ЗАДАЧА О РАСТЯЖЕНИИ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА, СОДЕРЖАЩЕГО ПЛОСКУЮ КОЛЬЦЕВУЮ ЩЕЛЬ

Б. И. Сметанин

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается осесимметричная задача о растяжении упругого пространства, ослабленного плоской кольцевой щелью. При решении используется эффективный асимптотический метод, аналогичный развитому в работе [1].

Разработке приближенных методов для решения поставленной задачи были посвящены работы [2, 3]. Ниже для решения применяется асимптотический метод решения задачи о кольцевой щели, который представляет собой дальнейшее развитие метода, изложенного в работе [1]. Метод позволяет получить решение рассматриваемой задачи в виде простых формул для больших и малых значений параметра λ. На некотором промежуточном интервале изменения λ эти асимптотические формулы дают практически совпадающие результаты, обеспечивая тем самым полное решение задачи.

§ 1. **Решение задачи для больших λ.** Пусть в упругом пространстве имеется плоская кольцевая щель (разрез), занимающая область: $a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $z = 0$. Пространство растягивается на бесконечности равномерно распределенными усилиями интенсивности q в направлении, перпендикулярном плоскости щели. Требуется определить форму поверхности щели $\gamma(r)$ и коэффициент интенсивности нормальных напряжений N, вычисленный без учета сил сцепления в точках $r = a$ и $r = b$ $(z = 0)$. Рассматриваемая задача сводится к вспомогательной задаче о кольцевой щели в пространстве, к поверхности которой приложена нормальная нагрузка $\sigma_z = -q = \text{const}$, а напряжения на бесконечности равны нулю.

Выражения, определяющие $\gamma(r)$, N_a и N_b, одинаковы для исходной и вспомогательной задач, поэтому в дальнейшем будем рассматривать вспомогательную задачу. При помощи преобразования Ханкеля последняя задача может быть приведена к нахождению функции $\gamma(r)$ из следующего интегрального уравнения:

$$\int_a^b \rho\gamma(\rho)\,d\rho \int_0^\infty \xi^2 J_0(\xi r)\,J_0(\xi\rho)\,d\xi = \frac{q}{\Delta} \qquad (a \leqslant r \leqslant b) \qquad \left(\Delta = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\right) \tag{1.1}$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Проинтегрировав обе части уравнения (1.1) дважды по r, получим

$$\int_a^b \frac{\rho\gamma(\rho)}{r+\rho} K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) d\rho = -\frac{\pi q}{2\Delta}\left(\frac{r^2}{4} + A\ln\frac{r}{a} + B\right) \tag{1.2}$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, A и B — постоянные интегрирования. Сделав в уравнении (1.2) замену переменных по формулам [1]

$$r = a\exp\frac{1+x}{\lambda}, \qquad \rho = a\exp\frac{1+\xi}{\lambda} \tag{1.3}$$

получим интегральное уравнение первого рода с четным разностным ядром, зависящим от безразмерного параметра λ

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, M\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x), \qquad |x| \leqslant 1 \qquad \left(\lambda = \frac{2}{\ln(b/a)}\right) \tag{1.4}$$

$$\varphi(\xi) = \rho^{3/2}\gamma(\rho), \qquad M(t) = \operatorname{sch} 0.5tK(\operatorname{sch} 0.5t) \qquad \left(t = \frac{x-\xi}{\lambda}\right)$$

$$f(x) = -\frac{q\lambda\sqrt{r}}{\Delta}\left(\frac{r^2}{4} + A\ln\frac{r}{a} + B\right) \tag{1.5}$$

Следуя работе [1], представим ядро $M(t)$ интегрального уравнения (1.4) в следующей форме:

$$M(t) = -\ln|t| + \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{2i} + \ln|t| \sum_{i=1}^{\infty} d_i t^{2i} \tag{1.6}$$

($c_0 = 2.079$, $c_1 = -0.1091$, $c_2 = 0.05352$, $d_1 = 0.0625$, $d_2 = -0.00358$ и т. д.)

Ряды в (1.6) сходятся при всех $0 \leqslant t < \pi$. Подставив ядро $M(t)$ в форме (1.6) в уравнение (1.4), получим

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\left[-\ln\frac{|x-\xi|}{\lambda} + c_0\right] d\xi =$$

$$= \pi\left\{f(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{2i}}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\left[c_i + d_i \ln\frac{|x-\xi|}{\lambda}\right](x-\xi)^{2i}\, d\xi\right\} = \pi\psi(x) \tag{1.7}$$

Применив к уравнению (1.7) формулу обращения, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{f'(\xi)\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi - x)} - \right. \tag{1.8}$$

$$\left. -\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{2i}}\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi-x)}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)\left[2ic_i + d_i + 2i\, d_i \ln\frac{|\xi-\tau|}{\lambda}\right](\xi-\tau)^{2i-1}\, d\tau\right\}$$

При этом должны выполняться следующие условия [4]:

$$\int_{-1}^{1}\frac{x\psi'(x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-1}^{1}\varphi(x)\, dx = 0, \quad \int_{-1}^{1}\frac{\psi'(x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \tag{1.9}$$

$$(\ln 2\lambda + c_0)\int_{-1}^{1}\varphi(x)\, dx - \int_{-1}^{1}\frac{\psi(x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \tag{1.10}$$

Можно показать, что первое соотношение (1.9) есть тождество. Второе соотношение (1.9) и выражение (1.10) служат для определения постоянных A и B.

Решение уравнения (1.8) будем искать в следующем виде:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\lambda^{-2n}\ln^m\lambda\,\varphi_{nm}(x) \tag{1.11}$$

Подставим $\varphi(x)$ в форме (1.11) в левую и правую части уравнения (1.8). Приравнивая затем выражения при одинаковых степенях λ^{-2} и $\ln\lambda$, получим бесконечную систему интегральных уравнений относительно $\varphi_{nm}(x)$:

$$\varphi_{00}(x) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{1}\frac{f'(\xi)\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi-x)} \tag{1.12}$$

$$\varphi_{10}(x) = \frac{1}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi-x)}\int_{-1}^{1}\varphi_{00}(\tau)\,(2c_1 + d_1 + 2d_1\ln|\xi-\tau|)\,(\xi-\tau)\, d\tau$$

$$\varphi_{11}(x) = -\frac{2d_1}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi-x)}\int_{-1}^{1}\varphi_{00}(\tau)\,(\xi-\tau)\, d\tau, \quad \text{и т. д.}$$

Опуская промежуточные вычисления по формулам (1.3), (1.9)—(1.12), приводим окончательное выражение для определения функции $\gamma(r)$:

$$\gamma(r) = \frac{q\,(ab)^{5/4}}{\Delta r\sqrt{r}}\left(\ln\frac{r}{a}\ln\frac{b}{r}\right)^{1/2}\Phi\left(\lambda\ln\frac{r}{\sqrt{ab}}\right) \tag{1.13}$$

В выражении (1.13) функция $\Phi(t)$ равна (1.14)

$$\Phi(t) = 1 + (0.246 + \chi)\lambda^{-2} + (0.0708 + 0.276\chi + \chi^2)\lambda^{-4} + [1.750 + (0.336 + \chi)\lambda^{-2} + (0.00922 - 0.176\chi)\lambda^{-4}]\, t/\lambda + [1.604 + (0.264 + 0.385\chi)\lambda^{-2}](t/\lambda)^2 + (1.029 + 0.119\lambda^{-2})(t/\lambda)^3 + 0.517(t/\lambda)^4 + 0.215(t/\lambda)^5 + O(\lambda^{-6}) \qquad (\chi = 0.0625 \ln \lambda)$$

Коэффициент интенсивности нормальных напряжений для точек щели $r = a$ и $r = b$, соответственно, определим из условий

$$N_a = \lim_{r\to a} \sqrt{a - r}\,\sigma_z\Big|_{(r<a)} = \lim_{r\to a} \sqrt{r - a}\,\Delta \frac{d\gamma}{dr}\Big|_{(r>a)}, \qquad N_b = \lim_{r\to b} \sqrt{r - b}\,\sigma_z\Big|_{(r>b)} = -\lim_{r\to b} \sqrt{b - r}\,\Delta \frac{d\gamma}{dr}\Big|_{(r<b)} \qquad (1.15)$$

Подставив $\gamma(r)$ в форме (1.13) в условия (1.15), получим

$$N_a = \frac{q\sqrt{a}\,\Phi(-1)}{\sqrt{2\lambda}\exp(-2.5/\lambda)}, \qquad N_b = \frac{q\sqrt{b}\,\Phi(1)}{\sqrt{2\lambda}\exp(2.5/\lambda)} \qquad (1.16)$$

§ 2. Решение задачи для малых λ (метод последовательных приближений). Продифференцируем по r обе части уравнения (1.2). Произведя затем интегрирование по частям и используя условия

$$\gamma(a) = \gamma(b) = 0 \qquad (2.1)$$

получим

$$\int_a^b \rho\gamma'(\rho)\,d\rho \int_0^\infty J_1(\xi r) J_1(\xi\rho)\,d\xi = -\frac{q}{\Delta}\left(\frac{1}{2}r + A\frac{1}{r}\right) \qquad (a \leqslant r \leqslant b) \qquad (2.2)$$

Интегральное уравнение (2.2) эквивалентно следующей системе двух интегральных уравнений:

$$\int_0^b \rho\gamma_1'(\rho)\,d\rho \int_0^\infty J_1(\xi r) J_1(\xi\rho)\,d\xi = -\frac{qr}{2\Delta} + \int_b^\infty \rho\gamma_2'(\rho)\,d\rho \int_0^\infty J_1(\xi r) J_1(\xi\rho)\,d\xi \qquad (0 \leqslant r \leqslant b)$$

$$\int_a^\infty \rho\gamma_2'(\rho)\,d\rho \int_0^\infty J_1(\xi r) J_1(\xi\rho)\,d\xi = -\frac{Aq}{\Delta r} + \int_0^a \rho\gamma_1'(\rho)\,d\rho \int_0^\infty J_1(\xi r) J_1(\xi\rho)\,d\xi \qquad (a \leqslant r < \infty) \qquad (2.3)$$

при условии, что

$$\gamma'(r) = \gamma_1'(r) + \gamma_2'(r) \qquad (2.4)$$

Введем функции $\Gamma_1(\xi)$ и $\Gamma_2(\xi)$ следующим образом:

$$\int_0^\infty \xi\Gamma_1(\xi) J_1(\xi r)\,d\xi = \begin{cases} \gamma_1'(r) & (0<r<b) \\ -\gamma_2'(r) & (b<r<\infty) \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$\int_0^\infty \xi\Gamma_2(\xi) J_1(\xi r)\,d\xi = \begin{cases} -\gamma_1'(r) & (0<r<a) \\ \gamma_2'(r) & (a<r<\infty) \end{cases} \qquad (2.6)$$

В этом случае система (2.3) сводится к двум парным интегральным уравнениям относительно функций $\Gamma_1(\xi)$ и $\Gamma_2(\xi)$:

$$\int_0^\infty \Gamma_1(\xi) J_1(\xi r)\,d\xi = -\frac{qr}{2\Delta} \quad (0<r<b), \qquad \int_0^\infty \xi\Gamma_1(\xi) J_1(\xi r)\,d\xi = -\gamma_2'(r) \quad (b<r<\infty) \qquad (2.7)$$

$$\int_0^\infty \xi\Gamma_2(\xi) J_1(\xi r)\,d\xi = -\gamma_1'(r) \quad (0<r<a), \qquad \int_0^\infty \Gamma_2(\xi) J_1(\xi r)\,d\xi = -\frac{qA}{\Delta r} \quad (a<r<\infty) \qquad (2.8)$$

Применив формулу обращения к уравнениям (2.7) и (2.8) и подставив найденные функции $\Gamma_1(\xi)$ и $\Gamma_2(\xi)$ в (2.5) и (2.6), получим систему двух интегральных уравнений второго рода относительно функций $\gamma_1'(r)$ и $\gamma_2'(r)$:

$$\gamma_1'(r) = -\frac{2q}{\pi\Delta}\frac{r}{\sqrt{b^2-r^2}} + \frac{2}{\pi}\frac{r}{\sqrt{b^2-r^2}}\int_b^\infty \frac{\gamma_2'(\rho)\sqrt{\rho^2-b^2}}{\rho^2-r^2}d\rho \qquad (0\leqslant r\leqslant b)$$

$$\gamma_2'(r) = \frac{2qabC}{\pi\Delta r\sqrt{r^2-a^2}} + \frac{2}{\pi}\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}\int_0^a \frac{\gamma_1'(\rho)\sqrt{a^2-\rho^2}}{r^2-\rho^2}d\rho \qquad (a\leqslant r<\infty) \tag{2.9}$$

Из (2.9) видно, что данный метод применим для малых значений λ, так как малые λ соответствуют широким кольцам, т. е. случаю, когда либо a мало, либо b велико при $b \gg a$. Решение системы (2.9) будем искать в виде

$$\gamma_1'(r) = \sum_{i=0}^\infty \gamma_{1i}'(r), \qquad \gamma_2'(r) = \sum_{i=0}^\infty \gamma_{2i}'(r) \tag{2.10}$$

$$\gamma_{10}'(r) = -\frac{2q}{\pi\Delta}\frac{r}{\sqrt{b^2-r^2}}, \qquad \gamma_{1,i+1}'(r) = \frac{2}{\pi}\frac{r}{\sqrt{b^2-r^2}}\int_b^\infty \frac{\gamma_{2i}'(\rho)\sqrt{\rho^2-b^2}}{\rho^2-r^2}d\rho$$

$$\gamma_{20}'(r) = \frac{2qabC}{\pi\Delta r\sqrt{r^2-a^2}}, \qquad \gamma_{2,i+1}'(r) = \frac{2}{\pi}\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2}}\int_0^a \frac{\gamma_{1i}'(\rho)\sqrt{a^2-\rho^2}}{r^2-\rho^2}d\rho$$

$$(i=0,1,\ldots)$$

Ограничившись вычислением функций $\gamma_{11}'(r)$ и $\gamma_{21}'(r)$ и учитывая (2.10) и (2.4), получим:

$$\gamma'(r) = \frac{2q}{\pi\Delta}\frac{r}{\sqrt{b^2-r^2}}\left[\frac{1}{\pi}\arccos\frac{r^2(a^2+b^2)-2a^2b^2}{r^2(b^2-a^2)} + \frac{b^2C}{\pi r^2}\ln\frac{b+a}{b-a} - 1\right] -$$
$$- \frac{2qabC}{\pi\Delta r\sqrt{r^2-a^2}}\left[\frac{1}{\pi}\arccos\frac{a^2+b^2-2r^2}{b^2-a^2} + \frac{r^2}{\pi abC}\ln\frac{b+a}{b-a} - 1\right] \quad (a\leqslant r\leqslant b) \tag{2.11}$$

Подставив $\gamma'(r)$ в форме (2.11) в условие (1.15), получим (2.12)

$$N_a = \frac{q\sqrt{2b}}{\pi}\left(\frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right), \qquad N_b = \frac{q\sqrt{2b}}{\pi}\left(1 - \frac{C}{\pi}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$
$$(\varepsilon = \exp(-2/\lambda))$$

Проинтегрировав функцию $\gamma'(r)$ в форме (2.11), получим

$$\gamma(r) = \frac{2q}{\pi\Delta}\sqrt{b^2-r^2} + \frac{4q}{\pi^2\Delta}C\left\{b\arcsin\frac{a}{r}\arcsin\frac{r}{b} - \right.$$
$$-\left[\left(\frac{r}{b} + \frac{2}{3}\frac{r^3}{b^3} + \frac{8}{15}\frac{r^5}{b^5}\right)\arcsin\frac{a}{r} - \varepsilon - \frac{2}{3}\frac{\varepsilon r^2}{b^2} - \frac{1}{9}\varepsilon^3 - \frac{8}{15}\frac{\varepsilon r^4}{b^4} - \frac{4}{45}\frac{\varepsilon^3 r^2}{b^2} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{25}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^7)\right]\sqrt{b^2-r^2}\right\} + \left(C - \frac{2}{\pi}\right)\frac{2qb}{\pi\Delta}\arccos\frac{a}{r} -$$
$$- \frac{2q}{\pi^2\Delta}\left[\sqrt{r^2-a^2}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + \sqrt{b^2-r^2}\arccos\frac{r^2(\varepsilon^2+1)-2a^2}{r^2(1-\varepsilon^2)}\right] + D\frac{qb}{\Delta} \tag{2.13}$$

Постоянные C и D определим из условий (2.1):

$$C = \frac{1}{\pi}\,\frac{2\arccos\varepsilon + \sqrt{1-\varepsilon^2}\ln[(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1}]}{\arccos\varepsilon + (0.3634\varepsilon + 0.1715\varepsilon^3 + 0.1117\varepsilon^5 + O(\varepsilon^7))\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$
$$D = 2\pi^{-2}\{2\arccos\varepsilon + \sqrt{1-\varepsilon^2}\ln[(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^{-1}]\} - C \tag{2.14}$$

§ 3. Решение задачи при малых λ (метод произведений). Численное исследование задачи. Решение уравнения (1.1), пригодное для малых значений параметра λ, можно получить также в виде комбинации решений интегральных уравнений [1]

$$\int_0^b \rho\gamma_3(\rho)\,d\rho \int_0^\infty \xi^2 J_0(\xi r)\,J_0(\xi\rho)\,d\xi = \frac{q}{\Delta} \qquad (0 \leqslant r \leqslant b) \tag{3.1}$$

$$\int_a^\infty \rho\gamma_4(\rho)\,d\rho \int_0^\infty \xi^2 J_0(\xi r)\,J_0(\xi\rho)\,d\xi = \frac{q}{\Delta} J_0(\beta r) \qquad (a \leqslant r < \infty) \tag{3.2}$$

в следующей форме:

$$\gamma(r) = \lim_{\beta\to 0} \frac{\gamma_3(r)\,\gamma_4(r)}{\gamma_5(r)} \tag{3.3}$$

Здесь $\gamma_5(r)$ — вырожденное решение уравнения (3.2), представляющее собой первый член асимптотики $\gamma_4(r)$ при $r / a \to \infty$.

Решения уравнений (3.1) и (3.2) можно получить, если свести эти уравнения к эквивалентным им дуальным интегральным уравнениям, например, как это было сделано при решении уравнений (2.3). Приводим окончательные выражения

$$\gamma_3(r) = \frac{2q}{\pi\Delta}\sqrt{b^2 - r^2}, \qquad \gamma_4(r) = \frac{2q}{\pi\Delta\beta}\left(\arccos\frac{a}{r} + O(\beta^2)\right) \tag{3.4}$$

Из второго соотношения (3.4) следует, что

$$\gamma_5(r) = q\,(\Delta\beta)^{-1}\,[1 + O(\beta^2)] \tag{3.5}$$

Подставив $\gamma_3(r)$, $\gamma_4(r)$ и $\gamma_5(r)$ в (3.3), получим

$$\gamma(r) = \Delta^{-1}\,4q\pi^{-2}\sqrt{b^2 - r^2}\,\arccos a / r \tag{3.6}$$

Выражения, определяющие коэффициент интенсивности нормальных напряжений в точках $r = a$ и $r = b$, соответственно, получим из соотношений (3.6) и (1.15)

$$N_a = 2\sqrt{2b}\,q\pi^{-2}\varepsilon^{-1/2}\sqrt{1-\varepsilon^2}, \qquad N_b = 2\sqrt{2b}\,q\pi^{-2}\arccos\varepsilon \tag{3.7}$$

Проведенные вычисления показали, что формулы (1.13) и (1.16) можно с надежностью использовать при $2 \leqslant \lambda < \infty$, формулы (2.12) и (2.13) — при $0 < \lambda \leqslant 2$, формулы (3.6) и (3.7) — при $0 < \lambda < 0.75$. Численный анализ выражений для N_a и N_b показывает, что N_a всегда больше N_b. Отсюда следует, что форма кольцевой щели является неустойчивой. Развитие кольцевой щели при монотонном возрастании нагрузки q, приложенной на бесконечности, начинается в точках внутреннего контура, и кольцевая щель превращается в круглую щель радиуса $r = b$.

Приводим значения величин $\gamma^* = (qb)^{-1}\Delta\gamma\,(0.5\,(a + b))$, $N_a^* = (q\sqrt{b})^{-1} N_a$ и $N_b^* = (q\sqrt{b})^{-1} N_b$, вычисленные при $\lambda = 2$ (первые два столбца) и $\lambda = 0.75$ (третий и четвертый столбцы) по формулам § 1, 2 и 3:

	§ 1	§ 2	§ 2	§ 3
$\gamma^* =$	0.326	0.323	0.503	0.493
$N_a^* =$	0.493	0.486	1.113	1.084
$N_b^* =$	0.372	0.369	0.437	0.430

Поступила 28 XII 1967

Ростовский университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
2. Губенко В. С., Филимонов И. Ф. Плоский кольцевой разрез в упругом пространстве. Тр. Днепропетровск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1964, вып. 50.
3. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Растяжение упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной. Прикл. механика, 1965, т. 1, вып. 10.
4. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.