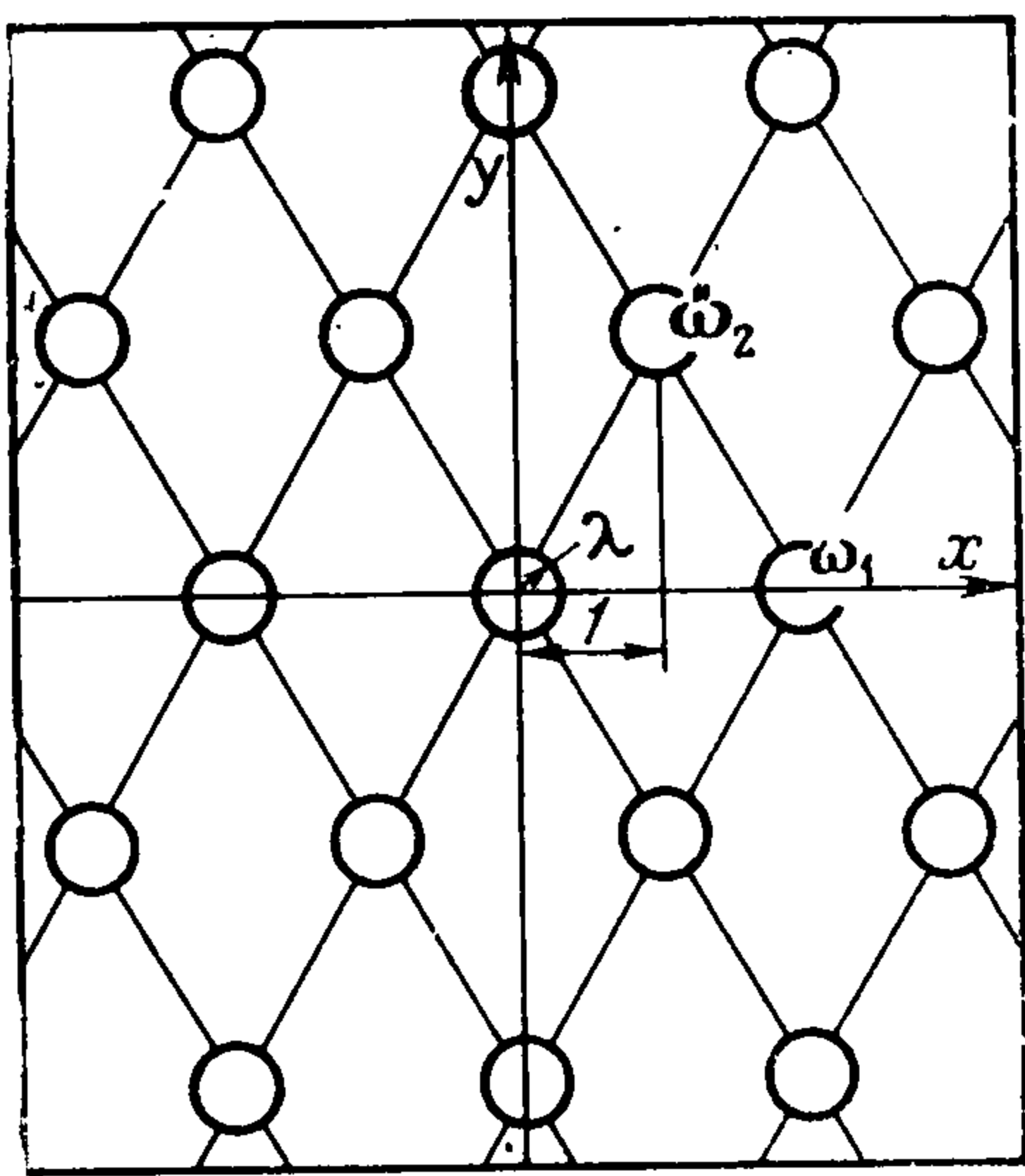


УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВОЙКО ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРУГЛЫХ ОТВЕРСТИЙ

Л. М. Куршин, И. Д. Суздальницкий
(Новосибирск)

Ниже рассмотрена задача об определении границ, разделяющих упругую и пластические области бесконечной перфорированной плоскости с треугольной сеткой круговых отверстий (фиг. 1), когда на контуре каждого из них задано равномерно распределенное напряжение σ_0 . При решении задачи предполагается, что уровень напряжения и шаг сетки таковы, что границы отверстия целиком охватываются соответствующей пластической областью, но в то же время соседние пластические области не пересекаются.



Фиг. 1

Задача упругого равновесия плоскости, ослабленной двойкопериодической системой отверстий рассматривалась в ряде работ [1, 2]. С увеличением напряжений в такой плоскости вокруг отверстий возникают пластические зоны. Расположение этих зон носит, также двойкопериодический характер.

Задача об образовании пластической зоны вокруг одиночного отверстия с определением границы раздела упругой и пластической областей была поставлена и решена в работах А. Надап [3] и Л. А. Галина [4]. Позднее А. С. Космодамианский [5], используя решение [4] для пластической области, рассмотрел для плоскости, ослабленной рядом периодически расположенных отверстий.

Для решения задачи естественным образом объединяется метод, развитый при решении двойкопериодической упругой задачи [2], с методом, предложенным в [4] для решения задачи о границе упругой и пластической областей при одиночном отверстии в пластинке.

Пусть имеется двойкопериодическая треугольная решетка с круговыми отверстиями, имеющими радиус λ ($\lambda < 1$) и центры в точках

$$p_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 2e^{i\pi/3}$$

Обозначим контур отверстия с центром в точке p_{mn} через L_{mn} , границу соответствующей пластической зоны — через Γ_{mn} и внешность контуров Γ_{mn} — через D_z .

Условие пластичности принято в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k_0^2$$

На контуре отверстия L_{mn} граничные условия имеют вид

$$\sigma_r^r = -\sigma_0, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

Функции напряжений Колосова — Мусхелишвили [6] для пластической зоны имеют вид [4]

$$\Phi_1^*(z) = \frac{k_0 - \sigma_0}{2} + k_0 \ln \frac{z}{\lambda}, \quad \Psi_1^*(z) = 0.$$

В упругой области для функций напряжений $\Phi_2^*(z)$ и $\Psi_2^*(z)$, имеем

$$\sigma_0 + \sigma_r = 4 \operatorname{Re} \Phi_2^*(z), \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_0 - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2 [\bar{z}\Phi_2^{*'}(z) + \Psi_2^*(z)] e^{2i\theta}$$

Сопрягая решения для упругой и пластической областей на границе их раздела, получим граничные условия для упругой области. На контуре Γ_{00} должны выполняться условия

$$\operatorname{Re} \Phi_2^*(z) = \operatorname{Re} \Phi_1^*(z), \quad \sigma_0 - \sigma_r = 2k_0$$

или

$$\operatorname{Re} \Phi_2^*(z) = \frac{k_0 - \sigma_0}{2} + k_0 \ln \frac{|z|}{\lambda}; \quad z\Phi_2^{*'}(z) + \Psi_2^*(z) = k_0 \frac{\bar{z}}{z}$$

Пусть функция $z = w(\zeta)$ реализует конформное отображение области D_z на область D_ζ в плоскости ζ , являющуюся внешностью окружностей γ_{mn} радиуса μ , с центрами в точках p_{mn} . Граничные условия на γ_{00} запишутся в виде

$$\operatorname{Re} \Phi_2(\zeta) = \frac{k_0 - \sigma_0}{2} + \frac{k_0}{2} \left[\ln \frac{w(\zeta)}{\lambda} + \ln \frac{\overline{w(\zeta)}}{\lambda} \right] \quad (1)$$

$$\frac{\overline{w(\zeta)}}{w'(\zeta)} \Phi_2'(\zeta) + \Psi_2(\zeta) = k_0 \frac{\overline{w(\zeta)}}{w(\zeta)} \quad (2)$$

где

$$\Phi_2(\zeta) = \Phi_2^*[w(\zeta)], \quad \Psi_2(\zeta) = \Psi_2^*[w(\zeta)]$$

Выражение (2) можно преобразовать следующим образом. Из (1) следует, что в D_ζ

$$\Phi_2(\zeta) = \frac{k_0 - \sigma_0}{2} + k_0 \ln \frac{w(\zeta)}{\lambda} - k_0 \ln \frac{\zeta}{\mu} \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим второе граничное условие на γ_{00} в виде

$$\zeta w'(\zeta) \Psi_2(\zeta) = -k_0 \overline{w(\zeta)} \quad (4)$$

Решения в плоскости ζ будем отыскивать в виде рядов [2]

$$\Phi_2(\zeta) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\mu^{2k+2} \wp^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!} \quad (5)$$

$$\Psi_2(\zeta) = \beta_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\mu^{2k+2} \wp^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\mu^{2k+2} Q^{(2k+1)}(\zeta)}{(2k+1)!} \quad (6)$$

где $\wp(\zeta)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, $Q(\zeta)$ — специальная мероморфная функция

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{m,n} \left\{ \frac{1}{(z-p)^2} - \frac{1}{p^2} \right\}, \quad Q(z) = \sum'_{m,n} \left\{ \frac{\bar{p}}{(z-p)^2} - 2z \frac{\bar{p}}{p^3} - \frac{\bar{p}}{p^2} \right\}$$

$$p = m\omega_1 + n\omega_2, \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Из граничного условия (1) и требования сохранения полюсов p_{mn} при отображении следует представление для $w(\zeta)$:

$$w(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \frac{\mu^{2k+2} \wp^{(2k-1)}(\zeta)}{(2k+1)!} \quad (7)$$

Составим теперь зависимости, которым должны подчиняться коэффициенты выражений (5)–(7). Условие равенства нулю главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D_ζ , эквивалентно равенствам

$$g(\zeta + \omega_j) - g(\zeta) = 0 \quad (j = 1, 2)$$

$$g(\zeta) = \varphi(\zeta) + \overline{\zeta \Phi(\zeta)} + \psi(\zeta), \quad \varphi'(\zeta) = \Phi(\zeta), \quad \psi'(\zeta) = \Psi(\zeta)$$

и приводит к соотношениям [2]

$$\alpha_0 = 1/3 \sqrt{3} \pi \beta_2 \mu^2, \quad \beta_0 = 1/6 \sqrt{3} \pi \alpha_2 \mu^2 \quad (8)$$

Учитывая, что $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_0$, имеем $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 \neq 0$.

Условия симметрии для треугольной решетки запишутся в виде

$$\Phi_2(\zeta e^{1/3 i \pi}) = \Phi_2(\zeta), \quad \Psi_2(\zeta e^{1/3 i \pi}) = \Psi_2(\zeta) e^{-2/3 i \pi}, \quad w(\zeta e^{1/3 i \pi}) = w(\zeta) e^{1/3 i \pi}$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_{6k \pm 2} = \beta_{6k+2 \pm 2} = A_{6k \pm 2} = 0$$

при $k = 0, 1,$

Подставим далее выражения (5) и (7) в граничное условие (1), умножим полученное выражение на $1/2\pi i\zeta$ и проинтегрируем по контуру γ_{00} . Интегралы легко вычисляются, если воспользоваться формулами (70.3), (70.4') [6]. Получим

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{6k} \mu^{6k} r_{0,3k-1} = \frac{k_0 - \sigma_0}{2} + k_0 \ln \frac{\mu}{\lambda} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{6k} \mu^{6k} r_{0,3k-1} \right] \quad (9)$$

где

$$r_{0,3k-1} = \sum'_{m,n} \frac{1}{P_{mn}^{6k}}$$

Для составления остальных уравнений относительно коэффициентов (4)–(6) представлений функций $\Phi_2(\zeta)$, $\Psi_2(\zeta)$, $w(\zeta)$ предварительно разложим эти функции в ряды Лорана в окрестности точки $\zeta = 0$:

$$\Phi_2(\zeta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{6k} \left(\frac{\mu}{\zeta}\right)^{6k} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{6k} \mu^{6k} \sum_{j=0}^{\infty} r_{3j,3k-1} \zeta^{6j} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(\zeta) = & \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{6k+2} \left(\frac{\mu}{\zeta}\right)^{6k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{6k+2} \mu^{6k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{3j+2,3k} \zeta^{6j+4} - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} 6k \alpha_{6k} \mu^{6k} \sum_{j=0}^{\infty} s_{3j+2,3k-1} \zeta^{6j+4} \end{aligned} \quad (11)$$

$$w(\zeta) = \zeta - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{6k} \mu}{6k-1} \left(\frac{\mu}{\zeta}\right)^{6k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{6k} \mu^{6k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{3j,3k-1}}{6j+1} \zeta^{6j+1} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} r_{jk} &= \frac{(2j+2k+1)! g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}}, & s_{jk} &= \frac{(2j+2k+2)! \rho_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}} \\ g_j &= \sum'_{m,n} \frac{1}{T^{2j}}, & \rho_j &= \sum'_{m,n} \frac{T}{T^{2j+1}}, & T &= \frac{P_{mn}}{2} = m + ne^{1/2i\pi} \end{aligned}$$

Подставив выражения (10)–(12) в краевые условия (1), (4) на контуре γ_{00} ($\zeta = \mu e^{i\theta}$) и сравнивая коэффициенты при $\cos 6k\theta$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно α, β, A (уравнение (1) целесообразно предварительно продифференцировать по θ). Далее приведены уравнения первого приближения.

В записанных уравнениях α_{6j}/k_0 , β_{6j+2}/k_0 , обозначены, соответственно, через $\alpha_{6'j}$, $\beta_{6'j+2}$, штрих опущен:

$$2d_1 c_0 = c_1, \quad a\beta_2 + A_6 \gamma_0 + A_6 \beta_8 \mu^{12} r_{32} = a$$

$$a\beta_8 + A_6 \beta_2 = 1/7 A_6 \mu^{12} r_{32}$$

$$a\gamma_0 + A_6 \gamma_1 + A_6 \beta_2 \mu^{12} r_{32} = -1/5 A_6$$

где

$$d_1 = \alpha_6 (1 + \mu^6 r_{32}), \quad a = 1 + A_6 \mu^6 r_{02},$$

$$c_0 = a^2 + (1/25 + 1/49 \mu^{24} r_{32}^2) A_6^2$$

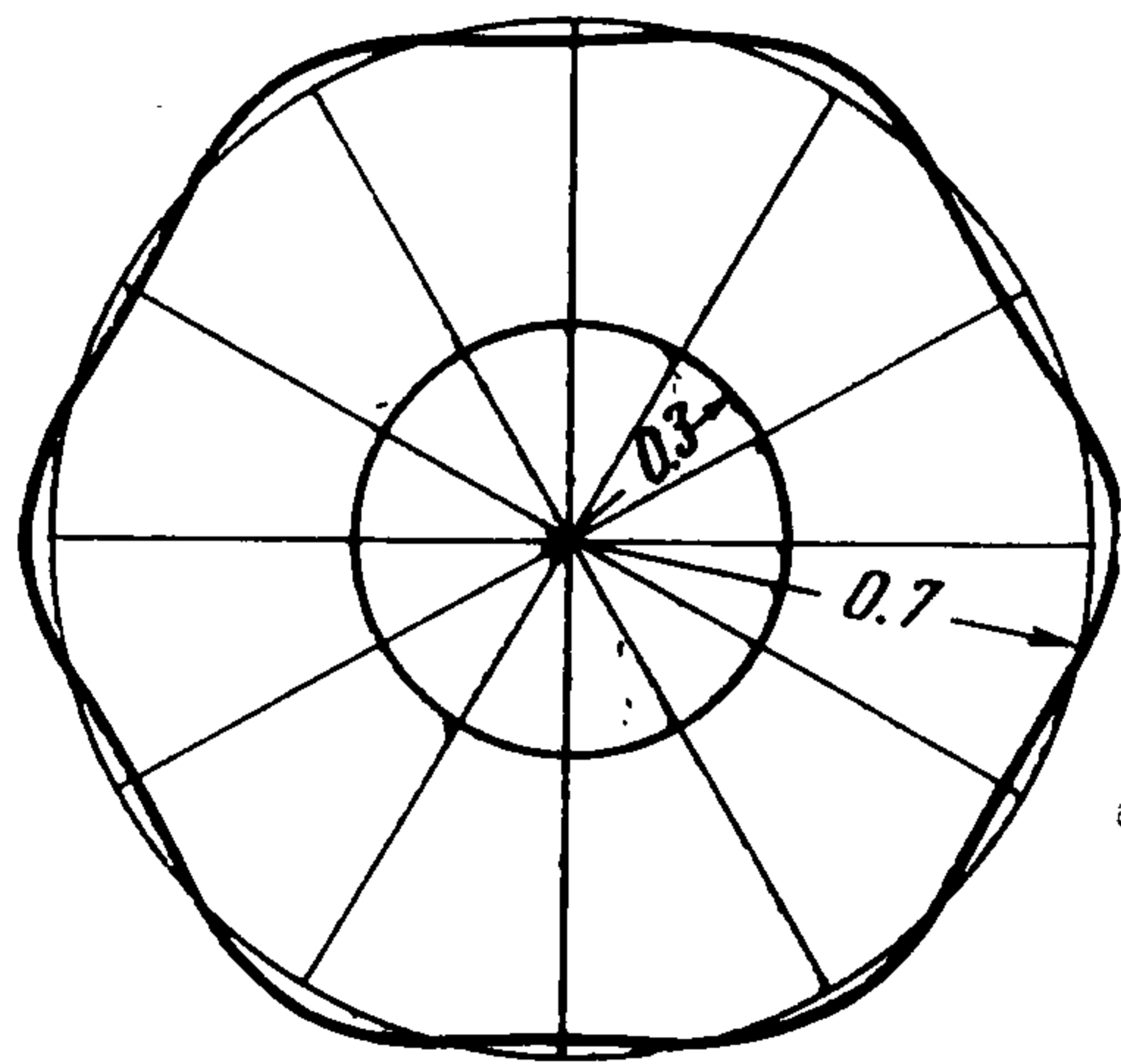
$$c_1 = -2a A_6 (1/5 - 1/7 \mu^{12} r_{32})$$

$$\gamma_j = \beta_2 r_{3j+2,0} \mu^{6j+6} + \beta_8 r_{3j+2,3} \mu^{6j+12} - 6\alpha_6 s_{3j+2,2} \mu^{6j+10} \quad (j = 0, 1)$$

Результаты расчета в первых двух приближениях даны в таблице.

Полагая в (12) $\zeta = \mu e^{i\theta}$, получим уравнение границы пластической области

$$r = |w(\mu e^{i\theta})| = f(\theta)$$



Фиг. 2

μ	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
Первое приближение							
A_6	$-15 \cdot 10^{-5}$	-0.0017	-0.0094	-0.036	-0.102	-0.226	-0.364
α_0	0.018	0.041	0.072	0.113	0.164	0.225	0.302
α_6	$3 \cdot 10^{-5}$	0.0003	0.002	0.007	0.020	0.042	0.060
β_2	1	1	1	1	1.002	1.011	1.039
β_8	$15 \cdot 10^{-5}$	0.0017	0.0094	0.036	0.103	0.229	0.379
Второе приближение							
A_6	$-15 \cdot 10^{-5}$	-0.0017	-0.0094	-0.036	-0.098	-0.194	
A_{12}	0	0	0	0	$15 \cdot 10^{-5}$	0.0097	
α_0	0.018	0.041	0.072	0.113	0.164	0.230	
α_6	$6 \cdot 10^{-5}$	0.0007	0.0038	0.014	0.040	0.080	
α_{12}	0	0	0	-0.0001	-0.001	-0.004	
β_2	1	1	1	1	1.002	1.037	
β_8	$15 \cdot 10^{-5}$	0.0017	0.0094	0.035	0.098	0.201	
β_{14}	0	0	0	0.001	0.009	0.029	

В первом приближении

$$r^2 = \mu^2 [c_0 + c_1 \cos 6\theta]$$

причем

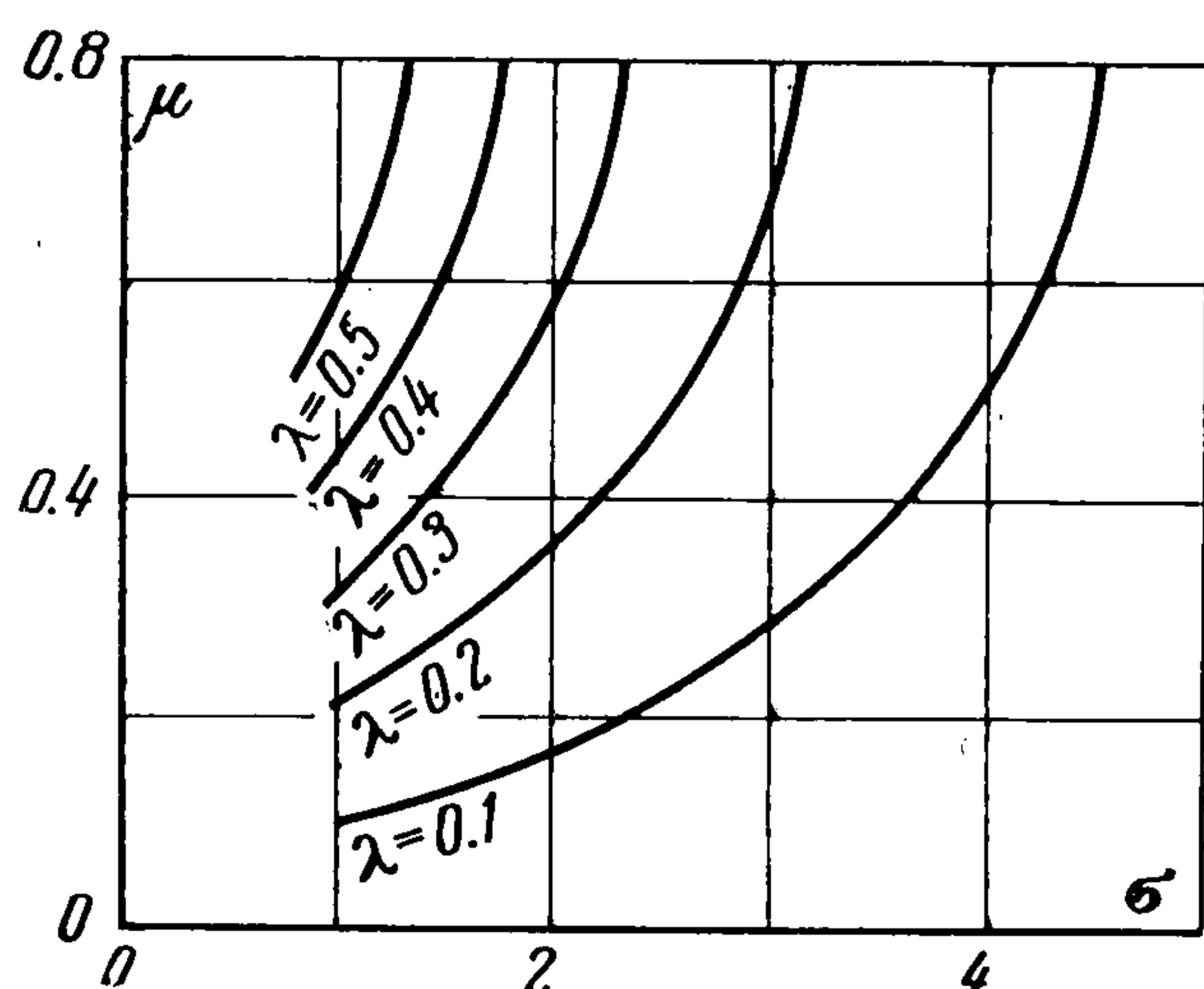
$$r_{\max} = \mu \left[1 + A_6 \left(-\frac{1}{5} + \mu^6 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{3j,2}}{6j+1} \mu^{6j} \right) \right] \quad (13)$$

$$r_{\min} = \mu \left[1 + A_6 \left(\frac{1}{5} + \mu^6 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j r_{3j,2}}{6j+1} \mu^{6j} \right) \right] \quad (14)$$

На фиг. 2 эта граница представлена для случая $\lambda = 0.3$, $\sigma = 2.24$ ($\mu = 0.7$, $r_{\max} = 0.730$, $r_{\min} = 0.667$).

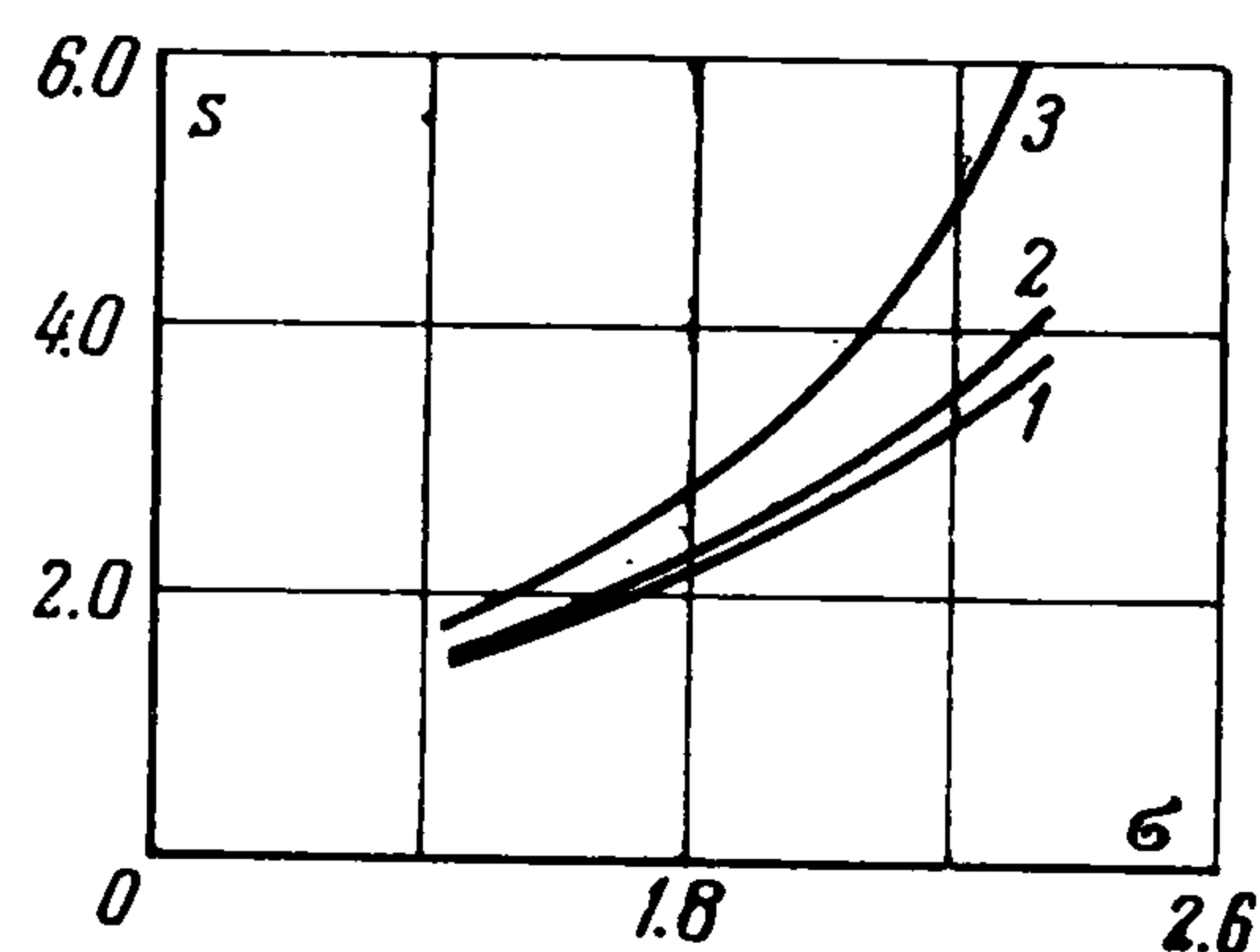
Выражение (14) позволяет определить наименьшую нагрузку, при которой контур отверстия полностью охватывается пластической областью ($r_{\min} \geq \lambda$).

Точно так же, из условия $r_{\max} \leq 1$ определяется наибольшая нагрузка, при которой пластические области касаются одна другой. На фиг. 3 даны зависимости параметра μ от величины нагрузки $\sigma = \sigma_0 / k_0$ для некоторых значений радиуса отверстия λ .



Фиг. 3

Влияние отверстий на величину площади пластической области s в случае $\lambda = 0.3$



Фиг. 4

можно проследить на фиг. 4. Величина s равна отношению площади, охватываемой внешним контуром пластической зоны, к площади отверстия $\pi\lambda^2$. При этом кривая 1 отвечает случаю одиночного отверстия [4], кривая 2 — случаю ряда отверстий [5], кривая 3 — случаю треугольной решетки.

Авторы благодарны Л. А. Фильштинскому за участие в обсуждении работы.

Поступила 2 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Куршин Л. М., Фильштинский Л. А. Определение приведенного модуля изотропной плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 6.
2. Фильштинский Л. А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Надаи А. Пластичность, М.—Л., Гостехиздат, 1936.
4. Галин Л. А. Плоская упруго-пластическая задача, ПММ, 1946, т. 10, вып. 3.
5. Космодамианский А. С. Упруго-пластическая задача для изотропного массива, ослабленного бесконечным рядом одинаковых круговых выработок. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4.
6. Мухелишвили Н. Л. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. М., «Наука», 1966.

АСИМПТОТИКА ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОМ СОУДАРЕНИИ СТЕРЖНЕЙ

М. А. Малков (Москва)

В работе приведено решение двумерной плоской задачи об упругом соударении полубесконечных стержней, справедливое для любого времени t с момента соударения, и исследуется поведение этого решения при $t \rightarrow \infty$. Результаты исследования обосновывают применимость одномерного приближения к задачам об ударе.

Пусть два плоских полубесконечных стержня движутся вдоль оси y навстречу один другому с одинаковой скоростью v . В момент столкновения один из стержней занимает пространство $y > 0$, $|x| < h$; другой — пространство $y < 0$, $|x| < h$, где h — полутолщина стержней.

Скорости распространения продольных (a) и поперечных (b) волн в одном из стержней считаются равными соответствующим скоростям в другом стержне.

Решение задачи ищется в виде функции объемных деформаций Δ и вихревой функции ω , где Δ — дивергенция вектора смещения, ω — ротор этого вектора.

Функции Δ и ω должны удовлетворять волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = b^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

начальным условиям при $t = 0$:

$$\Delta = \omega = \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -2 \frac{v}{a} \delta(y)$$

и краевым условиям на боковых поверхностях стержней $|x| = h$:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} - 2\beta^4 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = 0, \quad 2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x \partial y} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \left(\beta = \frac{b}{a} \right)$$

где $\beta = b/a$.

Эти соотношения получены путем двукратного дифференцирования по времени краевых условий, выраженных через компоненты вектора смещения, и исключения полученных производных по t при помощи уравнений движения упругих тел.

Как следует из начальных условий, прямая $y = 0$ является линией разрыва. При $t > 0$ распад этого разрыва приводит к возникновению продольной волны ($|y| < at$) и двух волн разгрузки от боковых поверхностей стержней ($|x| < h - \sqrt{a^2 t^2 - y^2}$). При $t > 2h/a$ волны разгрузки достигают противоположных боковых поверхностей и возникают отраженные волны, число которых с течением времени быстро растет.