют место равенства

$$\frac{m_1^- - n_1^-}{m_2^- - n_2^-} = \frac{m_1^+ - n_1^+}{m_2^+ - n_2^+}, \quad \frac{m_1^- + n_1^-}{m_2^- + n_2^-} = \frac{m_1^+ + n_1^+}{m_2^+ + n_2^+} \quad (3.5)$$

или

$$\frac{m_1^- - n_1^-}{m_2^- - n_2^-} = \frac{m_1^+ + n_1^+}{m_2^+ + n_2^+}, \quad \frac{m_1^- + n_1^-}{m_2^- + n_2^-} = \frac{m_1^+ - n_1^+}{m_2^+ - n_2^+} \quad (3.6)$$

Соотношения (3.4) — (3.5) будут удовлетворены, если положить

$$l_i^- = \pm l_i^+, \quad m_i^- = \pm m_i^+, \quad n_i^- = \pm n_i^+ \quad (3.7)$$

а системе (3.2, 3.4, 3.6) соответствует решение (2.6).

Покажем, что других решений система уравнений (3.1, 3.2, 3.3) не имеет. Для этого произведем поворот системы координат так, чтобы

$$[\varepsilon_{13}] = [\lambda(m_1 m_3 - n_1 n_3)] = 0 \quad (3.8)$$

Из соотношений (3.3, 3.8) при этом следует, что выполняются равенства

$$\frac{m_1^- + n_1^-}{m_3^- + n_3^-} = \frac{m_1^+ + n_1^+}{m_3^+ + n_3^+}, \quad \frac{m_1^- - n_1^-}{m_3^- - n_3^-} = \frac{m_1^+ - n_1^+}{m_3^+ - n_3^+} \quad (3.9)$$

или

$$\frac{m_1^- - n_1^-}{m_3^- - n_3^-} = \frac{m_1^+ + n_1^+}{m_3^+ + n_3^+}, \quad \frac{m_1^- + n_1^-}{m_3^- + n_3^-} = \frac{m_1^+ - n_1^+}{m_3^+ - n_3^+} \quad (3.10)$$

Так как (2.6) и (3.7) являются решениями системы (3.1), (3.3), то они должны сохраняться и в комбинациях соотношений (3.3), (3.9), (3.10). Для этого необходимо, чтобы при рассмотренном повороте системы координат имело место равенство

$$(m_1 n_3 - m_3 n_1)(m_1 m_3 - n_1 n_3) = 0 \quad (3.11)$$

Удовлетворяя соотношению (3.11), убеждаемся, что система уравнений (3.1) — (3.3) имеет только два решения (2.6) и (3.7). Анализ решения (2.6) был проведен выше. При условии пластичности Треска из него следуют те же выводы, что при условии пластичности Мизеса. Поэтому проведем только анализ следствий соотношения (3.7).

Так как по решению (3.7) направляющие косинусы непрерывны на поверхности разрыва, то система (3.2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} [\sigma_1] l_3^2 + [\sigma_2] m_3^2 + [\sigma_3] n_3^2 &= 0 \\ [\sigma_1] l_1 l_3 + [\sigma_2] m_1 m_3 + [\sigma_3] n_1 n_3 &= 0 \\ [\sigma_1] l_2 l_3 + [\sigma_2] m_2 m_3 + [\sigma_3] n_2 n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Система уравнений (3.12) имеет нетривиальное решение, если в

$$l_3 m_3 n_3 = 0 \quad (3.13)$$

то есть одна или две главные оси лежат в плоскости касательной к поверхности разрыва. Анализ соотношений (3.1), (3.12), (3.13) приводит к системе решений

$$l_3 = 0, \quad m_3 \neq 0, \quad n_3 \neq 0, \quad [\sigma_2] = [\sigma_3] = 0, \quad [\sigma_1] \neq 0 \quad (3.14)$$

$$l_3 \neq 0, \quad m_3 = 0, \quad n_3 \neq 0, \quad [\sigma_1] = [\sigma_3] = 0, \quad [\sigma_2] = \pm 4k \quad (3.15)$$

$$l_3 = m_3 = 0, \quad n_3 = 1, \quad [\sigma_3] = [\sigma_2] = 0, \quad [\sigma_1] \neq 0 \quad (3.16)$$

$$l_3 = m_3 = 0, \quad n_3 = 1, \quad [\sigma_3] = 0, \quad [\sigma_2] = \pm 4k, \quad [\sigma_1] \neq 0 \quad (3.17)$$

$$m_3 = n_3 = 0, \quad l_3 = 1, \quad [\sigma_1] = 0, \quad [\sigma_2] = [\sigma_3] \neq 0 \quad (3.18)$$

$$m_3 = n_3 = 0, \quad l_3 = 1, \quad [\sigma_1] = 0, \quad [\sigma_2] = [\sigma_3] \pm 4k \quad (3.19)$$

Причем решения (3.15), (3.17), (3.19) имеют место, если точки, изображающие напряженные состояния по обе стороны от поверхности разрыва напряжений, находятся на противоположных гранях условия текучести. Решения (3.16), (3.18) соответствуют одной грани условия текучести.

Заметим, что на грани Треска, когда направляющие косинусы главных напряжений непрерывны, возможен разрыв скоростей пластических деформаций; при этом уравнения (3.1) — (3.3) будут удовлетворены.

Анализ возможных поверхностей разрыва напряжений при напряженном состоянии, соответствующем ребру призмы Треска, был подробно проведен в работах [4,6]. В последнем случае соотношения теории идеальной пластичности статически определимы и уравнения (1.11) не накладывают никаких ограничений на возможные скачки напряжений. Результаты работы [4] находятся в соответствии с соотношениями (2.6).

В заключение покажем, что соотношения (2.6) будут иметь место на поверхности разрыва напряжений для случая несжимаемого нормального изотропного тела, т. е. изотропного тела, в котором при перемене знака у дивергента напряжений условие пластичности не изменяется.

В этом случае соотношения (1.15) можно записать в виде

$$[\sigma_1 l_i l_3 + \sigma_2 m_i m_3 + \sigma_3 n_i n_3] = 0, \quad [i (|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)] = 0$$

$$\left[ \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} l_1^2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} m_1^2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} n_1^2 \right) \right] = 0 \quad (3.20)$$

$$\left[ \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} l_1 l_2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} m_1 m_2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} n_1 n_2 \right) \right] = 0$$

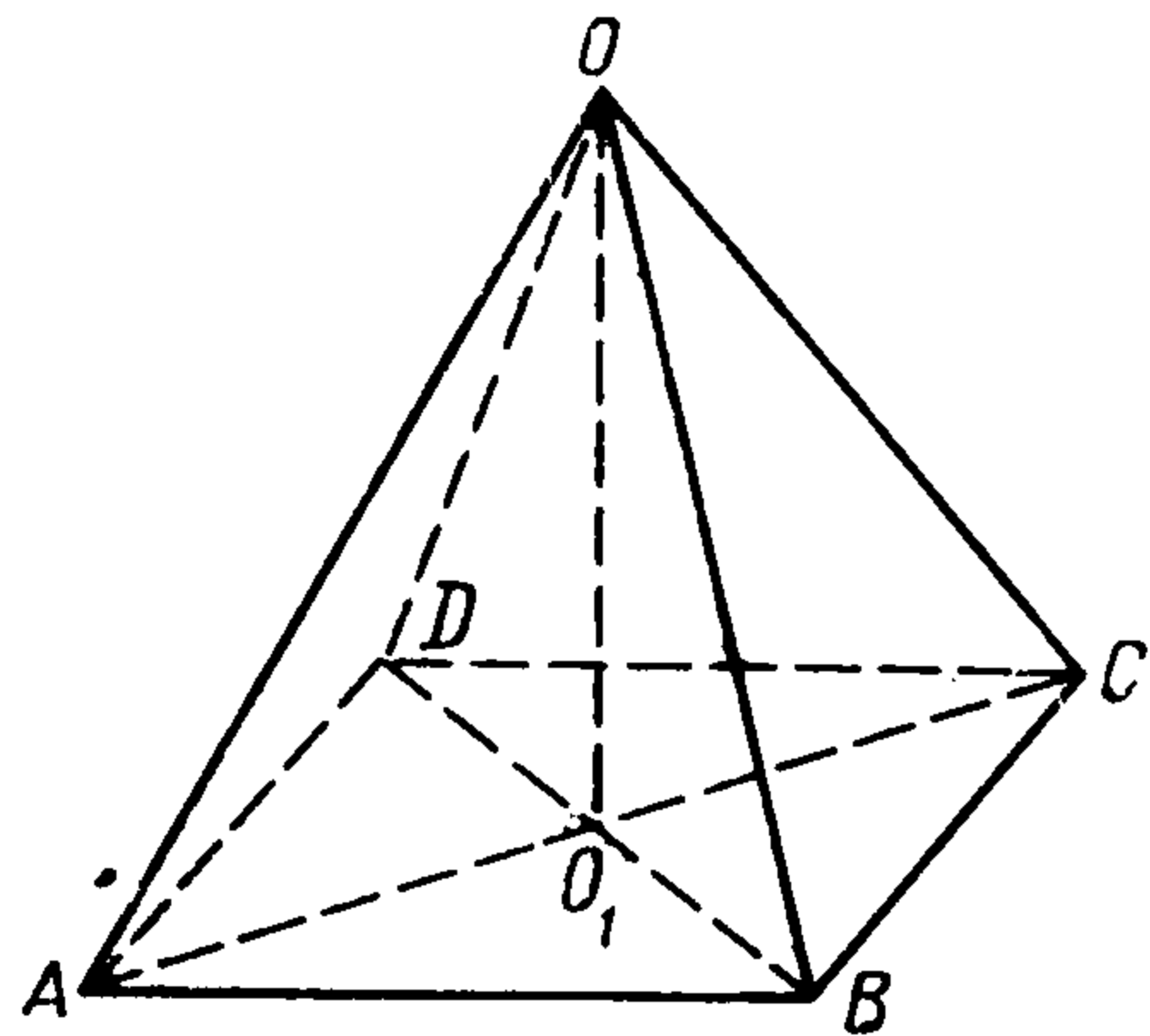
$$\left[ \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} l_2^2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} m_2^2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} n_2^2 \right) \right] = 0$$

Заметим, что если  $\sigma_i^- = -\sigma_i^+$ , то

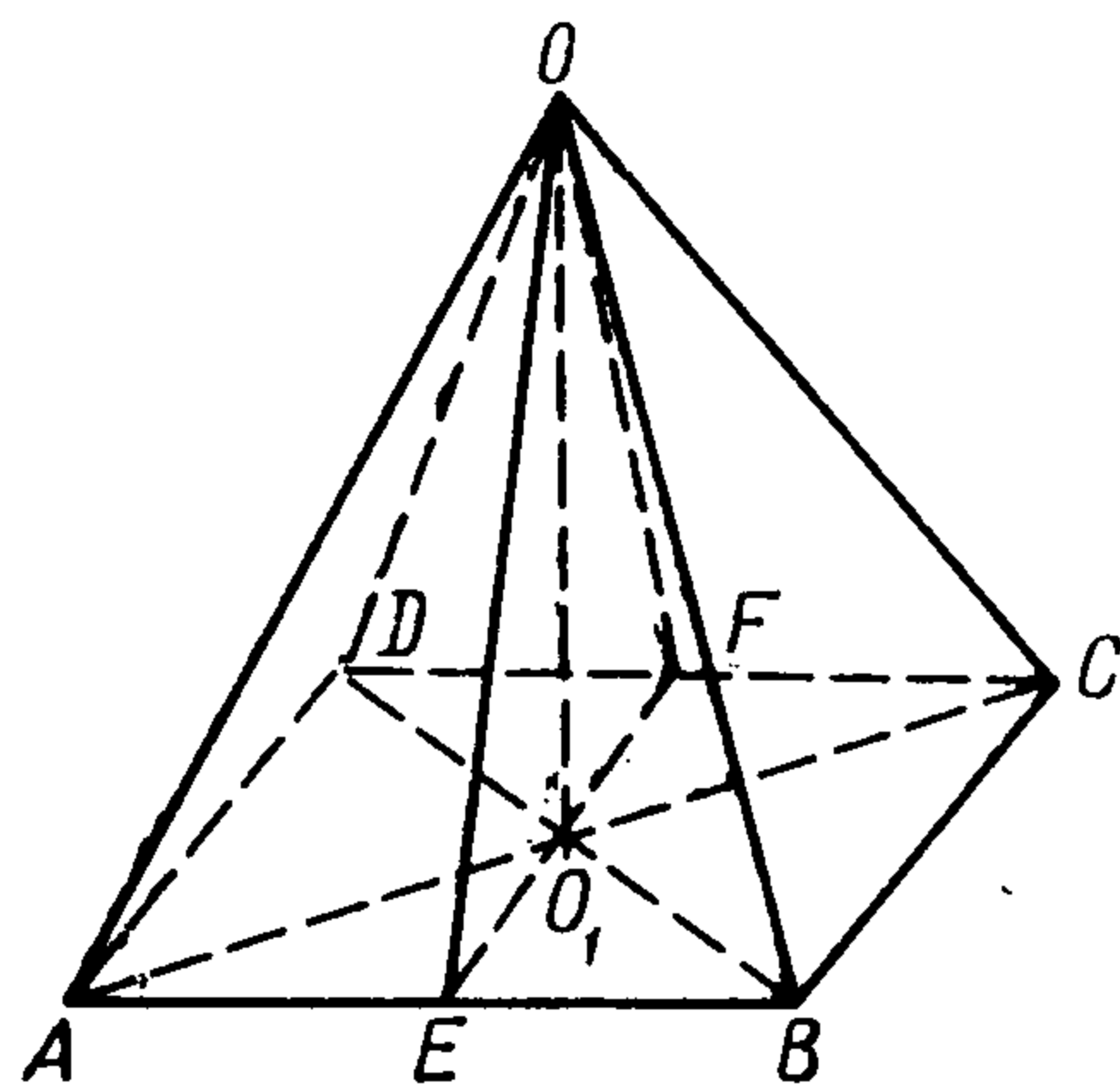
$$(\partial f / \partial \sigma_i)^- = -(\partial f / \partial \sigma_i)^+$$

и соотношения (2.6) удовлетворяют системе (3.20).

4. В качестве примера рассмотрим равновесие правильной четырехгранной пирамиды (фигура). Предположим, что по граням  $BCO$  и  $DOA$  действует нормальное давление  $p$ , а грани  $AOB$  и  $DOC$  свободны от нагрузок. Примем плоскости  $AOC$  и  $DOB$  за поверхности разрыва напряжений и рассмотрим две соседние области  $O_1OCB$  и  $AOO_1B$ . Предположим, что в этих зонах реализуется равномерное напряженное состояние. Пусть в области  $AOO_1B$  величина  $\sigma_3 = 0$ , а в области  $COO_1B$  —  $\sigma_3 = p$ . Полагаем, что напряженное состояние пирамиды удовлетворяет грани призма Треска (3.1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Косинусы углов между главными осями в области  $AOO_1B$  и нормально к плоскости  $OO_1B$  имеют вид

$$l = 1/\sqrt{2}, \quad m = 1/2 \sqrt{2} \sin \gamma, \quad n = 1/2 \sqrt{2} \cos \gamma \quad (4.1)$$

Здесь  $2\gamma$  — угол между гранями  $AOB$  и  $DOC$ .

Используя соотношения (2.6, 3.1, 4.1) для предельного давления, получаем выражение

$$p = \sigma_1 - 2k \sin^2 \gamma$$

Максимальное давление будет при  $\sigma_1 = -2k$  и равно

$$p_{\max} = -2k(1 + \sin^2 \gamma)$$

что совпадает с формулой, полученной в работе [4].

При условии пластичности Мизеса максимальное предельное давление  $p$  равно

$$p = -2/3 \sqrt{3} k \sqrt{(1 + \sin^2 \gamma)^2 + 3}$$

Предположим, что нормальное давление действует только на грани  $OBC$ , а грани  $ABO$ ,  $DOC$  и  $AOD$  свободны от нагрузок (фиг. 2). В качестве поверхностей разрыва напряжений примем плоскости  $ACO$ ,  $DOB$  и  $EOF$ . Полагая, как и выше, что во всех зонах реализуется равномерное напряженное состояние, удовлетворяющее грани призма Треска, получим, что на поверхности разрыва  $EOF$ , направляющие косинусы главных осей непрерывны. Из соотношений (2.6), (3.1), (3.17), (4.1) для предельного давления получаем выражение  $p = -4k \sin^2 \gamma$ .

Поступила 9 V 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, М., — Л., 1950.
2. Hill R. The mathematical theory of plasticity, Oxford, 1950. (Рус. пер.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехиздат, 1956.)
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
4. Ивлев Д. Д. О разрывных решениях пространственных задач теории идеальной пластичности. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
5. Hill R. Discontinuity relations in mechanics of solids Progress in Solid Mechanics, 1961, vol. 11, pp. 247—276. (Русск. пер.: Р. Хилл. Соотношения на разрывах в механике, деформируемых твердых тел. Сб. пер.; «Механика», Изд-во иностр. лит., 1963, № 3, стр. 117—142).
6. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. «Наука». 1966.
7. Быковцев Г. И., Мяснянкин Ю. М. О поверхностях скольжения в трехмерных жестко-пластических телах. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 6.