ЛИТЕРАТУРА

1. Куршин Л. М., Фильштинский Л. А. Определение приведенного модуля изотропной плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 6.
2. Фильштинский Л. А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Надаи А. Пластичность, М.— Л., Гостехиздат, 1936.
4. Галин Л. А. Плоская упруго-пластическая задача, ПММ, 1946, т. 10, вып. 3.
5. Космодамианский А. С. Упруго-пластическая задача для изотропного массива, ослабленного бесконечным рядом одинаковых круговых выработок. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4.
6. Мусхелишвили Н. Л. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. М., «Наука», 1966.

АСИМПТОТИКА ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОМ СОУДАРЕНИИ СТЕРЖНЕЙ

М. А. Малков (Москва)

В работе приведено решение двумерной плоской задачи об упругом соударении полубесконечных стержней, справедливое для любого времени t с момента соударения, и исследуется поведение этого решения при $t \to \infty$. Результаты исследования обосновывают применимость одномерного приближения к задачам об ударе.

Пусть два плоских полубесконечных стержня движутся вдоль оси y навстречу один другому с одинаковой скоростью v. В момент столкновения один из стержней занимает пространство $y > 0$, $|x| < h$; другой — пространство $y < 0$, $|x| < h$, где h — полутолщина стержней.

Скорости распространения продольных (a) и поперечных (b) волн в одном из стержней считаются равными соответствующим скоростям в другом стержне.

Решение задачи ищется в виде функции объемных деформаций Δ и вихревой функции ω, где Δ — дивергенция вектора смещения, ω — ротор этого вектора.

Функции Δ и ω должны удовлетворять волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Delta}{\partial y^2}\right), \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = b^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)$$

начальным условиям при $t = 0$:

$$\Delta = \omega = \frac{\partial\omega}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial t} = -2\frac{v}{a}\delta(y)$$

и краевым условиям на боковых поверхностях стержней $|x| = h$:

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2} + (1-\beta^2)\frac{\partial^2\Delta}{\partial y^2} - 2\beta^4\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad 2\frac{\partial^2\Delta}{\partial x\,\partial y} + \beta^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \left(\beta = \frac{b}{a}\right)$$

где $\beta = b/a$.

Эти соотношения получены путем двукратного дифференцирования по времени краевых условий, выраженных через компоненты вектора смещения, и исключения полученных производных по t при помощи уравнений движения упругих тел.

Как следует из начальных условий, прямая $y = 0$ является линией разрыва. При $t > 0$ распад этого разрыва приводит к возникновению продольной волны ($|y| < at$) и двух волн разгрузки от боковых поверхностей стержней ($|x| < h - \sqrt{a^2t^2 - y^2}$). При $t > 2h/a$ волны разгрузки достигают противоположных боковых поверхностей и возникают отраженные волны, число которых с течением времени быстро растет.

Общее решение представляется в виде суммы всех волн

$$\Delta(x, y, t) = \Delta_0(x, y, t) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}[\Delta_{nk}^{+}(x, y, t) + \Delta_{nk}^{-}(x, y, t)]$$

$$\omega(x, y, t) = \omega_0(x, y, t) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}[\omega_{nk}^{+}(x, y, t) + \omega_{nk}^{-}(x, y, t)]$$

При этом введены следующие обозначения. Продольная волна отмечается нижним индексом 0. Волны разгрузки отмечаются двумя нижними индексами 00. Отраженные волны тоже отмечаются двумя нижними индексами, причем отраженная волна, возникшая при падении на боковую поверхность волны объемной деформации, имеет первый индекс на единицу выше, а второй — равный соответствующему индексу падающей волны. Отраженная волна, возникшая от вихревой волны, отмечается увеличением на единицу второго из нижних индексов, первый индекс остается неизменным.

Кроме того, волны, движущиеся вдоль положительного направления оси x, отмечаются верхним индексом плюс; волны, движущиеся в обратном направлении — индексом минус.

Введенные обозначения вполне достаточны для классификации всех отраженных волн.

Предполагается, что функции $\Delta_{nk}^{\pm}(x, y, t)$ и $\omega_{nk}^{\pm}(x, y, t)$ равны нулю, если соответствующие им волны еще не возникли к моменту времени t. Благодаря этому верхние пределы суммирования в общем решении можно считать равными бесконечности, хотя в действительности при конечном t число отраженных волн конечно.

Можно показать [1], что для продольной волны $\Delta_0 = -v/a$, $\omega_0 = 0$. Остальные волны ищутся в виде действительной части функционально-инвариантных решений [2]

$$\Delta_{nk}^{\pm}(x, y, t) = \operatorname{Re}\Delta_{nk}^{\pm}(\theta_{nk}^{\pm}), \qquad \omega_{nk}^{\pm}(x, y, t) = \operatorname{Re}\omega_{nk}^{\pm}(\theta_{nk1}^{\pm})$$

Фазы этих волн $\theta_{nk}^{\pm}$ и $\theta_{nk1}^{\pm}$ будут комплексными и определяются из уравнений

$$\begin{aligned} at &= y\theta_{nk}^{\pm} + [\pm x + (2n+1)h]\sqrt{1-(\theta_{nk}^{\pm})^2} + 2kh\sqrt{\beta^{-2}-(\theta_{nk}^{\pm})^2} \\ at &= y\theta_{nk1}^{\pm} + 2nh\sqrt{1-(\theta_{nk1}^{\pm})^2} + [\pm x + (2k+1)h]\sqrt{\beta^{-2}-(\theta_{nk1}^{\pm})^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Полученные уравнения вытекают из автомодельности волн разгрузки [1] и условия равенства фаз падающей и отраженной волн на поверхности отражения.

Подстановка функционально-инвариантных решений в краевые условия приводит к рекуррентным соотношениям для функций $d\Delta_{nk}^{\pm}/d\theta$ и $d\omega_{nk}^{\pm}/d\theta$ (для упрощения записи индексы при θ, как правило, будут опускаться). При помощи этих соотношений выводятся окончательные выражения, имеющие вид

$$\frac{d\Delta_{nk}^{\pm}}{d\theta} = [F_{nk}(A) - F_{n,k-1}(A)]\frac{d\Delta_{00}^{\pm}}{d\theta}, \qquad \frac{d\omega_{nk}^{\pm}}{d\theta} = [F_{nk}(A) - F_{n-1,k}(A)]\frac{d\omega_{00}^{\pm}}{d\theta}$$

$$F_{nk}(A) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{k-s}\binom{k}{s}\binom{n+k-s}{k}A^{n+k-2s}$$

$$A = \frac{-(a^2-2b^2\theta^2)^2 + 4b^4\theta^2\sqrt{1-\theta^2}\sqrt{\beta^{-2}-\theta^2}}{(a^2-2b^2\theta^2)^2 + 4b^4\theta^2\sqrt{1-\theta^2}\sqrt{\beta^{-2}-\theta^2}}$$

Функции $\Delta_{00}^{\pm}$ и $\omega_{00}^{\pm}$ были получены в работе [1] и в принятых здесь обозначениях равны

$$\frac{d\Delta_{00}^{\pm}}{d\theta} = \frac{-2iv(a^2-2b^2)(a^2-2b^2\theta^2)}{\pi a[(a^2-2b^2\theta^2)^2 + 4b^4\theta^2\sqrt{1-\theta^2}\sqrt{\beta^{-2}-\theta^2}](1-\theta^2)}$$

$$\frac{d\omega_{00}^{\pm}}{d\theta} = \frac{\pm 4iva\theta(a^2-b^2)}{\pi[(a^2-2b^2\theta^2)^2 + 4b^4\theta^2\sqrt{1-\theta^2}\sqrt{\beta^{-2}-\theta^2}]\sqrt{1-\theta^2}}$$

Таким образом, решение для отраженных волн сводится к квадратурам

$$\Delta_{nk}^{\pm}(\theta_{nk}^{\pm}) = \int\limits_{\theta^*}^{\theta_{nk}^{\pm}} [F_{nk}(A) - F_{n,k-1}(A)]\,\Delta_{00}'\,d\theta \qquad \left(\Delta_{00}' = \frac{d\Delta_{00}^{\pm}}{d\theta}\right)$$

$$\omega_{nk}^{\pm}(\theta_{nk1}^{\pm}) = \pm \int\limits_{\theta^*}^{\theta_{nk1}^{\pm}} [F_{nk}(A) - F_{n-1,k}(A)]\,\omega_{00}'\,d\theta \qquad \left(\omega_{00}' = \pm\frac{d\omega_{00}^{\pm}}{d\theta}\right)$$

Интегрирование происходит вдоль произвольной кривой, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Im}\theta > 0$ и соединяющей точки $\theta_{nk}^{\pm}$ и θ^* или $\theta_{nk1}^{\pm}$ и θ^*, где θ^* — произвольная точка, принадлежащая фронту волны, т. е. $|\operatorname{Re}\theta^*| < 1$, $\operatorname{Im}\theta^* = 0$. Произвольность этой точки обусловлена тем, что на фронте волны

$$\operatorname{Re} F_{nk}(A)\,\Delta'_{00} = \operatorname{Re} F_{nk}(A)\,\omega'_{00} = 0$$

и следовательно, функции $\Delta_{nk}^{\pm}(x, y, t) = \operatorname{Re}\Delta_{nk}^{\pm}(\theta)$ и $\omega_{nk}^{\pm}(x, y, t) = \operatorname{Re}\omega_{nk}^{\pm}(\theta)$ не зависят от θ^*.

Суммирование отраженных волн приводит к окончательным выражениям:

$$\Delta(x, y, t) = -v/a + \Delta^{+}(x, y, t) + \Delta^{-}(x, y, t), \qquad \omega(x, y, t) = \omega^{+}(x, y, t) + \omega^{-}(x, y, t)$$

$$\Delta^{\pm}(x, y, t) = \operatorname{Re}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=s}^{\infty}\sum_{k=s}^{\infty}\int\limits_{\theta_{n,k+1}^{\pm}}^{\theta_{nk}^{\pm}} (-1)^{k-s}\binom{n+k-2s}{k-s}\binom{n+k-s}{k-s} A^{n+k-2s}\Delta_{00}'\,d\theta \quad (2)$$

$$\omega^{\pm}(x, y, t) = \pm\operatorname{Re}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=s}^{\infty}\sum_{k=s}^{\infty}\int\limits_{\theta_{n+1,k,1}^{\pm}}^{\theta_{nk1}^{\pm}} (-1)^{k-s}\binom{n+k-2s}{k-s}\binom{n+k-s}{k-s} A^{n+k-2s}\omega_{00}'\,d\theta$$

Особенность полученного решения состоит в том, что интенсивность каждой из отраженных волн при $t\to\infty$ ($\theta\to\infty$) стремится к бесконечности и тем быстрее, чем больше величина $n + k$ для данной волны. Поэтому при исследовании асимптотики необходимо учитывать, что разложение решения в ряд по степеням t в окрестности точки $t = \infty$ может содержать также расходящиеся члены.

Сначала исследуем поведение уравнений фаз (1) при больших t. Как следует из этих уравнений, при $t\to\infty$ либо $\theta\to\infty$ (случай, исследованный в работе [3]), либо $y\to\infty$ ($\lim y/t \neq 0$), либо $n\to\infty$ ($\lim n/t \neq 0$) и $k\to\infty$ ($\lim k/t \neq 0$). Далее из рассмотрения нижних пределов суммирования в выражениях (2) следует, что $\lim n/t = \lim k/t = \lim s/t$ при $t\to\infty$. Поэтому вместо n и k вводятся новые индексы $p = n + k - 2s$ и $q = k - s$, обладающие следующим свойством: $\lim p/t = \lim q/t = 0$ при $t\to\infty$.

Перенося члены, конечные при $t\to\infty$, в правую часть, расходящиеся члены — в левую, вынося в левой части множитель at за скобку, можно уравнение фаз представить в виде

$$at = \Omega_{pq}^{\pm}(\theta), \quad at = \Omega_{pq1}^{\pm}(\theta)$$

Здесь

$$\Omega_{pq}^{\pm}(\theta) = \frac{[\pm x + h(2p - 2q + 1)]\sqrt{1-\theta^2} + 2hq\sqrt{\beta^{-2}-\theta^2}}{\delta(\theta)}$$

$$\Omega_{pq1}^{\pm}(\theta) = \frac{2h(p-q)\sqrt{1-\theta^2} + (\pm x + 2hq)\sqrt{\beta^{-2}-\theta^2}}{\delta(\theta)}$$

$$\delta(\theta) = 1 - Y\theta - S\left(\sqrt{\beta^{-2}-\theta^2} + \sqrt{1-\theta^2}\right), \qquad Y = \frac{y}{at}, \qquad S = \frac{2hs}{at}$$

При $t\to\infty$ фаза $\theta\to\theta_0(S, Y)$, где $\theta_0(S, Y)$ — корень уравнения $\delta(\theta) = 0$, функция $\theta_0(S, Y)$ не зависит от p и q.

Далее исследуется общее решение (2). Следуя работе [3], в этом решении выделяется та часть функции $\Delta^{\pm}(x, y, t)$, которая зависит от q:

$$M_{ps}^{\pm} = \operatorname{Re} \sum_{q=0}^{p} \int_{\theta_2^{\pm}}^{\theta_1^{\pm}} (-1)^q \binom{p}{q} A^p \Delta_{00}' \, d\theta \qquad \begin{pmatrix} \theta_1^{\pm} = \theta_{p-q+s,\, q+s}^{\pm} \\ \theta_2^{\pm} = \theta_{p-q+s,\, q+s+1}^{\pm} \end{pmatrix}$$

и разлагается в ряд по степеням t:

$$M_{ps}^{\pm} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m}^{\pm(p,s)} t^{-m}$$

Здесь

$$C_{-m}^{\pm(p,s)} = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i a^m} \sum_{q=0}^{p} \int_C [(\Omega_{pq}^{\pm})^{m-1} (\Omega_{pq}^{\pm})' - (\Omega_{p+1,\, q+1}^{\pm})^{m-1} (\Omega_{p+1,\, q+1}^{\pm})'] \times$$
$$\times \left[\int_{\theta_*}^{\theta} (-1)^q \binom{p}{q} A^p \Delta_{00}' \, d\theta \right] d\theta$$

Контур C должен охватывать единственную особую точку $\theta_0(S, Y)$. Обход контура производится против часовой стрелки.

Интегрирование по частям на контуре C и представление функций $\Omega_{pq}^{\pm}$ и $\Omega_{p+1,\, q+1}^{\pm}$ в виде бинома, линейного относительно q, позволяет просуммировать по q (см. например [3]). В результате получается, что

$$M_{ps}^{\pm} = \operatorname{Re} \left(\frac{2h}{at} \right)^{p+1} \frac{(-1)^p p!}{2\pi i} \int_C (\sqrt{\beta^{-2} - \theta^2} - \sqrt{1 - \theta^2}) \sqrt{\beta^{-2} - \theta^2} \frac{A^p \Delta_{00}' \, d\theta}{\delta^{p+1}(\theta)} + O(t^{-p-2})$$

Далее вычисляется сумма по p:

$$N_s^{\pm} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+s}{s} M_{ps}^{\pm}$$

Учитывая разложение

$$\binom{p+s}{s} = \frac{1}{p!} S^p \left(\frac{at}{2h} \right)^p + O(t^{p-1})$$

и деформируя контур C так, чтобы он охватывал корень уравнения

$$\delta(\theta) + AS(\sqrt{\beta^{-2} - \theta^2} - \sqrt{1 - \theta^2}) = 0 \tag{3}$$

удается просуммировать по p:

$$N_s^{\pm} = \operatorname{Re} \frac{2h}{at} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sqrt{\beta^{-2} - \theta^2} \, \Delta_{00}' d\theta}{\delta(\theta) + AS(\sqrt{\beta^{-2} - \theta^2} - \sqrt{1 - \theta^2})} + O(t^{-2})$$

Беря интеграл при помощи вычетов, получаем для функции $\Delta^{\pm}(x, y, t)$ следующее выражение:

$$\Delta^{\pm}(x, y, t) = \sum_{s=0}^{\infty} N_s^{\pm} = \operatorname{Re} \frac{2h}{at} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\beta^{-2} - \theta^2} \Delta_{00}'}{[\delta(\theta) + AS(\sqrt{\beta^{-2} - \theta^2} - \sqrt{1 - \theta^2})]'} + O(t^{-2})$$

В этих соотношениях штрих означает производную по θ при постоянном S. Величины S и θ связаны между собой уравнением (3).

Используя формулу Эйлера — Маклорена, заменим суммирование по s интегрированием по S:

$$\Delta^{\pm}(x, y, t) = \operatorname{Re} \int_0^{S^*} \frac{\sqrt{\beta^{-2} - \theta^2} \Delta_{00}' \, dS}{[\delta(\theta) + AS(\sqrt{\beta^{-2} - \theta^2} - \sqrt{1 - \theta^2})]'} + O(t^{-1}) \tag{4}$$

Верхний предел интегрирования S^* определяется как то значение S, при котором $\theta_0(S, Y) = \theta^*$. Произвольность верхнего предела была обоснована выше, хотя в выражении (4) эта произвольность не очевидна.

Далее проводится замена переменной интегрирования S на θ:

$$\Delta^{\pm}(x, y, t) = \operatorname{Re}\int\limits_{Y^{-1}}^{\theta^*} \frac{\sqrt{\beta^{-2}-\theta^2}\,\Delta'_{00}\,d\theta}{\sqrt{\beta^{-2}-\theta^2}+\sqrt{1-\theta^2}-A\left(\sqrt{\beta^{-2}-\theta^2}-\sqrt{1-\theta^2}\right)} + O(t^{-1})$$

и подстановка выражений для Δ'_{00} и A:

$$\Delta^{\pm}(x, y, t) = \operatorname{Re}\int\limits_{Y^{-1}}^{\theta^*} \frac{iv(a^2-2b^2)(a^2-2b^2\theta^2)\,d\theta}{\pi a(1-\theta^2)\left[a^4-4b^2(a^2-b^2)\theta^2\right]} + O(t^{-1})$$

Полученный интеграл представляется в виде контурного путем дополнения кривой интегрирования участком действительной оси от θ^* до Y^{-1}. Это допустимо, поскольку подынтегральная функция является чисто мнимой на действительной оси θ. Вычисление контурного интеграла при помощи вычетов приводит к окончательным выражениям

$$\Delta(x, y, t) = -\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{v}{a} + O(t^{-1}) \quad \text{при } y < 2b\sqrt{1-\beta^2}\,t$$

$$\Delta(x, y, t) = O(t^{-1}) \quad \text{при } y > 2b\sqrt{1-\beta^2}\,t$$

Аналогично выводится, что $\omega(x, y, t) = O(t^{-1})$.

Таким образом, интерференция отраженных волн приводит при $t \to \infty$ к формированию фронта продольной волны, движущейся со скоростью волн одномерного приближения (для плоской задачи эта скорость равна $2b\sqrt{1-\beta^2}$). Впереди фронта деформации полностью исчезают, позади фронта устанавливаются деформации, соответствующие одномерному приближению.

Проведенное исследование не применимо к точкам, движущимся со скоростью продольных волн a или со скоростью волн Рэлея, но оно справедливо для сколь угодно близких к ним скоростей. Это обстоятельство, а также сравнение энергии волны одномерного приближения с энергией удара, приводят к следующему выводу. Продольная волна, распространяющаяся со скоростью a, и поверхностная волна, распространяющаяся с рэлеевской скоростью, с течением времени затухают, т. е. относительная доля энергии, сосредоточенная в этих волнах, стремится к нулю.

В заключение отметим, что вычисление следующих членов разложения общего решения в ряд по степеням t приводит к значительным осложнениям. Поэтому для выяснения быстроты сходимости проводились численные расчеты, показавшие, что на линии контакта точное решение колеблется около одномерного приближения, сравнительно быстро (за $t \approx 10 \div 20\ h/a$) стремясь к нему.

Поступила 3 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Малков М. А. Двумерная задача об упругом соударении стержней. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 4.
2. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.— Л., ОНТИ, 1937, гл. 12.
3. Векуа И. Н. К вопросу распространения упругих волн в бесконечном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями. Тр. Тбил. Геофиз. ин-та. 1937, т. 2, с. 23.