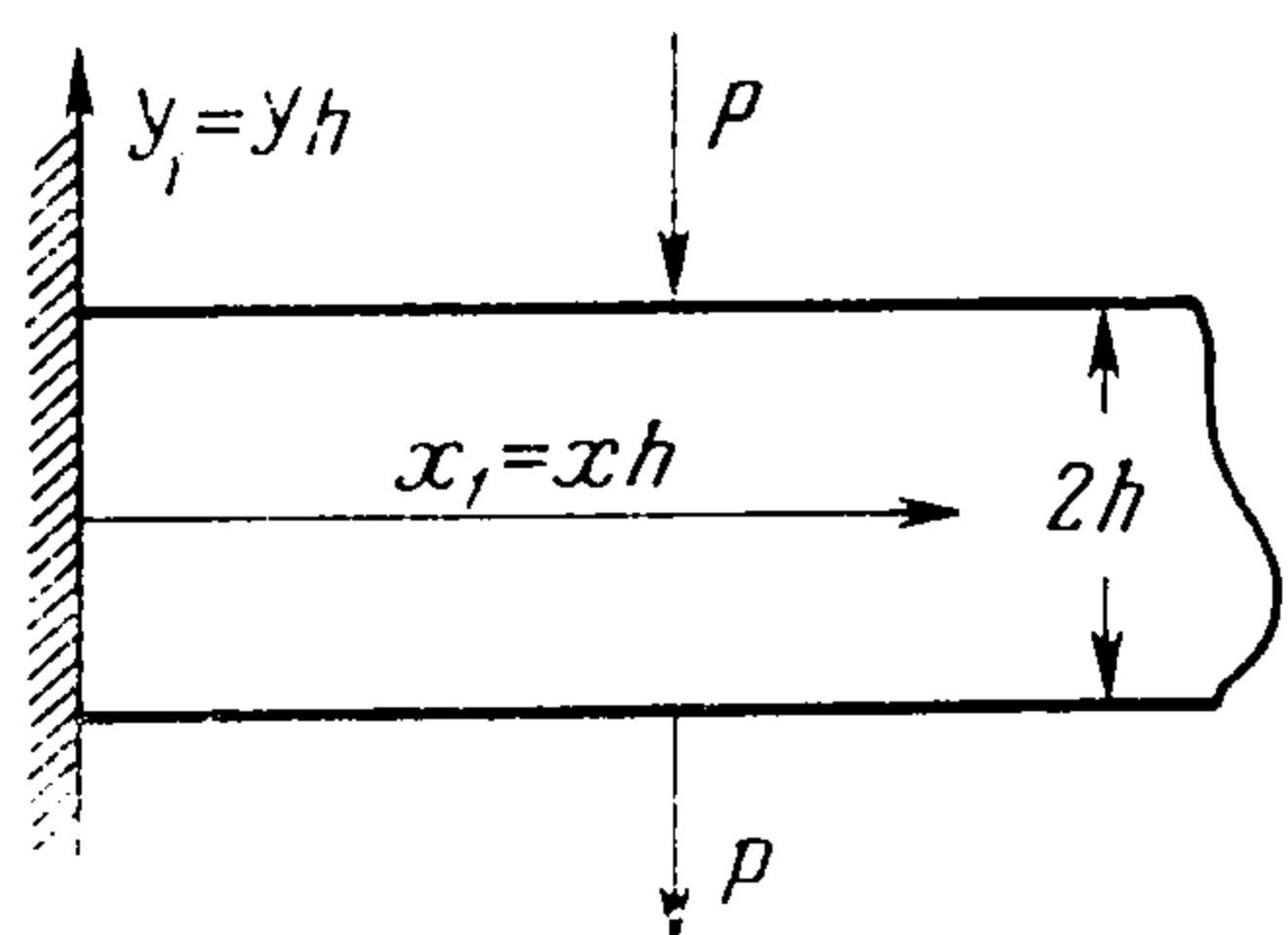


ИЗГИБ ПОЛОСЫ

В. В. Копасенко

(Ростов-на-Дону)

Рассмотрена задача об изгибе полуполосы, жестко заделанной по короткому краю. Составлено интегральное уравнение для нормального напряжения в заделке и исследован характер особенностей его решения в углах. Методом коллокации данное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений.



Численные расчеты были проделаны для случая изгиба полуполосы моментом, приложенным на бесконечности.

§ 1. Рассмотрим задачу изгиба полуполосы при следующих граничных условиях (фиг. 1):

$$u = v = 0, \quad x = 0, \quad |y| \leq 1 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{y1} = g(x) \operatorname{sgn} y, \quad \tau_{x1y1} = r(x), \quad y = \pm 1 \quad (1.2)$$

Здесь u, v — перемещения вдоль осей x_1, y_1 , соответственно, а τ_{x1y1}, σ_{y1} — касательное и нормальное напряжения. Для вывода интегрального уравнения относительно нормального напряжения $\sigma(t)$ в заделке воспользуемся методом, изложенным в работе [1]. Тогда получим

$$\int_{-1}^1 \sigma(t) \left\{ \ln |y-t| + \frac{2\nu}{(\nu+2)} (1-t) \left[\frac{(1+y)}{(2+y-t)^2} - \frac{(1-y)}{(2-y-t)^2} \right] - \frac{\nu^2 + 2\nu + 2}{\nu(\nu+2)} \ln \frac{(2+y-t)}{(2-y-t)} \right\} dt + R(\sigma) + \frac{2}{(\nu+2)} K(y) \int_{-1}^1 \sigma(t) t dt + \gamma_0 \pi y - f(y) = 0, \quad |y| \leq 1 \quad (1.3)$$

$$f(y) = -\frac{4(1+\nu)}{(\nu+2)} \int_0^\infty \bar{g}(\lambda) \left[\left(\lambda \operatorname{sh} \lambda - \frac{\operatorname{ch} \lambda}{\nu} \right) \Phi(\lambda y) - \operatorname{ch} \lambda \lambda y \Psi(\lambda y) \right] \frac{d\lambda}{\lambda \Delta_-} + \frac{4(1+\nu)}{(\nu+2)} \int_0^\infty \bar{r}(\lambda) \left[\left(\lambda \operatorname{ch} \lambda - \frac{1+\nu}{\nu} \operatorname{sh} \lambda \right) \Phi(\lambda y) - \lambda y \operatorname{sh} \lambda y \Psi(\lambda y) \right] \frac{d\lambda}{\lambda \Delta_-}$$

$$R(\sigma) = \frac{2}{(\nu+2)} \sum_{s=0}^{\infty} L_s \int_{-1}^1 \sigma(t) t^{2s+3} dt$$

$$L_s = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+3) y^{2k+2} \frac{\Gamma(2m+2k+7)}{\Gamma(2k+4) \Gamma(2m+4)} \left(\frac{1}{2} \right)^{2k+2m+5} \left\{ \frac{P_{k+m}}{\nu} + \beta_{k+m} + \nu [(2k+3)(2m+3) P_{k+m} + \Phi_{k+m}] \right\}$$

$$K(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{y}{2} \right)^{2m+3} \left(\frac{\alpha_m}{\nu} + \delta_m + \nu \varepsilon_m \right), \quad \Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$$

$$\nu = \frac{1}{1-2\mu}, \quad \Phi(\lambda y) = \operatorname{sh} \lambda y - \lambda y, \quad \Psi(\lambda y) = \operatorname{ch} \lambda y - 1, \quad \Delta_- = \operatorname{sh} 2\lambda - 2\lambda$$

$$\bar{g}(\lambda) = \int_0^\infty g(x) \sin \lambda x dx, \quad \bar{r}(\lambda) = \int_0^\infty r(x) \cos \lambda x dx$$

Здесь $P_n, \beta_n, \varphi_n, \alpha_n, \delta_n, \varepsilon_n$ — подсчитанные раз навсегда коэффициенты: γ_0 — произвольная постоянная, μ — коэффициент Пуассона.

Уравнение (1.3) есть интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Ядро этого уравнения имеет подвижную особенность на диагонали $y = t$ и неподвижную — в точках $y = \pm 1$. Неподвижная особенность в ядре усложняет исследование уравнения и его численное решение.

§ 2. Займемся исследованием особенности решения рассматриваемой задачи. Продифференцируем уравнение (1.3) под переменной y , затем произведем замену $1 - t = u, 1 - y = v$ и учтем, что $\sigma(-t) = -\sigma(t)$.

В результате получим

$$\int_0^1 q(u) [K(u, v) + K(u, 2-v) + K_1(u, v)] du = f(v) \quad (0 \leq v \leq 2) \quad (2.1)$$

$$q(u) = \sigma(1-u), \quad K(u, v) = \frac{1}{(u-v)} + \frac{2v}{(v+2)} \frac{u(u-v)}{(u+v)^3} - \frac{v^2+2v+2}{v(v+2)} \frac{1}{(u+v)}$$

Здесь $K_1(u, v), f(v)$ — функции непрерывные и непрерывно дифференцируемые любое число раз по u, v в области их изменения. Очевидно, особенность решения вблизи точки $v = 0$ будет определяться только ядром $K(u, v)$. Воспользуемся результатами работы [2], в которой показано, что решение интегрального уравнения

$$\int_0^\infty q_1(u) K(u, v) du = f_1(v) \quad (0 \leq v < \infty) \quad (2.2)$$

вблизи границы $v = 0$ может быть представлено в виде

$$q_1(v) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k v^{p_k-1} \quad (2.3)$$

если $f_1(v)$ — функция непрерывная со всеми своими производными в окрестности $v = 0$. Здесь p_k — корни характеристического уравнения

$$2\kappa \cos \pi p - 4p^2 + 1 + \chi^2 = 0, \quad \kappa = 3 - 4\mu \quad (2.4)$$

Действительная часть p_k положительна. Уравнение (2.4) при любых $0 < \mu < 0.5$ имеет один вещественный положительный корень $p_0 < 1$. Остальные корни являются комплексными и, как показывают конкретные вычисления [3].

$$\operatorname{Re} p_k > 1.6, \quad k \geq 1$$

Так как особенность решения уравнения (2.2) вблизи границы $v = 0$ определяется только лишь поведением ядра $K(u, v)$ вблизи этой точки, то решение уравнения (2.1) в этой окрестности представляется формулой (2.3).

На основании условия $\sigma(-y) = -\sigma(y)$ можно сделать аналогичное заключение о поведении решения вблизи точки $1 + y = 0$.

§ 3. Изучив особенности решения интегрального уравнения (1.3) на концах отрезка $[-1, 1]$, выберем в качестве численного метода аналог метода Мультотппа — Каландия [1]. Согласно разложению (2.3) приближенное решение задачи можно искать в виде

$$\sigma(t) = D \left[\frac{(1+t)^{2-p_0}}{(1-t)^{1-p_0}} - \frac{(1-t)^{2-p_0}}{(1+t)^{1-p_0}} \right] + \sqrt{1-t^2} \sum_{n=0}^{(n=N)} E_n U_{2n+1}(t) \quad (3.1)$$

где $U_{2n+1}(t)$ — функции Чебышева второго рода.

Продифференцируем левую часть уравнения (1.3) по переменной y , затем подставим в полученное выражение (3.1), тогда из условия равенства нулю последнего соотношения в выбранных узлах коллокации y_k приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных D и E_n .

Таблица 1

n	$-P_n$	$-\beta_n$	Φ_n
0	0.2614406 (-1)	0.1008765	0.1272675
1	0.4906414 (-2)	0.2294624 (-1)	0.4891501 (-1)
2	0.1087015 (-2)	0.605872 (-2)	0.1797972 (-1)
3	0.2570645 (-3)	0.167498 (-2)	0.6316076 (-2)
4	0.625843 (-4)	0.468406 (-3)	0.2131532 (-2)
5	0.154462 (-4)	0.130806 (-3)	0.6952711 (-3)
6	0.383739 (-5)	0.363067 (-4)	0.220422 (-3)
7	0.95640 (-6)	0.10002 (-4)	0.68244 (-4)
8	0.23873 (-6)	0.27358 (-5)	0.20707 (-4)
9	0.5962 (-7)	0.7431 (-6)	0.6173 (-5)
10	0.149 (-7)	0.201 (-6)	0.1816 (-5)
11	0.3725 (-8)	0.538 (-7)	0.5285 (-6)
12	0.9312 (-9)	0.1440 (-7)	0.1520 (-6)
13	0.2328 (-9)	0.3834 (-8)	0.4334 (-7)
14	0.5820 (-10)	0.1017 (-8)	0.1225 (-7)
15	0.1455 (-10)	0.2688 (-9)	0.3440 (-8)

Принятое сокращение записи. $-0,2614406 (-1)$ означает $-0,02614406$.

Таблица 2

n	$-\alpha_n$	$-\delta_n$	ϵ_n
0	1.0387106	3.3196631	-1.8125050
1	0.1568644	0.6052593	-0.2071643 (-1)
2	0.3925131 (-1)	0.1835699	0.1165609
3	0.1087015 (-1)	0.605872 (-1)	0.8196588 (-1)
4	0.3084774 (-2)	0.2009976 (-1)	0.4186040 (-1)
5	0.876180 (-3)	0.6557687 (-2)	0.1845111 (-1)
6	0.247139 (-3)	0.2092894 (-2)	0.7417253 (-2)
7	0.69073 (-4)	0.653520 (-3)	0.279335 (-2)
8	0.19128 (-4)	0.20005 (-3)	0.10015 (-2)
9	0.5252 (-5)	0.60189 (-4)	0.34527 (-3)
10	0.1431 (-5)	0.1783 (-4)	0.1152 (-3)
11	0.388 (-6)	0.523 (-5)	0.375 (-4)
12	0.1043 (-6)	0.1508 (-5)	0.1198 (-4)
13	0.2794 (-7)	0.4321 (-6)	0.3751 (-5)
14	0.74503 (-8)	0.12270 (-6)	0.11559 (-5)
15	0.1979 (-8)	0.34575 (-7)	0.35131 (-6)
16	0.5238 (-9)	0.96769 (-8)	0.10550 (-6)

Очевидно, найденное решение $\sigma(t)$ будет являться решением исходного уравнения (1.3). В качестве узлов коллокации выбирались корни полиномов Чебышева первого рода.

$$y_k = \cos \frac{(2k-1)}{4N} \pi \quad (k = 1, \dots, N)$$

Здесь N — число точек деления отрезка $[0, 1]$.

Таким образом, была решена задача для случая изгиба полуполосы моментом M , приложенным на бесконечности, при отсутствии нормальных и касательных напряжений на гранях полуполосы ($\bar{g}(\lambda) = 0$, $\bar{r}(\lambda) = 0$) при дополнительном условии

$$\int_{-1}^1 \sigma(t) t dt = \frac{M}{h^2} \quad (3.2)$$

Из (3.2) определяется произвольная постоянная γ_0 . Благодаря специально выбранному виду аппроксимации решения (3.1) все интегралы задачи берутся в замкнутой форме. В результате вычислений была получена система линейных алгебраических

Таблица 3

y	$N = 5$	$N = 6$
0.12050	0.16638	0.16424
0.21901	0.30122	0.29969
0.40849	0.55829	0.56068
0.58168	0.79729	0.79617
0.69671	0.96066	0.95797
0.90045	1.30331	1.30593
0.95534	1.54167	1.53738

Таблица 4

	$N = 5$	$N = 6$
D	0.21977	0.22060
E_0	0.36917	0.36577
E_1	0.12855 (-1)	0.10304 (-1)
E_2	-0.77423 (-2)	-0.10260 (-1)
E_3	-0.49815 (-2)	-0.79340 (-2)
E_4		-0.38509 (-2)
γ_0	0.31556	0.31230

уравнений вида

$$Da_m + \sum_{n=0}^{n=N-2} b_{nm} E_n + \gamma_0 = 0 \quad (m = 1, \dots, N) \quad (3.3)$$

$$D \frac{1}{\varepsilon} + E_0 0.25 = \frac{1}{\pi} \frac{M}{h^2} \quad \left(\varepsilon = \frac{3 \sin \pi p_0}{4(1-p_0)(2-p_0)(3-2p_0)} \right) \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) вытекает из условия (3.2). В табл. 1 помещены значения P_n , β_n , φ_n . Значения коэффициентов α_n , δ_n , ε_n приведены в табл. 2.

При подсчете вышеприведенных коэффициентов использовались их представления через интегралы Гоуланда [4].

В табл. 3 приведены результаты расчетов для напряжения в заделке $\sigma^\circ = \sigma(y) (h^2/M)$ в зависимости от числа точек коллокации ($N = 5, 6$) для $\mu = 0.31741$, $p_0 = 0.70000$. Из этой таблицы видно, что пятое приближение отличается от шестого не более чем на 1.5%.

Табл. 4 содержит значения коэффициентов D , E_n для пятого и шестого приближений.

Из рассмотрения таблиц следует, что предлагаемый метод обладает высокой степенью сходимости, при этом наиболее высокая степень точности решения достигается вблизи угловых точек.

Значения напряжений, найденных по формуле сопротивления материалов $\sigma(t) = M/h^2 1.5t$, отличаются от практически точных значений, полученных в данной работе, не более чем на 10% для $|t| \leq 0.95$.

Автор благодарит И. И. Воровича за постановку задачи и руководство при ее выполнении.

Поступила 13 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Копасенко В. В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, стр. 109—115.
2. Куршин Л. М. Смешанная плоская задача теории упругости для квадранта. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, стр. 981.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л. Изд-во АН СССР, 1963, стр. 141.
4. Nelson C. W. New Tables of Howlands and Related Integrals. Math. Comp., 1961, vol. 15, pp. 12—18.